

## 有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SATURATED-  
UNSATURATED SEEPAGE IN SOIL

赤井 浩一\*・大西 有三\*\*・西 垣 誠\*\*\*

By Koichi AKAI, Yuzo OHNISHI and Makoto NISHIGAKI

## 1. ま え が き

従来より地下水の挙動を定量的に評価するために、有限要素法、差分法などの数値解析が電子計算機の進歩とともに有力な手段として用いられている。それらの手法の中で、有限要素法は差分法と比較して浸透領域内の不均質性や異方性の導入が容易であり、また、浸透領域の任意の境界および水頭が急激に変化する領域に対応できるように要素の形状と大きさを場所によって任意に変えることができるなどの利点がある。これらの利点により、有限要素法による多くの浸透解析の研究報告<sup>1)~4)</sup>がなされている。

しかし、従来の有限要素法による浸透解析の大部分は飽和領域内の地下水の挙動だけを対象とした解析であるために、自由水面より上部の不飽和領域（毛管水帯、懸垂水帯）は考慮されていない。地下水が移動する際には、不飽和領域の保水状態および不飽和透水係数は飽和領域の透水係数や貯留係数と同様に重要な役割りを果たす。特に境界面の水位上昇に起因する浸透解析や降雨の浸透解析を行うときには、飽和領域のみの地下水の挙動を対象としていては解析が不十分である。

不飽和領域内の浸透解析として、1次元の鉛直あるいは水平浸透の問題については Youngs<sup>5)</sup>、Philip<sup>6)</sup>の研究があり、2次元、3次元問題の差分法による浸透解析として Rubin<sup>7)</sup>、Freeze<sup>8)</sup>の研究が知られている。一方、有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析としては、わずかに Neuman の研究<sup>9),10)</sup>などがみられる程度である。

従来の有限要素法による不圧滞水層中の地下水の浸透解析では、自由水面の位置を決定するために多くの努力

が注がれ、種々の手法が提案されてきた。現在では、おもに自由水面上の節点をあらかじめ決められた線に沿って移動させ、得られた新しい領域において再び計算を行うという手法が採用されている<sup>2),3)</sup>。

しかし、本論文の飽和-不飽和領域内の浸透解析では、全水頭を圧力水頭と位置水頭の和と仮定し、飽和領域では圧力水頭が正、不飽和領域では圧力水頭が負であると仮定すると、自由水面は圧力水頭が零の点を連ねた面であるといえる。すなわち、この面は飽和領域と不飽和領域の境界面である。この手法を用いると、従来の手法のように自由水面上の節点を各時間段階ごとに移動させるなどの手間が省略され、計算が非常に簡単になる。

アースダムの上流側水位上昇に起因するダム内部の地下水の挙動の問題、河川堤防の外水位上昇による堤防内部の地下水の挙動の問題、および地盤内の地下水位回復のための注水による地下水位上昇挙動などの問題の解析は、従来の手法<sup>1)~3)</sup>では困難であると考えられていたが、ここに述べる方法を利用することにより、それらの問題を解明する端緒を得ることができると思われる。

## 2. 飽和-不飽和浸透流の支配方程式

飽和-不飽和状態の土中を運動する水に対する連続の式は、質量保存則より導かれた Richards<sup>11)</sup> の方程式を用いると、

$$-\operatorname{div} \rho \vec{v} = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \theta) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\rho$ ：水の密度、 $\vec{v}$ ：流速、 $\theta$ ：土の単位体積に含まれる水の体積で定義される体積含水率。

一方、土中の水の運動を規定する運動方程式としては、透水係数  $K$  が体積含水率  $\theta$  もしくは毛管ポテンシャル  $\psi$  の関数と仮定した上で「輸送現象」の場合と同様な考えより導かれた Darcy と Buckingham の方程式<sup>12)</sup>より

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学科

\*\* 正会員 Ph.D. 京都大学助教授 工学部交通土木工学科

\*\*\* 正会員 工修 岡山大学助手 工学部 土木工学科

$$\vec{v} = -K(\theta)\vec{\nabla}h \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $K(\theta)$  は 2 次の透水係数テンソル、 $h$  は全水頭で、

$$h = \psi + x_3 \quad \dots\dots\dots(3)$$

すなわち、圧力水頭  $\psi$  (不飽和状態では毛管ポテンシャル) と位置水頭  $x_3$  の和で定義される。

式 (1), (2), (3) より

$$\text{div } \rho K(\theta)\vec{\nabla}h = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta) \quad \dots\dots\dots(4)$$

