

二次元乱流壁面噴流に関する研究

STUDIES ON THE PLANE TURBULENT WALL JET

齊 藤 隆*

By Takashi SAITOU

1. 緒 言

壁面噴流は 1956 年に Glauert²⁾ が Wall-jet と名付けた平面に沿って拡散する噴流で、壁面に沿って発達する境界層と噴流と同様な速度分布をもつ主流部流れを最大流速点で接合した速度分布をなす流れなので、特性の異なる二つの流れが相互に干渉しながら拡散し、発達して流れるといえる。

壁面噴流に関する実験は 1936 年の Förthman¹⁾ による実験的研究以来かなり行われているが、速度分布の相似性、境界層速度分布や壁面抵抗則などについて、後述するように、個々の実験結果の間に若干の違いがあって、まだ十分に解明されたとはいえず、不明な点が残されている。

1956 年に Glauert²⁾ は乱流壁面噴流について、主流部と境界層の速度分布の相似解を前提とし、抵抗則に Blasius 則を用いて理論的研究を行っている。この結果の妥当性を Bakke³⁾ が軸対称壁面噴流の実験で確かめているが、その後に行われた Schwarz や土屋などの研究では抵抗則などに疑問がもたれる。

Schwarz⁴⁾ らは速度分布の相似解を前提に、通常境界層近似を適用した運動方程式によって抵抗則および速度分布の相似則について検討した結果より、通常乱流境界層の抵抗則と同形の抵抗則と速度分布の相似則とは両立しないことを明らかにし、実験結果より通常乱流境界層の抵抗則は壁面噴流の抵抗則にそのまま適用することはできないし、境界層内速度分布はほぼ 1/14 則にしたがうとしている。これとほぼ同時に土屋⁵⁾ も速度分布の実測によって境界層速度分布を 1/12 則で近似し、Blasius 則で与えられるよりもかなり大きな壁面抵抗係数に関する実験式を提案しているが、実験式の根拠が明らかにされていない。

上述の研究を含めた多くの研究において、主流部の流れでは速度分布の相似則が成り立つが、その拡がり角度は自由噴流のそれに比べてかなり小さいこと、境界層の速度分布は通常乱流境界層のそれよりかなり一様な分布で、通常乱流境界層の抵抗則は適用できないことが共通している。いずれの研究においても壁面噴流境界層の速度分布および抵抗則を通常乱流境界層において用いられるものと同形のものによって説明することを試みているが、その方法についての妥当性についての検討はほとんどなされていない。

Reynolds 応力の分布に関する Schwarz⁴⁾ の計算および Eskinazi⁶⁾, Kruka¹⁰⁾ の実測結果によると、境界層内の Reynolds 応力の分布は開水路流れにおける分布と同様にほぼ直線分布となっている。したがって、壁面噴流境界層速度分布が通常乱流境界層のそれよりもより一様な分布 (du/dy が小) であることは、壁面噴流境界層における渦動粘性係数が開水路流れなどで与えられるものよりも大きいことを意味していることになる。この渦動粘性係数 (混合距離, 平均渦径) の大きい原因としては、流れおよび乱れの大きさが境界層のものより大きい主流部の乱れが境界層へ拡散することによるものと考えるのが自然である。このことより壁面噴流境界層の速度分布や抵抗則に関する考察には、主流部の乱れの影響を考慮することが必要であると考えられる。

実際の水門下流部における洗掘限界や局所洗掘などの問題を取り扱うには、粗壁面における壁面噴流流れの特性を明らかにする必要があるが、Kapaeva⁷⁾ および Rajaratnam⁸⁾ らによって行われたもぐり跳水に関する実験的研究がある程度で、粗壁面における壁面噴流に関する研究はほとんど行われていない。

本文は、滑・粗面に沿って発達する壁面噴流境界層の速度分布および抵抗則を明らかにすることを試みたもので、上述した観点より、まず、従来のものと同形の抵抗則を適用することが妥当なものかを調べるために、指

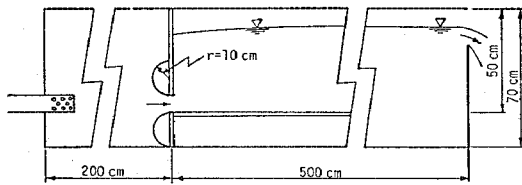
* 正会員 山口大学助教授 工学部土木工学科

数および対数型速度分布を用いて土屋が行ったと同様な方法でもって壁面噴流境界層の発達について検討し、実測した境界層の発達を説明できるように速度分布中の定数などが求められるが、これに対して適切な物理的解釈を与えることができないことを明らかにし、ついで、境界層近似を適用した運動方程式を実測速度分布でもって積分して得た渦動粘性係数の分布をもとにし、主流部の渦動粘性係数にそれとの境界面で一致する境界層内渦動粘性係数の分布でもって、主流部の渦動粘性係数を Parameter として含み、Prandtl-Kármán の分布則を包含する速度分布則を誘導し、この速度分布則でもって計算した壁面噴流境界層の発達、抵抗係数をこれらの測定結果と比較することで仮定に関する間接的検証を試みた。

最後に、実際の水門などの下流水深は有限であることより、先に得た結果の適用限界を実験的に決定した。

2. 実験装置と実験方法

実験を行った水槽は 図一1 に示した幅 20 cm の両面有機ガラス張りの鉄枠製のもので、上流側に直径 20 cm の塩ビ管で製作した噴流発生装置が設置されている。

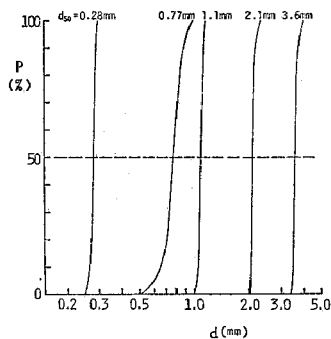


図一1 実験水槽

噴出孔下流の床面は溝型鋼で十分に補剛した 10 mm 厚さの亚克力板で、床面の高さはねじで微調整できるようにしている。

壁面粗度として用いた砂粒は 図一2 に示すほぼ均一な砂で、この砂をペイントで一層に上記床面に張付けた。粗度特性としては中央粒径を用いて実験結果を整理した。

主流部の流速測定には内径 1.9 mm、外径 2.2 mm のステンレス管で製作したピトー管を、壁面近くの境界層においては同じステンレス管の先端を厚さ 0.2 mm、幅 4 mm の偏平な断面に加工した



図一2 実験砂の粒度加積曲線

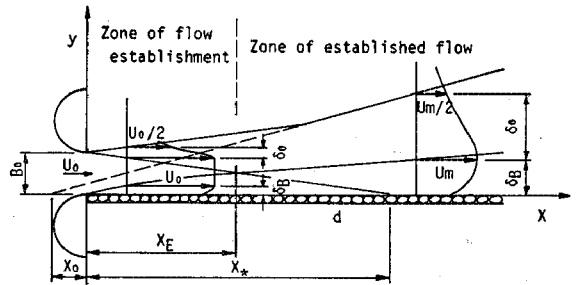
もので製作したピトー管を使用した。

実験は噴流孔厚さ B_0 を 1.0~1.54 cm とし、噴出流速 U_0 を 200 cm/s を基準にして 80~400 cm/s の範囲で 図一2 の粗度などの適当な組合せに対し、噴出孔断面より 10~70 cm の範囲において 10 cm 間隔で深さ方向の流速分布を測定した。

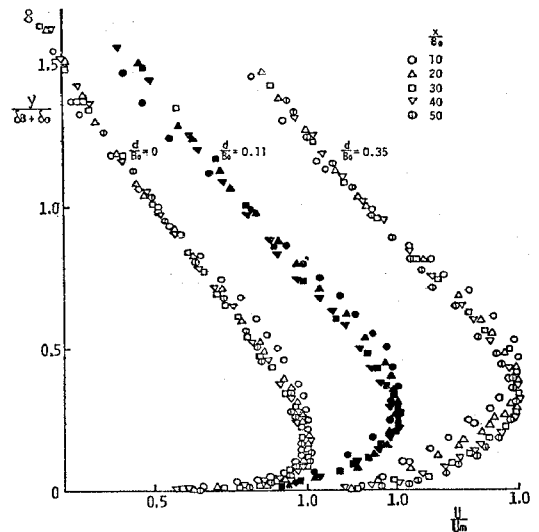
3. 実験結果とその検討

壁面噴流流れの概略と本文で用いる主な記号の説明を 図一3 に示す。自由噴流と同様に最大流速が一定の領域を乱れの拡散領域 (Zone of flow establishment) と、完全に乱れが発達している領域を乱れの確立領域 (Zone of established flow) とよぶことにする。

流速分布：乱れの確立領域における流速分布を最大流速 U_m と流れの幅 ($\delta_0 + \delta_B$) を単位として無次元表示したものが 図一4 である。図より、 $d/B_0 = 0$ の場合 (滑面) $x/B_0 = 10$ の描点を除くと流れ全体に対して速度分布の相似則がなりたっていると思われるが、粗面の場合には x/B_0 が大きくなるにつれて流れ全体に対する境界層厚



図一3 壁面噴流流れの概略図



図一4 乱れの確立領域における流速分布

さの割合 $\delta_B/(\delta_0 + \delta_B)$ が漸近的に減少して、流れ全体については速度分布の相似則は適用できない。

後述する δ_0 の変化を考慮して、自由噴流の Görtler の解に仮想原点 x_0 を導入する。

$$\frac{U}{U_m} = \text{sech}^2\left(\sigma \frac{y - \delta_B}{x + x_0}\right) \dots\dots\dots (1)$$

主流部流れの幅 δ_0 は $U/U_m = 0.5$ なることより、ただちに、

$$\frac{\delta_0}{B_0} = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{2} \left(\frac{x + x_0}{B_0}\right)}{\sigma} \dots\dots\dots (2)$$

となる。式 (2) でもって式 (1) を書きなおすと次式となる。

$$\frac{U}{U_m} = \text{sech}^2\left(\cosh^{-1} \sqrt{2} \cdot \frac{y - \delta_B}{\delta_0}\right) \dots\dots\dots (3)$$

主流部の流速分布と上式とを比較したのが 図-5 で、実測分布は頂部でややとがった分布であるが、主流部の流速分布は自由噴流のそれと同じ分布とみなせる。

境界層の流速分布を U_m と δ_B で無次元化して図示したのが 図-6 である。同図中に記入してある実線は 1/7, 1/12 および 1/14 則分布で、一点鎖線は Kruka¹⁰⁾ が測定した平均流速分布である。

土屋は $x/B_0 = 9.3 \sim 35.0$ の測定より 1/12 則で、Sch-

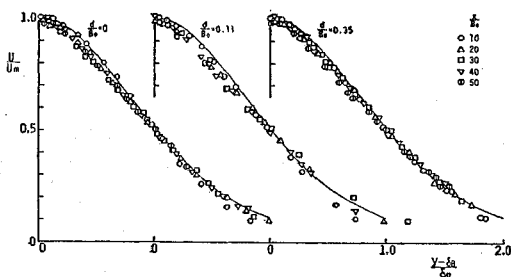


図-5 主流部流速分布

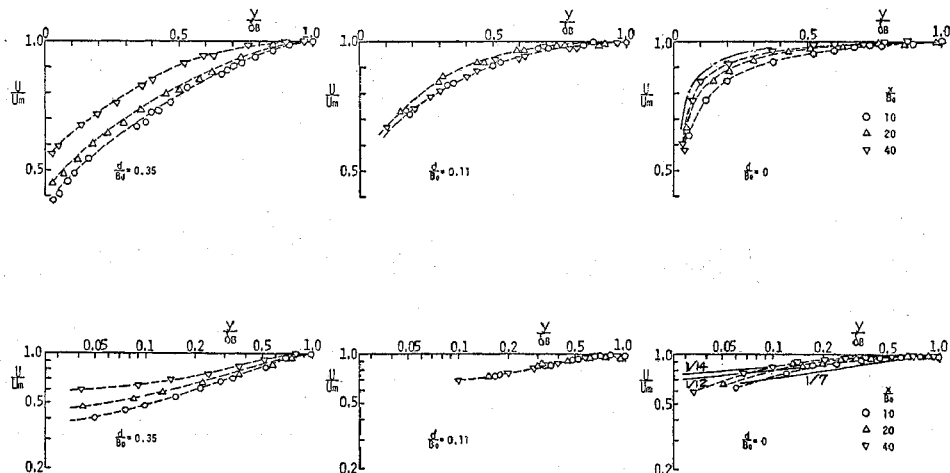


図-6 境界層流速分布

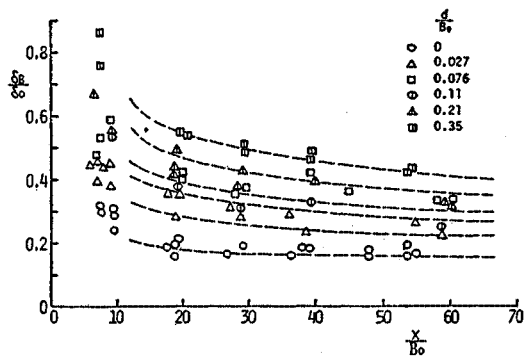


図-7 主流部と境界層の代表寸法の相対的变化

warz は $x/B_0 = 24 \sim 60$ の測定より 1/14 則で近似し、 $x/B_0 = 46 \sim 275$ で測定した Kruka の測定および $x/B_0 = 10 \sim 60$ で測定した本実験を総合してみると、 x/B_0 が大きいほど流速分布はより一様な分布に近づいている。この傾向は壁面粗度 d/B_0 が大きいほど明瞭にみられ、境界層速度分布を指数型速度分布で近似すると、指数を x/B_0 の関数として与えなければならないことになる。

流れの代表寸法：図-4 でみられた流れ全体に占める境界層流れの割合が漸的に減少しているのを図示したのが 図-7 である。 $d/B_0 = 0$ で $x/B_0 > 20$ では $\delta_B/\delta_0 \approx 0.17$ ($\delta_B/(\delta_0 + \delta_B) \approx 0.145$) といままでに行われた実験結果とほぼ一致している。

乱れの確立領域における主流部流れの代表寸法 δ_0/B_0 の x/B_0 による変化をみたのが 図-8 である。同図中の直線は次の実験式である。

$$\frac{\delta_0}{B_0} = 0.068 \left(\frac{x}{B_0} + 5.0\right) \dots\dots\dots (4)$$

自由噴流の拡がり角に比べかなり小さいが、表-1 にあげた従来の壁面噴流の実験結果とほぼ一致している。

式 (2) と式 (4) を比較して、

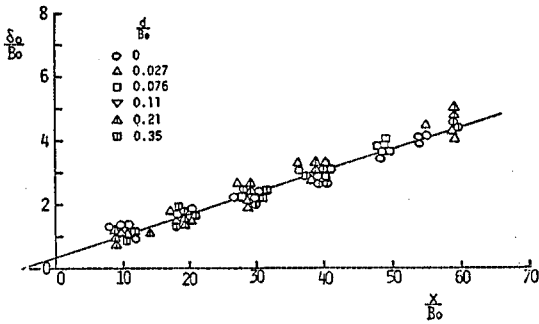


図-8 主流部の拡散

表-1 主流部の拡散常数

	Jet	Wall	$d\delta_0/dx$	σ	c
Albertson	Free	—	0.127	6.93	0.0388
Sigalla	Wall	Smooth	0.065	13.56	0.0142
Tsuchiya	"	"	0.059	15.03	0.0121
Schwarz	"	"	0.068	12.96	0.0152
Kruka	"	"	0.060	14.67	0.0126
Saitou	"	S & R	0.068	12.96	0.0152

$$\frac{x_0}{B_0} = 5.0, \quad \sigma = \frac{\cosh^{-1}\sqrt{2}}{0.068} = 12.96 \dots (5)$$

が得られる。自由噴流においては $\sigma = 7.67$ (Reichard) である。

自由噴流に関する Tollmien の解によると、噴流幅の拡がり角は次のように与えられる。

$$\frac{d\delta_0}{dx} \propto \left(\frac{l}{x}\right)^{2/3} \dots (6)$$

ここに、 l は混合距離である。

いま、ごく単純に壁面噴流主流部流れを自由噴流流れを最大流速で2分したものとし、主流部の混合距離が自由噴流の1/2であるとすると、式(6)の関係から主流部の拡がり角は $(0.5)^{2/3} = 0.630$ 倍で自由噴流の拡がり角 $0.115 \sim 0.127$ より $d\delta_0/dx = 0.072 \sim 0.080$ となり、壁面噴流主流部の拡がり角に近い値である。このことと流速分布とから主流部の流れは自由噴流と同様にほぼ混合距離が断面内で一定の流れと推測される。