が導かれるが、この式 (4) が飽和不飽和領域の浸透流の支配方程式である。式 (4) において水の密度  $\rho$  が空間、時間に対して不変であると仮定すれば次式を得る。

$$\text{div } K(\theta)\vec{\nabla}h = \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(5)$$

式 (5) は Richards のポテンシャル方程式である。

式 (5) を  $\theta$  のみの方程式に直し、これを直交座標系に書き換え、テンソル表示すると次式となる。

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x_j} + K_{is}(\theta) \right] \quad (i, j=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots(6)$$

この式 (6) は Klute<sup>13)</sup> によって誘導された拡散方程式であり、ここで、

$$D(\theta) = K_{ij}(\theta) \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots(7)$$

すなわち、 $D(\theta)$  は水分拡散係数である。式 (7) の中の  $\partial\psi/\partial\theta$  は Fig. 1 に示す水分保持曲線の体積含水率  $\theta$  の増分に対する圧力水頭  $\psi$  の変化を示している。Fig. 1 より明らかなように、飽和状態 ( $S_w=1$ ) の  $\theta$  は間隙率  $n$  と等しくなり、もはや変化しない。すなわち、 $\partial\psi/\partial\theta$  の値は無限大となり、Klute の拡散方程式は飽和領域の浸透流の支配方程式として用いられなくなる。したがっ

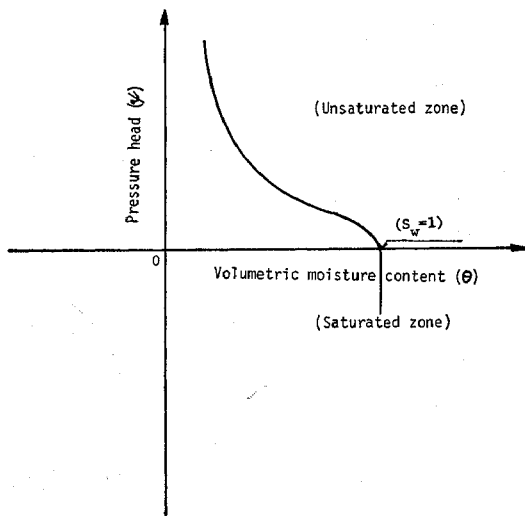


Fig. 1 Variations in the moisture content

て、このような手法では、飽和領域内の水の運動と、不飽和領域内の水の運動とは、厳密な意味で異なるものとしなければならない。また、この手法では、浸透が進むにつれて飽和領域が拡大していく浸潤の問題を取り扱うには非常に不便である。式 (6) は従来多くの浸透解析<sup>6), 14)~18)</sup> に用いられてきたが、上記の不便さのため不飽和領域のみを対象とした解析に終わっている。

一方、体積含水率  $\theta$  は土の間隙率  $n$  と飽和度  $S_w$  ( $0 \leq S_w \leq 1$ ) の積であり、

$$\theta = nS_w \quad \dots\dots\dots(8)$$

で表わされる。式 (4) と式 (8) から、圧力水頭  $\psi$  がただ一つの独立変数になる方程式に変換すると、

$$\begin{aligned} \text{div } \rho K(\psi)\vec{\nabla}(\psi + x_3) &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho n S_w) \\ &= \frac{d}{d\psi}(\rho n S_w) \frac{\partial\psi}{\partial t} \\ &= \left[ n S_w \frac{d\rho}{d\psi} + \rho S_w \frac{dn}{d\psi} + \rho n \frac{dS_w}{d\psi} \right] \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

ここで、式 (9) の右辺第 1 項および第 2 項は非常に重要なある可能性を示している。すなわち、これらの項は従来の浸透解析で無視されてきた土の変形との関係を表わす式である。圧力水頭による水の圧縮性を考慮するときには第 1 項が必要となる。また、圧密などにより土の間隙比あるいは間隙率が変化するときには、第 2 項を考慮することにより Biot の方程式<sup>19)</sup> などで表現される土の変形と水の流れの相互作用の問題を解くことができる。本論文では、土の応力-変形関係は取り扱っていないので以下浸透流についてのみ議論を進める。