最大流速の逓減: 主流部の流れに対して運動量保存則を適用(境界層を無視)すると、式(1)の速度分布より最大流速の逓減則として次式が得られる。

$$\frac{U_m}{U_0} = \sqrt{\frac{3\sigma}{2} \frac{x+x_0}{B_0}} \dots (7)$$

上式で $U_m/U_0 = 1$ と置くと、図-3の仮想点 x_* が次のように求まる。

$$\frac{x_*}{B_0} = \frac{3}{2}\sigma - \frac{x_0}{B_0} = 14.44 \dots (8)$$

上式の x_*/B_0 は不連続面の拡散する角度を与えるもので、乱れの拡散領域における境界層の発達によってこの拡散する角度は変化しないものとして乱れの確立領域への移行点 x_E を求める。

乱れの拡散領域における境界層外縁の流れはポテンシャル流の性質を保ち最大流速が一定であるので、境界層の発達には通常の乱流境界層の発達と同じである。

滑面に対しては Blasius の抵抗則を、粗面に対しては Manning-Strickler の抵抗則を適用すると、乱れの拡散領域における境界層の発達は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_B}{x} &= 0.37 \left(\frac{\nu}{U_0 x} \right)^{1/5} \text{ for Smooth} \\ \frac{\delta_B}{x} &= 0.248 \left(\frac{k_s}{x} \right)^{1/4} \text{ for Rough} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

x_E 点における境界層の厚さを δ_{BE} とすると、図-3における幾何学的関係より $\delta_{BE}/B_0 = 1 - x_E/x_*$ であることより、式(9)で δ_{BE} と x_E の関係を与えると、乱れの確立領域への移行点は次式と求まる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_E}{B_0} / \left\{ 1 - 0.37 \frac{x_E}{B_0} \left(\frac{\nu}{U_0 x_E} \right)^{1/5} \right\} &= \frac{x_*}{B_0} \\ &\text{for Smooth} \\ \frac{x_E}{B_0} / \left\{ 1 - 0.248 \frac{x_E}{B_0} \left(\frac{k_s}{x_E} \right)^{1/4} \right\} &= \frac{x_*}{B_0} \\ &\text{for Rough} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

ここに、 k_s は相当粗度、 ν は流体の動粘性係数である。

式(7)において、 $x = x_E$ で $U_m/U_0 = 1$ の条件を満足させると最大流速の逓減則は次式となる。

$$\frac{U_m}{U_0} = \sqrt{\frac{x_E + x_0}{x + x_0}} \dots (11)$$

式(10)、(11)でもって計算した最大流速の逓減と実験結果とを比較したものが図-9である。計算曲線と実験描点との一致は良好なもので、乱れの確立領域においては主流部の流れに対して運動量の保存則が適用できる。

式(1)、(11)を用いて運動量を計算すると噴出運動量の $(x_E + x_0)/(x_* + x_0)$ で、乱れの拡散領域における境界層の発達によって運動量が減少している。

境界層の発達: 図-6に示した速度分布より通常の乱流境界層の抵抗則をそのまま適用することはできないが、従来の研究で行っている乱流境界層のと同形の抵抗則を適用することの可能性を検討してみる。

非圧縮性定常流に対する境界層運動量方程式を排除厚

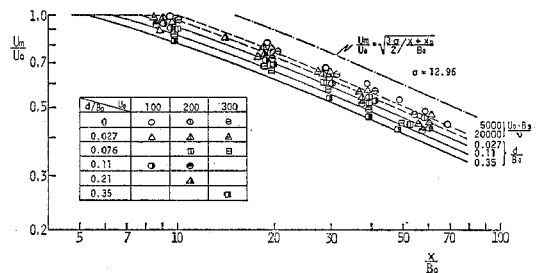


図-9 最大流速の逓減

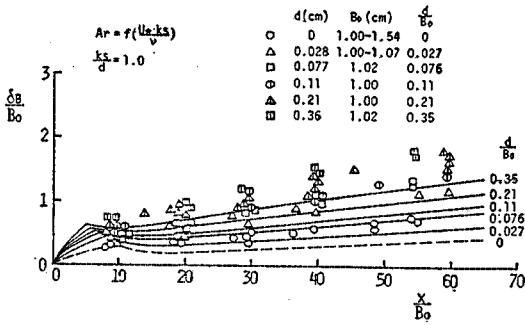


図-10 壁面噴流境界層の発達

δ_* , 運動量厚 θ および摩擦速度 U_* で書きかえ, 土屋および Schwarz らと同様に圧力項 dp/dx を無視 (後にこれが無視できない条件を実験的に決定する) すると次式となる.

$$\left(\frac{U_*}{U_m}\right)^2 = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\delta_B}{U_m} \left(2\frac{\theta}{\delta_B} + \frac{\delta_*}{\delta_B} - 1\right) \frac{dU_m}{dx} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\delta_* = \int_0^{\delta_B} \left(1 - \frac{U}{U_m}\right) dy, \quad \theta = \int_0^{\delta_B} \frac{U}{U_m} \left(1 - \frac{U}{U_m}\right) dy$$

境界層速度分布を対数分布で, 最大流速の遞減を式(11)で与えて上式でもって境界層の発達を計算した結果と実験結果とを比較したのが図-10である. Blasiusの抵抗則および Manning-Strickler の抵抗則でもって計算した結果も対数則による計算結果とほぼ同じであった. 実験結果に比べ計算結果の方がかなり境界層厚さが小さい. このため, 境界層内流速分布を

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_m} &= \left(\frac{y}{\delta_B}\right)^n \\ \left(\frac{U_*}{U_m}\right)^2 &= \frac{1}{2} C_x = r \left(\frac{U_m \cdot \delta_B}{\nu}\right)^{-2n/(n+1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

と置き, 各 x/B_0 で実測した境界層厚さと上式を用いて計算したものが一致したときの指数 n と係数 r との関係を図示したのが図-11である. 各 x/B_0 に対する r と n との関係が一点で交差すれば, n と r は定数として決められるが, 図にみられるように両者を定数として与えることはできない.

これと同様にして, 境界層速度分布を

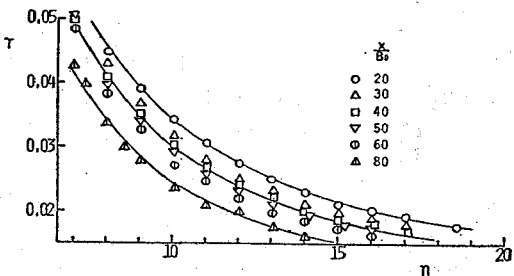


図-11 速度分布則の指数 n と抵抗則の係数 r との関係

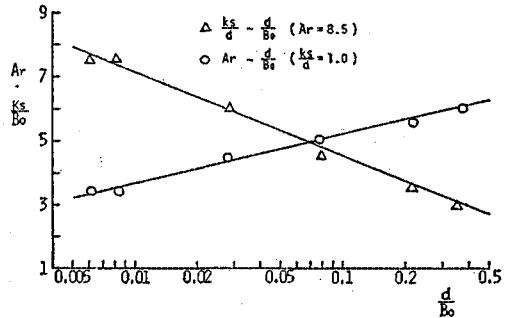


図-12 対数分布則における A_r および k_s/B_0 の値

$$\frac{U}{U_*} = A_r \left(\frac{U_* \cdot k_s}{\nu}\right) + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} \quad \dots\dots\dots(14)$$

と与え, 境界層の発達に関する実測結果と計算値が一致する A_r および k_s/B_0 を求めて図示したのが図-12である.

図で与えられる A_r あるいは k_s/B_0 を用いれば, 壁面噴流境界層の発達を計算できるのであるが, このような A_r および k_s/B_0 の値に対して物理的に適当な説明を与えることができない.

4. 壁面噴流抵抗則に関する理論的考察

前述のごとく, 壁面噴流の抵抗則を通常の乱流境界層のものと同形のもので与えることはできない. また, せん断および流速の分布から, 壁面噴流境界層における渦動粘性係数の分布は通常の乱流境界層におけるのと若干異なったものと考えられる.

渦動粘性係数の定量的評価は, とくに, $du/dy \neq 0$ においては, 困難であるので, それを定性的に調べ, 境界層を平均的な特性によって分けて抵抗則を考察してみる.

せん断力と渦動粘性係数の分布: 通常境界層近似を適用した運動方程式を連続の式で書きなおすと, 次式となる.

$$U \frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y} dy \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots(15)$$

ここに, u', v' はそれぞれ主流方向 (x) とそれに垂直な方向 (y) の乱れ速度である.

主流部の流れにおける ν/u は $d\delta_0/dx$ の Order であるから, 主流部に対しても境界近似が適用できる.

流れ全体に対して, 次の速度および Reynolds 応力の分布関数を導入する.

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_m} &= f\left(\zeta, \frac{x}{B_0}\right), \quad \frac{\overline{u'v'}}{U_m^2} = g\left(\zeta, \frac{x}{B_0}\right) \\ \zeta &= \frac{y}{\delta}, \quad \delta = \delta_0 + \delta_B \end{aligned} \right\} \dots(16)$$

$\zeta \rightarrow \infty$ で $\overline{u'v'} \rightarrow 0$ なることより, 式(15)に式(16)を

代入し, ζ より ∞ まで積分して整理すれば次式となる.

$$g(\zeta, x/B_0) = \left(2 \frac{\delta}{U_m} \frac{dU_m}{dx} + \frac{d\delta}{dx}\right) \int_{\zeta}^{\infty} f^2 d\zeta + \left(\frac{\delta}{U_m} \frac{dU_m}{dx} + \frac{d\delta}{dx}\right) f \int_0^{\zeta} f d\zeta + \frac{\nu}{U_m \delta} \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \delta \frac{\partial}{\partial x} \int_{\zeta}^{\infty} f^2 d\zeta - \delta f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\zeta} f d\zeta \dots\dots\dots(17)$$

上式の右辺第3項は壁面のごく近傍においては主要な役割をするが, 流れの大部分においては微少項として無視できる. また, 第4, 5項は図-4の速度分布の x/B_0 による変化が小さいことより, 各断面の速度分布を用いることで無視することにする.

式(4), (9)の実験式を式(17)に代入すると次式となる(第3~5項は無視してある).

$$\frac{g(\zeta, x/B_0)}{\beta(1+m)} = \left(1 - \frac{x+x_0'}{x+x_0}\right) \int_{\zeta}^{\infty} f^2 d\zeta + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x+x_0'}{x+x_0}\right) f \int_0^{\zeta} f d\zeta$$

ここに, x_0' は式(4)の仮想原点で $x_0'/B_0 = 5.0$, x_0 は式(9)の仮想原点で $x_0/B_0 = \sigma/3 = 4.32$, $\beta = d\delta_0/dx = 0.068$, $m = \delta_B/\delta_0 = F(x/B_0)$ である.

壁面せん断力 τ_0 を $\tau_0/\rho = -U_m^2 g(0, x/B_0)$ とすると,

$$\frac{\tau_0}{\rho U_m^2} = -\beta(1+m) \left(1 - \frac{x+x_0'}{x+x_0}\right) \int_0^{\infty} f^2 d\zeta \dots\dots\dots(19)$$

となる.

せん断力および渦動粘性係数の分布が上二式より次式と求まる.

$$\frac{\tau}{\tau_0} = -\left\{ \left(1 - \frac{x+x_0'}{x+x_0}\right) \int_{\zeta}^{\infty} f^2 d\zeta + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x+x_0'}{x+x_0}\right) f \int_0^{\zeta} f d\zeta \right\} / \left\{ \left(1 - \frac{x+x_0'}{x+x_0}\right) \int_0^{\infty} f^2 d\zeta \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$\frac{\varepsilon}{U_m \delta_0} = \frac{g(\zeta, x/B_0)}{f'(\zeta, x/B_0)} \dots\dots\dots(21)$$

m を図-7の鎖線と与え, 各断面の実測流速分布をもって式(20)および式(21)を計算した結果が図-13である. 同図には比較のために, Eskinazi^{9), 10)} らによるせん断力実測結果と Schwarz⁴⁾ らが計算したせん断力分布を記入してある.

渦動粘性係数の計算結果をみると, 最大流速点付近できわめて変動が激しい. これは速度勾配がきわめて小さいことに起因するものであまり意味をもたない. そこで比較的速度勾配の大きいところの計算結果を右上方に拡大して図示した. 主流部の渦動粘性係数が大きいほど, 壁面からはなれると渦動粘性係数の増大する割合が大きくなっている. 渦動粘性係数の連続性からこれは当然の結果であろう.

二次元自由噴流に関する Reichard の実験結果 ($\sigma = 7.67$) と Goeltler¹²⁾ の解とより渦動粘性係数を逆算すると $\varepsilon/U_m \delta_0 = 0.037$ となり, 図-13に示した滑面に沿って拡散する壁面噴流主流部の $\varepsilon/U_m \delta_0 = 0.03 \sim 0.026$ で若干小さいが, 壁面の存在によるものであろう.

境界層の流速分布および流れの Scale の割合 δ_B/δ_0 が主流部の渦動粘性係数におよぼす影響を調べた結果が表-2である. 表-2中の α_1 は速度分布を指数形で与えたときの指数の値にほぼ一致するものである. 表-2の渦動粘性係数の値は主流部の1/2最大流速点の値である. 表より境界層速度分布の違いによる影響はほとんどないが, m が大きくなると主流部渦動粘性係数は大きくなっている.

滑面の場合と同様にして, 粗面に沿って拡散する壁面噴流渦動粘性係数を求め, 主流部の代表値として $x/B_0 = 40$ で1/2最大流速点の値を表-3に掲げる.

壁面噴流境界層速度分布則: 壁面が滑らかな場合には壁面に沿ってその中の渦動粘性がほとんど役割をもたないような粘性底層が存

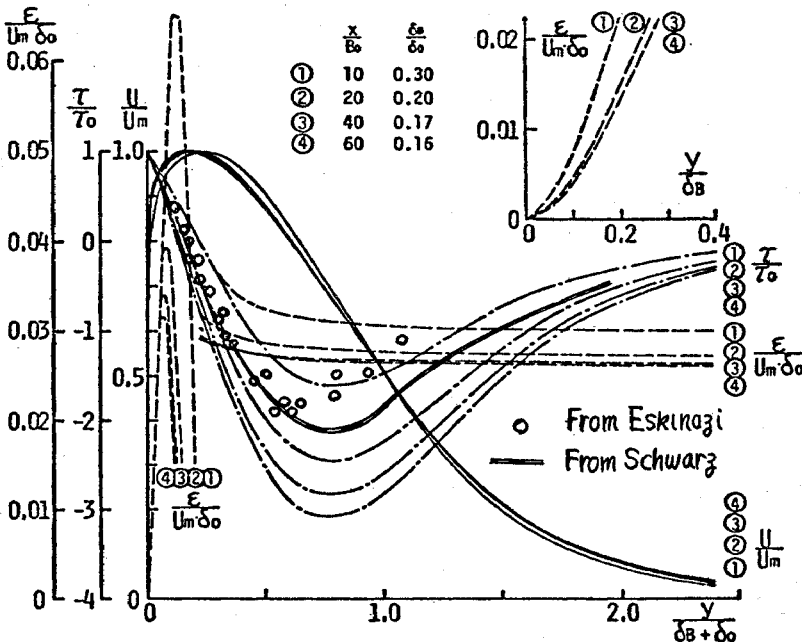


図-13 滑面に沿って拡散する壁面噴流におけるせん断力・渦動粘性係数の分布

表-2 境界層流速分布および δ_B/δ_0 による主流部渦動粘性係数の変化

m	α_1	1/4	1/8	1/12	1/16	1/20
0.15	0.0252	0.0256	0.0257	0.0258	0.0258	0.0258
0.20	275	280	282	283	283	283
0.25	298	305	307	309	309	309
0.30	323	331	334	336	337	337
0.35	348	358	362	364	365	365
0.40	375	386	391	393	395	395
0.45	402	416	421	423	425	425
0.50	431	446	452	455	457	457

表-3 壁面噴流主流部の渦動粘性係数

d/B_0	δ_B/δ_0	$\epsilon/U_*\delta_0$
0.35	0.455	0.0424
0.21	0.390	385
0.11	0.330	358
0.076	0.300	334
0.027	0.240	287
0	0.160	262