式 (9) において圧力水頭変化による水の圧縮を無視し、不飽和領域においては圧力水頭変化による間隙率の変化が生じないものと仮定すると、式 (9) は次に示す浸透の支配方程式となる。

$$\text{div } K(\psi)\vec{\nabla}(\psi + x_3) = (c(\psi) + \alpha S_s) \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここに、

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{不飽和領域} \\ 1 & \text{飽和領域} \end{cases}$$

また、 $S_s = dn/d\psi$  は比貯留係数、 $c(\psi) = d\theta/d\psi$  は比水分容量である。 $c(\psi)$  は圧力水頭の変化に対する体積含水率の変化の割合を表わす。したがって、Fig. 1 に示すように、浸透が進行して飽和になると  $c(\psi) = 0$  となり、明らかに式 (10) は飽和領域内の浸透の支配方程式となる。すなわち、式 (10) は飽和-不飽和領域の浸透流を支配する方程式と考えてよく、式 (6) の Klute の拡散方程式と比較すると、式 (10) はより有効な式であることがわかる。

式 (10) を解くための初期条件および境界条件は次の

ように定める。

(a) 初期条件

$$\psi(x_i, 0) = \psi_0(x_i) \dots\dots\dots(11)$$

(b) 境界条件

① 水頭が既知の境界

$$\psi(x_i, t) = \psi_b(x_i, t) \dots\dots\dots(12)$$

② 流量が既知の境界

$$\left( K_{ij}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + K_{i3} \right) n_i = -V(x_i, t) \dots\dots(13)$$

ここに、 $n_i$  は境界面からの垂直ベクトルである。

式 (10) の解を式 (11), (12), (13) の初期条件および境界条件より求める手法として次に述べる有限要素法を採用する。

### 3. 有限要素法による定式化

有限要素法の中で、対象としている問題の定式化に最も広く取り入れられている手法は、問題を支配する微分方程式と等価な汎関数を求め、それを最小にすることにより近似解を求める変分法である。一方、重みつき残差法<sup>20), 21)</sup>は、問題を支配する方程式から直接に有限要素近似を数学的に導くことが可能であり、また、汎関数の存在しない問題や汎関数の見つかっていない問題にまで拡張できるなどの利点があるため、以下、本論文では重みつき残差法を用いる。

ここで対象としている問題は、式 (10) の中に 1 次の時間微分項をもつ準調和方程式であり、 $K_{ij}(\psi)$ ,  $c(\psi)$  が未知圧力水頭  $\psi$  に依存するための非線形問題でもある。そこで、ある特定の時間における状態を考えれば、 $\psi$  の時間微分項およびすべてのパラメーターは空間座標に関して既知の関数として取り扱うことができる。

式 (10) を再びベクトル表示すると、

$$\vec{r} \cdot A \vec{r} h - B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(14)$$

ここに、

$$\begin{aligned} A &= K(\psi) \\ B &= c(\psi) + \alpha S_s \\ h &= \psi + x_3 \end{aligned}$$

また、初期条件および境界条件は、

(a) 初期条件

$$h(x_i, 0) = H_0(x_i)$$

(b) 境界条件

① 水頭が既知の境界

$$h(x_i, t) = H_b(x_i, t) \dots\dots\dots(15)$$

② 流量が既知の境界

$$\frac{\partial h}{\partial n} = V(x_i, t)$$

ただし、 $\vec{n}$  は境界面に垂直なベクトルである。

#### (1) 重みつき残差法による定式化

与えられた境界条件を満足する試験関数 (trial function) を、次のように一般的な表示とする。

$$h(x_i, t) = N_n(x_i) h_n(t) \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots(16)$$

$N_n(x_i)$  は、座標によって定まる関数であり、 $h_n(t)$  は時間だけによる未知パラメーターである。

式 (16) を式 (14) に代入すると、式 (16) は式 (15) を厳密には満足しないから、

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot A \vec{r} (N_n(x_i) h_n(t)) - B \frac{\partial}{\partial t} (N_n(x_i) h_n(t)) &= R \\ \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

すなわち、ある残差 (residual)  $R$  を生じる。最良の近似解は、この  $R$  を領域  $V$  のすべての点において最小にするものである。したがって、最良の近似解を求めるには、 $R$  が領域内のどこにおいても恒等的に零になるようにすればよい。