在する。表面に凹凸がある場合でも同じようにその凹凸に沿ってその中では流体粘性のみが考えられるようなきわめて薄い層があるはずで、したがって、平均的に底面に沿って一様な厚みをもつ見かけ上の粘性底層が考えられる。

壁面が粗なる場合、壁面の付近では、栗原²⁰⁾によると Vortex type と Wake type の粗度に起因した乱れの場合が生じ、少しく壁面から離れていくと外側の乱れの場合に接続してしまう。したがって、粘性底層と流れの大部分を占める内層との間に粗度の流体力学的特性を示す乱流底層を導入することができる。

このような観点より、境界層を平均的に考えて粘性底層、乱流底層および内層の三層に分けて速度分布則について考察することにする。

境界層内のせん断力分布は慣性項のために直線分布とはならないが、前述した計算結果および Kruka の測定結果より直線分布として差し支えないので、壁面せん断力を τ_0 とし、次式の分布を仮定する。

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau_0}{\rho} (1-\eta) = U_*^2 (1-\eta), \quad \eta = \frac{y}{\delta_B} \quad \dots\dots (22)$$

渦動粘性係数は主流部と境界層との境界面で一致し、壁面の付近では通常の乱流境界層の分布と一致するであろうこと、また、前述した計算した分布の傾向を考慮して次式のように境界層内の渦動粘性係数分布を仮定する。

$$\epsilon = \kappa U_* \delta_B \eta (1-E\eta), \quad E = 1 - \frac{\alpha U_m \delta_0}{\kappa U_* \delta_B} \quad \dots\dots (23)$$

ここに、 α は表-3 にあげた主流部の無次元渦動粘性係数（主流部では一様分布と考える）である。

非圧縮性定常流の運動方程式に境界層近似を適用し、慣性項を微小項として無視すると次式となる。

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{dU}{dy} - \overline{U'v'} = (\nu + \epsilon) \frac{dU}{dy} \quad \dots\dots (24)$$

粘性底層の速度分布は流体粘性のみを考えて上式より次式となる。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{U_* y}{\nu} = \frac{1}{\kappa} R_* \eta, \quad R_* = \kappa \frac{U_* \delta_B}{\nu} \quad \dots\dots (25)$$

乱流底層は粗度に起因する乱れの場合であり、層自身がきわめて薄いものであるため、栗原^{19), 20)}に従い、渦動粘性係数は一様な分布と考える。積分定数 C_1 を用いて式(24)より速度分布が次式となる。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{U_* \delta_B}{\nu} \left(1 + \frac{\epsilon}{\nu}\right)^{-1} \eta + C_1 \quad \dots\dots (26)$$

内層の速度分布は式(24)に式(22)、(23)の両式を代入し、積分定数 C_2 を用いて次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{U}{U_*} = & \frac{1}{2\kappa E} \left\{ \ln |ER_* \eta^2 - R_* \eta - 1| \right. \\ & + \frac{R_*(1-2E)}{\sqrt{R_*^2 + 4ER_*}} \ln \left| \frac{2ER_* \eta - (R_* + \sqrt{R_*^2 + 4ER_*})}{2ER_* \eta - (R_* - \sqrt{R_*^2 + 4ER_*})} \right. \\ & \left. \left. \cdot \frac{R_* - \sqrt{R_*^2 + 4ER_*}}{R_* + \sqrt{R_*^2 + 4ER_*}} \right| \right\} + C_2 \quad \dots\dots (27) \end{aligned}$$

粘性底層、乱流底層の境界面高さを、それぞれ η_1, η_2 とすると、式(26)および式(27)の η を $(\eta - \eta_1)$ に置き換えなければならない。また、乱流底層境界面で内層の渦動粘性係数に一致しなければならないことより、乱流底層の渦動粘性係数は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\nu} = & \kappa \frac{U_* \delta_B}{\nu} (\eta_2 - \eta_1) \{1 - E(\eta_2 - \eta_1)\} \\ = & R_* (\eta_2 - \eta_1) \{1 - E(\eta_2 - \eta_1)\} \quad \dots\dots (28) \end{aligned}$$

各層の境界面で流速を接続すると、乱流底層および内層の速度分布はそれぞれ次式となる。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \left[R_* \eta_1 + \frac{R_* (\eta - \eta_1)}{1 + R_* (\eta_2 - \eta_1) \{1 - E(\eta_2 - \eta_1)\}} \right] \quad \text{for } \eta_1 > \eta > \eta_2 \quad \dots\dots (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{U}{U_*} = & \frac{1}{\kappa} \left[R_* \eta_1 + \frac{R_* (\eta_2 - \eta_1)}{1 + R_* (\eta_2 - \eta_1) \{1 - E(\eta_2 - \eta_1)\}} \right. \\ & + \frac{1}{2E} \left\{ \ln \left| \frac{ER_* (\eta - \eta_1)^2 - R_* (\eta - \eta_1) - 1}{ER_* (\eta_2 - \eta_1) - R_* (\eta_2 - \eta_1) - 1} \right| \right. \\ & + \frac{R_*(1-2E)}{\sqrt{R_*^2 + 4ER_*}} \\ & \left. \left. \cdot \ln \left| \frac{2ER_* (\eta - \eta_1) - (R_* + \sqrt{R_*^2 + 4ER_*})}{2ER_* (\eta - \eta_1) - (R_* - \sqrt{R_*^2 + 4ER_*})} \right| \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \frac{2ER_* (\eta_2 - \eta_1) - (R_* - \sqrt{R_*^2 + 4ER_*})}{2ER_* (\eta_2 - \eta_1) - (R_* + \sqrt{R_*^2 + 4ER_*})} \right| \right] \quad \dots\dots (30) \end{aligned}$$

栗原²⁰⁾は乱流底層内での乱れ Energy の生成と散逸とがほぼ平衡状態にあるとの考えより、乱流底層の厚さを次式で与えている。

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{k_s}{\delta_B} \left\{ 1 - \exp \left(-0.055 \left(\frac{U_* k_s}{\nu} - 3.3 \right) \right) \right\} \quad \text{注1)} \quad \dots\dots (31)$$

注1) 滑領域の限界 $\frac{U_* k_s}{\nu} = 3.5$ を 3.3 と変えた。

滑面における粘性底層の厚さを求める。E=1 (通常の乱流境界層) と置き、R* が十分大きく、η が比較的大きいところを考へて式 (30) を簡略化する (η₂-η₁=0) と次式となる。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \{ R_* \eta_1 + \ln(R_* \eta) \} \dots\dots\dots (32)$$

滑領域における Nikuradse の実験結果を次式で与える。

$$\frac{U}{U_*} = 5.5 + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_* y}{\nu} \dots\dots\dots (33)$$

両式を比較して、κ=0.4, U* y₁/ν=7.79 が得られる。

粗領域における粘性底層を求めるのに、滑領域の場合と同様に式 (30) を簡略化すると次式となる。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \left[R_* \eta_1 + \frac{R_* (\eta_2 - \eta_1)}{1 + R_* (\eta_2 - \eta_1) - R_* (\eta_2 - \eta_1)^2} + \ln \frac{\eta}{\eta_2 - \eta_1} \right] \dots\dots\dots (34)$$

粗領域における Nikuradse の実験結果を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_*} &= A_r + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} \\ A_r &= 8.5 + 0.744 \left(\frac{U_* k_s}{\nu} - 3.3 \right)^{1/2} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -0.077 \left(\frac{U_* k_s}{\nu} - 3.3 \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

上式の適合度は 図-14 に示すとおりである。

式 (34) を式 (35) と比較することによって、κ=0.4,

$$\frac{U_* y_1}{\nu} = A_r + \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{k_s / \delta_B}{\eta_2 - \eta_1} \right) - \frac{R_* (\eta_2 - \eta_1)}{1 + R_* (\eta_2 - \eta_1) - R_* (\eta_2 - \eta_1)^2} \right] \dots\dots\dots (36)$$

式 (36) を計算した結果が 図-15 (a) で、相対粗度 k_s/δ_B が大きいほど粘性底層厚さ U* y₁/ν が小さくなっている。式 (36) の誘導において R* が十分大きいとして簡略しているので U* k_s/ν が小さいところの計算値は意味がない。相対粗度による粘性底層厚さの違いをみたのが 図-15 (c) である。

簡略解：式 (30) は式形が非常に複雑で、この式でもって計算を行うには相当な労力を要するので簡略化を試みる。

乱流底層および内層において流体粘性を無視し、厳密

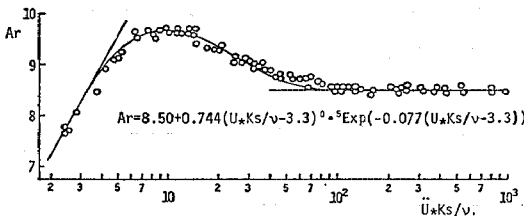
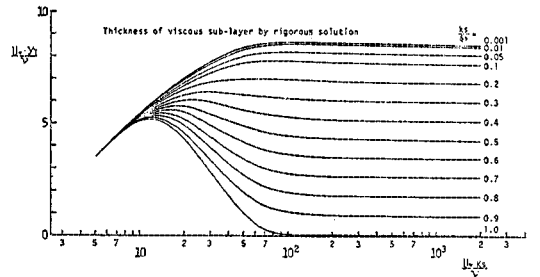
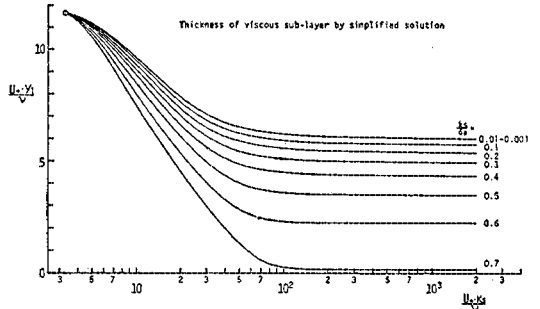


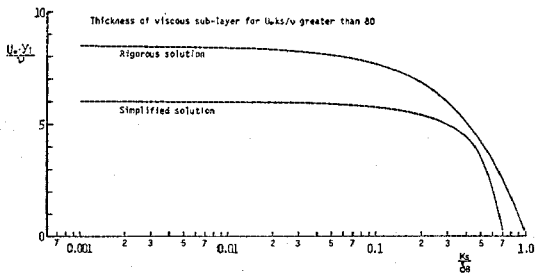
図-14 A_r と U* k_s/ν との関係



(a)



(b)



(c)

図-15 粘性底層の厚さ

解で行った η を (η-η₁) への変換を行うと、η₁ で ν+ε=0 なる不都合が生じるので、両層の流体粘性を無視することの補正として η₁ での渦動粘性と流体粘性を一致させ η_s を導入することにする。

$$\kappa \frac{U_* \delta_B}{\nu} (\eta_1 - \eta_s) \{ 1 - E(\eta_1 - \eta_s) \} = 1 \dots\dots\dots (37)$$

式 (24) で流体粘性を無視して、厳密解を求めたと同じ方法で乱流底層および内層の速度分布を求めると次式となる注2)。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \left[R_* \eta_1 + \frac{\eta - \eta_1}{(\eta_2 - \eta_s) \{ 1 - E(\eta_2 - \eta_s) \}} \right] \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \left[R_* \eta_1 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{(\eta_2 - \eta_s) \{ 1 - E(\eta_2 - \eta_s) \}} + \ln \left| \frac{\eta - \eta_s}{\eta_2 - \eta_s} \right| + \frac{1 - E}{E} \ln \left| \frac{1 - E(\eta - \eta_s)}{1 - E(\eta_2 - \eta_s)} \right| \right] \dots\dots\dots (39)$$

注2) 厳密解では η→(η-η₁) としたが η→(η-η_s) としている。

上式で $E=1$ と置き、式 (33) および式 (35) と比較することで粘性底層の厚さを求めたのが 図-15 (b), (c) である。

修正式：式 (39) もかなり複雑であるので、Prandtl-Kármán が行ったように、壁面近くの複雑な流れを考えるかわりに便宜的境界条件 $y=y_0$ で $U=0$ を用い、式 (24) の流体粘性を無視し、式 (23) の渦動粘性係数をもって速度分布を求めると次式となる。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1-E}{\kappa E} \ln \left| \frac{1-E\eta}{1-E\eta_0} \right| + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0} \dots (40)$$

右辺第一項が主流部の乱れによる修正項で、 $E=1$ とすると Prandtl-Kármán の対数分布則に一致する。したがって、便宜的壁面高さ η_0 は従来値がそのまま成立する。

5. 壁面噴流境界層の発達

前節において壁面噴流境界層の速度分布則を得たので、最大流速の逓減および主流部の拡散に関する実験結果式 (9)、式 (4) を用いて境界層運動量方程式 (12) でもって境界層の発達に関する計算を行うことができる。

乱れの拡散領域 ($x \leq x_E$) では境界層外縁の流れはポテンシャル的性質の流れで乱れが存在しないので、境界層は通常の乱流境界層と同じ速度分布でもって発達する。一方、前節で求めた速度分布は主流部の乱れとの平衡関係がなりたっていて、乱れの拡散領域より乱れの確立領域へ主流部流れの移行と同時にたたないはずである。この遷移がどのようなものかはまったく不明であるが、主流部の乱れの拡散が自由乱れの拡散と同じであるとすると、遷移領域は $x_* - x_E$ の範囲であるとみ

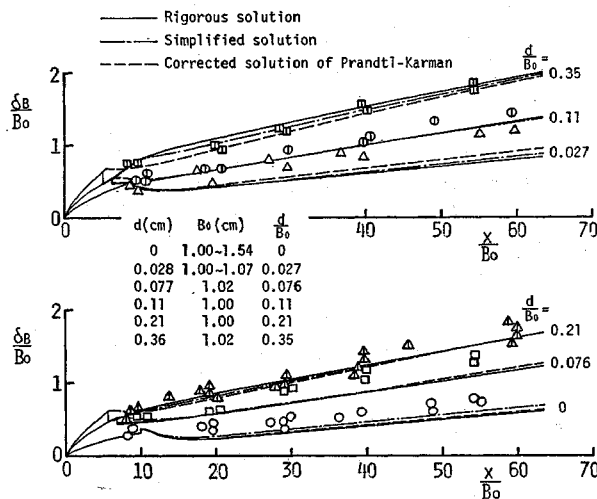


図-16 壁面噴流境界層の発達

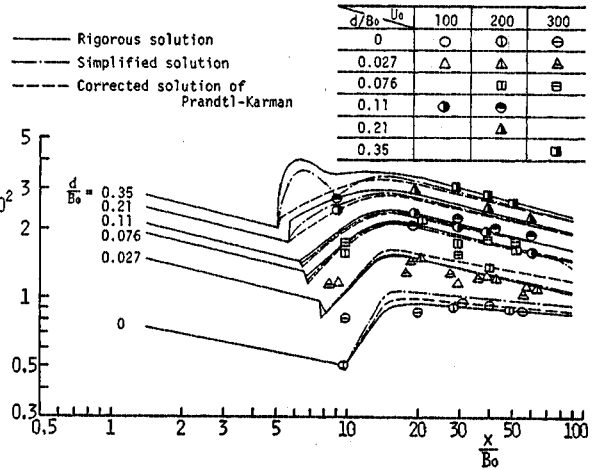


図-17 壁面噴流抵抗係数

なせる。この範囲での速度分布の変化を主流部乱れの拡散の割合でもって表わすことにし、境界層速度分布に与える主流部の渦動粘性係数の大きさを次式で仮定する。

$$\epsilon = \alpha U_m \delta_0 \frac{x - x_E}{x_* - x_E} \text{ for } x_E < x < x_* \dots (41)$$

ここに、 α は表-3、 x_E は式 (11)、 x_* は式 (9) で与えられる。

噴出口より x_E までは式 (10) で境界層の発達を計算し、 x_E より下流における発達を式 (30)、(39)、(40) の速度分布でもって計算したのが 図-16 である。各速度分布による差はほとんどなく、計算値と実験値との一致は十分満足できるものである。

境界層の発達に関する計算過程で得られた局部抵抗係数および速度分布を実測値と比較したのが 図-17, 18 である。図-17 の実験描点は測定した流速分布を片対数目盛で図示し、 $\eta=0.1 \sim 0.5$ の範囲における平均勾配が式 (39) のそれと一致する摩擦速度より計算した抵抗係数である。本実験では $U_m \delta_0 / \nu \approx 10^4$ で、土屋および Schwarz の実験の中間の値で、両者が求めた抵抗係数の中間の値となっている。

図-18 の速度分布を見ると、粗度が大きい場合に計算値と実測値がかなり違うが、境界層の厚さ δ_B の取り方に若干主観がはいるので $d/B_0=0.35$ の境界層厚さを $1 \sim 2$ mm 大きくすると計算値と実験値とは完全に一致する。換言すれば、 $du/dy=0$ 付近の流速測定 1% 以下の誤差を考慮すれば両者を一致させることができるのである。

6. 壁面噴流の適用限界

前節までの壁面噴流流れの特性に関する検討は下流水深が十分深いものとして取り扱ったが、実際の水門下

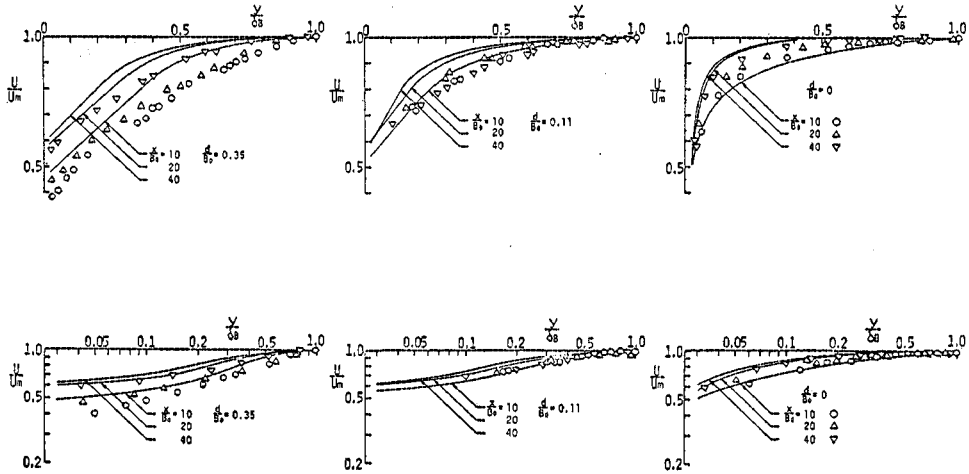


図-18 壁面噴流境界層速度分布

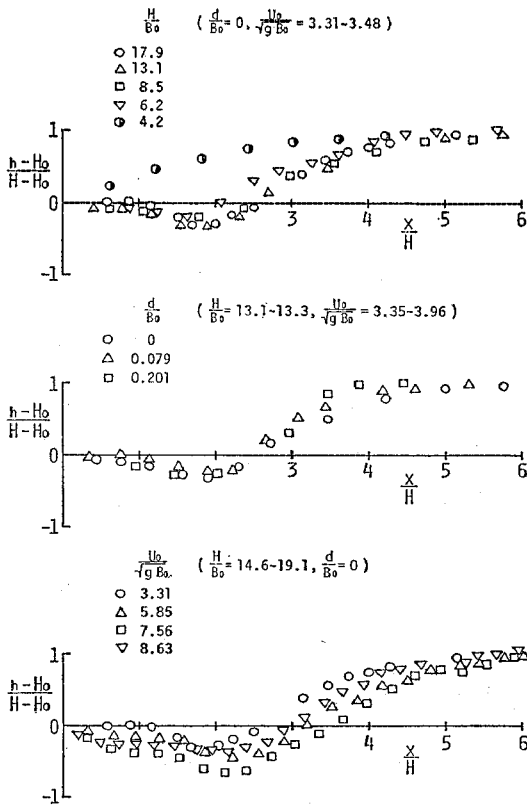


図-19 水門下流における水面形状

流における水深は下流条件によって規定されているので、下流水深は場所的に変化する運動量方程式における圧力項を無視することができなくなる。この影響を下流水深 H と噴出 Froude 数 $U_0/\sqrt{gB_0}$ をそれぞれ系統的に変化した実験を行い、壁面噴流の適用限界について検討した。

噴出孔断面の水深を H_0 、十分下流の水深を H 、任意

断面の水深を h として、静圧管を用いて測定した水面形状の一部が図-19である。 H/B_0 が $U_0/\sqrt{gB_0}$ に対応したある水深以上であると、図にみられるように d/B_0 、 H/B_0 および $U_0/\sqrt{gB_0}$ による系統的な変化はみられず、図の無次元表示によってほぼ一定曲線とみられる。

噴出孔断面と十分下流の断面を検査面とし、壁面摩擦を無視する運動量の定理より次式が得られる。

$$\frac{H_0}{H} = \sqrt{1 + 2 \left(1 - \frac{H}{B_0}\right) \frac{U_0^2}{gB_0} / \left(\frac{H}{B_0}\right)^3} \dots\dots (42)$$

上式で $H_0 = B_0$ とすると噴出孔断面が跳水始点となる跳水の対応水深関係を与える。

式 (42) より水深変化量 $(H - H_0)/B_0$ および水面の勾配に相当する $(H - H_0)/H$ を計算した結果と測定結果とを比較したのが図-20, 21 である。両図における $H/B_0 \sim U_0/\sqrt{gB_0}$ の線は噴出孔断面が跳水始点となる下流水深と噴出流速との関係を与えるものである。したがって、この線より右側の領域では噴出孔下流に射流流れがみられ、右側ではもぐり跳水および壁面噴流流れがみられる。

流速分布の測定から求めた最大流速の変化および境界層の発達を壁面噴流の実験結果および計算値と比較したのが図-22, 23 である。図の実線が壁面噴流の結果で、記号付縦線が壁面噴流の適用限界とみられる点で、この点の x/B_0 はほぼ H/B_0 の2倍となっている。 $x/H=2$ なる点は図-19の水面形状でみると水面が逆勾配になる点とほぼ一致している。 $dp/dx > 0$ となると境界層のはく離が生じやすくなり、実際に壁面に色素を流すと $x/H \approx 2 \sim 2.5$ で流れのはく離が観測された。以上を総合的に判断して $x/H < 2$ が壁面噴流の適用限界であると考えられる。

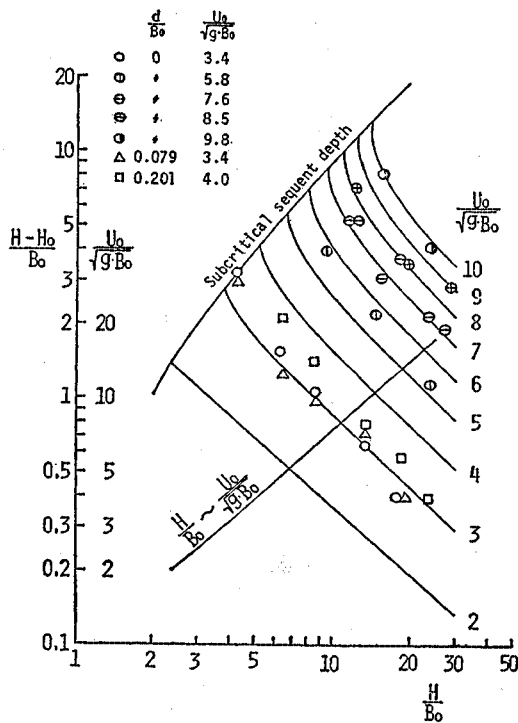


図-20 $(H-H_0)/B_0 \sim H/B_0$ の関係

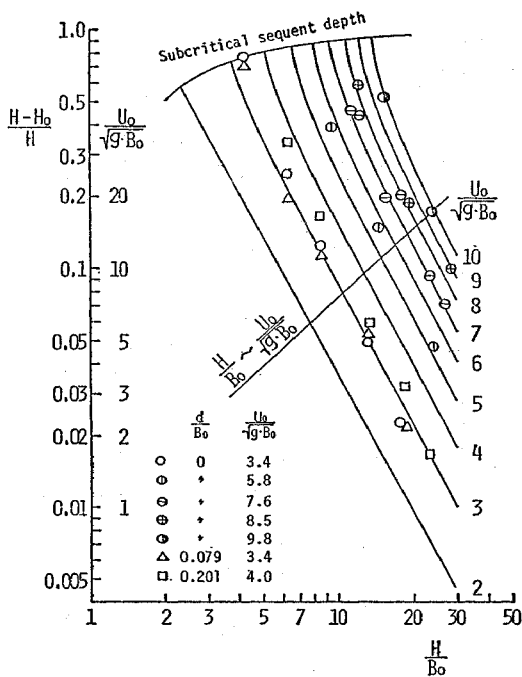


図-21 $(H-H_0)/B_0 \sim H/B_0$ の関係

7. 結 語

滑・粗壁面に沿って拡散する壁面噴流に関する実験を

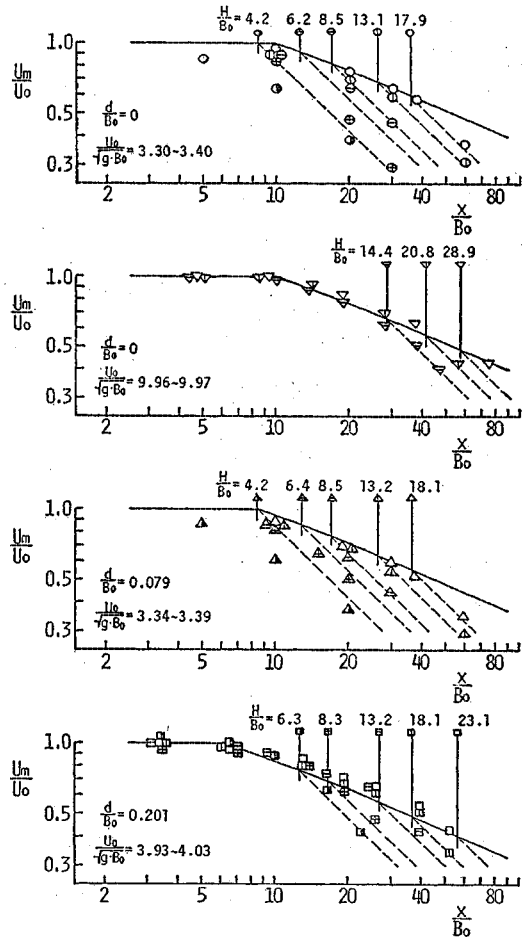


図-22 下流水深の影響がある場合の最大流速の通減

行い。境界層速度分布に関して主流部の乱れを考慮に入れて若干の理論的考察を行った結果を要約すると次のとおりである。

主流部流れと境界層流れとの割合 δ_B/δ_0 および境界層速度分布が流下距離によって漸的に変化して、壁面噴流流れ全体に対して速度分布の相似則を適用することには無理がある。

主流部流れの拡散特性 ($U_m/U_0, \delta_0/B_0$ の変化) は自由噴流と同様で、Görtler の解を δ_0 で書き換えた式 (3) で速度分布を表わすことができ、自由噴流のほぼ 1/2 弱の値であるが断面内で混合距離が一定値の流れとみなされる。また、乱れの確立領域における最大流速の通減は乱れの確立領域における境界層の発達を考慮した式 (9) によって説明でき、 δ_0/B_0 に関する実験式 (4) と、より乱れの確立領域においては運動量の保存則を適用することができる。

境界層の速度分布および壁面抵抗則として通常用いられている指数および対数型の速度分布則が適用できない

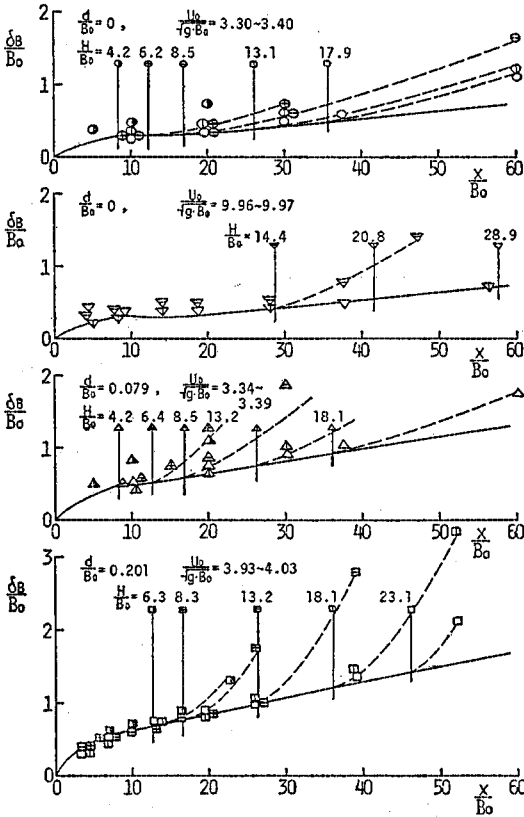


図-23 下流水深の影響がある場合の境界層の発達

ことを境界層の発達に関する検討によって明らかにした。

境界層を、流体粘性のみが考えられる粘性底層、粗度に起因する乱れの場合である乱流底層および主流部の乱れの拡散を考慮した内層に分けて、Prandtl-Kármán の対数分布則が一つの特別な場合として表わされる速度分布則 (式 (30), (39), (40)) を導いた。

実験的に求めた主流部の特性を用い、提案した速度分布則でもって計算した境界層の発達および壁面抵抗係数は実験結果とよく一致し、測定の誤差を考慮すれば速度分布の測定値も計算結果と一致したとみられ、式の誘導においてなされた仮定にあまり大きな誤りはないものとの確信が得られた。

最後に、壁面粗度、噴出流速および下流水深を系統的に変えた実験によって、上述の実験および理論の結果が成立するのは流下距離が下流水深のほぼ2倍までの範囲であることを明らかにした。

以上の実験的、理論的結果は水門などの下流部におけ

る洗掘限界、局所洗掘あるいは乱れた流れ壁面による境界層の発達などの問題に対する基礎的資料となりうるものと考えている。

謝 辞：本研究の遂行にあたり、終始適切なるご指摘を賜った九州大学 椿東一郎教授に深く感謝するとともに、実験ならびに計算に多大なる協力をいただいた亀田芳満、林健二郎、深光良治、山本規夫、尾儀一郎の諸氏に謝意を表す。

参考文献

- 1) Förthman, E. : Turbulent jet expansion, N.A.C.A., TM-789, 1936.
- 2) Glaurt, M.B. : The wall-jet, Jour. Fluid Mech., Vol. 1, Part 6, 1956.
- 3) Bakke, P. : An experimental investigation of a wall-jet, Jour. Fluid Mech., Vol. 2, Part 5, 1957.
- 4) Schwarz, W.H. and W.P. Cosart : The Two-dimensional wall-jet, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, Part 4, 1961.
- 5) 土屋義人：水門下流部における洗掘限界に関する研究，土木学会論文報告集，第82号，1962.
- 6) Sigalla, A. : Measurement of skin friction in a plane turbulent wall jet, Jour. Ray. Aero. Soc., Vol. 62, 1958.
- 7) Kapaeva, A.K. : Hydraulic jump over a smooth or rough bottom regard as a wall jet, Trans, Hydrolic Eng., Vol. 92, 1970.
- 8) Rajaratnam, N. : Hydraulic jump, Advances in hydro-science, Vol. 4, 1967.
- 9) Eskinazi, S. and V. Kruka : Mixing of turbulent wall-jet in to free-stream, Proc. A.S.C.E., Vol. 88, EM 2, 1962.
- 10) Kruka, V. and S. Eskinazi : The wall-jet in a moving stream, Jour. Fluid Mech., Vol. 20, Part 4, 1964.
- 11) Tollmien, W. : Berechnung turbulenter Ausbreitung vorgänge, Z.A.M.M., Helt 6, 1926.
- 12) Görtler, H. : Berechnung Von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes, Z.A.M.M., Heft 22, 1942.
- 13) Schlichting, H. : Boundary layer theory, McGraw-Hill.
- 14) Hinze, J.O. : Turbulence, McGraw-Hill.
- 15) Townsend, A.A. : The structure of the turbulent boundary layer, Pro. Cambridge Phil. Soc., Vol. 47, 1951.
- 16) 栗原道徳：流体渦動状態の研究 (Ⅲ)，九州大学流体工学研究所報告，第2巻，第3号，1943.
- 17) 栗原道徳：流体渦動状態の研究 (Ⅳ)，九州大学流体工学研究所報告，Vol. III, No. 3, 1947.
- 18) 栗原道徳：流体渦動状態の研究 (Ⅴ)，九州大学流体工学研究所報告，Vol. IV, No. 2, 1947.
- 19) 栗原道徳：粗滑遷移領域における管路の抵抗則に就いて (Ⅰ)，九州大学工学研究所報告，Vol. VII, No. 4, 1951.
- 20) 栗原道徳：粗滑遷移領域における管路の抵抗則に就いて (Ⅱ)，九州大学工学研究所報告，Vol. VII, No. 4, 1951.

(1976.7.6・受付)