式 (15) に重み関数  $w(x_i)$  をかけて領域全体について積分をすると、

$$\begin{aligned} \int_V w(x_i) R dV &= \int_V w(x_i) \left[ \vec{r} \cdot A \vec{r} \{ N_n(x_i) h_n(t) \} \right. \\ &\quad \left. - B \frac{\partial}{\partial t} \{ N_n(x_i) h_n(t) \} \right] dV = 0 \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

と表わすことができる。

未知のパラメーター  $h$  の数が  $n$  個あれば、 $n$  個の 1 次独立な重み関数  $w_K(x_i)$  を用いると、式 (18) は  $n$  個の連立方程式となり、 $h$  の値が求められる。ここに、 $w_K(x_i)$  は座標値の関数であり、この重み関数の選び方として、選点法 (point collocation), Subdomain collocation, Galerkin 法などがある。

ここでは最も一般的な Galerkin 法を用いると、

$$w_K(x_i) = N_K(x_i) \dots\dots\dots(19)$$

すなわち、重み関数  $w_K(x_i)$  を  $h$  の近似解を定める形状関数  $N_K(x_i)$  に等しくおく方法である。

式 (18) と式 (19) より

$$\int_V N_n \left[ \vec{r} \cdot A \vec{r} N_m h_m - B \frac{\partial N_m h_m}{\partial t} \right] dV = 0 \dots\dots(20)$$

式 (20) に Green-Gauss の定理<sup>22)</sup>を用いると、

$$\begin{aligned} \int_V A \vec{r} N_n \cdot \vec{r} N_m h_m dV - \int_S A N_n \vec{r} N_m h_m \cdot \vec{n} d\sigma \\ + \int_V B N_n \frac{\partial N_m h_m}{\partial t} dV = 0 \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

浸透領域全体を最も簡単に有効な三角形要素 ( $V_n^e$ ) に分割すると、各要素内において式 (20) が成立し、

$$\begin{aligned} V_n^e (h_m N_m^e) &= \int_{V_n^e} N_n^e \left[ \vec{r} \cdot A \vec{r} N_m^e h_m \right. \\ &\quad \left. - B \frac{\partial N_m^e h_m}{\partial t} \right] dV \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

したがって、浸透領域全体については、

$$\sum_{i=1}^N \left[ \int_{V_i} A_i \vec{\nabla} N_n \cdot \vec{\nabla} N_m h_m dV + \int_{V_i} B_i N_n \frac{\partial N_m h_m}{\partial t} dV - \oint_{S_i} A_i N_n \vec{\nabla} N_m h_m \cdot \vec{n} d\sigma \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

と表わされる。

ここで、透水係数  $K_{ij}(\psi)$  を

$$K_{ij}(\psi) = K_{ij}^s \cdot K_r(\psi) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$K_{ij}^s$ ：飽和状態の透水係数， $K_r(\psi)$ ：圧力水頭または体積含水率の関数 ( $0 \leq K_r \leq 1$ ) と定義する。すなわち、飽和状態では  $K_r = 1$  である。

各要素内で飽和の透水係数  $K_{ij}^s$  および比貯留係数  $S_s$  は一定と仮定し、 $K_r(\psi)$ 、 $c(\psi)$  の値は三角形要素の各節点の値の平均を用いる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} K_r &= K_l^r N_l^e \\ c &= c_l N_l^e \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで  $l$  は Fig. 2 の三角形要素の各節点番号を示す。

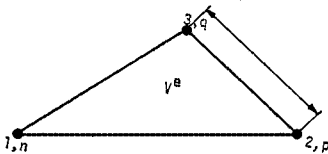


Fig. 2 Single triangular element

式 (23) を直角座標系に書き換え、テンソル表示すると、

$$A_{nm} \psi_m + F_{nm} \frac{d\psi_m}{dt} = Q_n - B_n - D_n \quad (n, m=1, 2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに、

$$A_{nm} = \sum_{e=1}^N K_l^r K_{ij}^s \int_{V_e} N_l^e \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial N_m^e}{\partial x_j} dV = \sum_e \frac{1}{4} \bar{K}_r [K_{11}^s b_n b_m + K_{13}^s (b_n c_m + b_m c_n) + K_{33}^s c_n c_m] \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$F_{nm} = \sum_{e=1}^N \int_{V_e} (c_l N_l^e N_n^e + N_n^e \alpha S_s) dV = \sum_e \frac{d}{12} [(2c_n + c_p + c_q) + 4\alpha S_s] : (n=m) \quad \left. \begin{aligned} = 0 & & : (n \neq m) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$Q_n = - \sum_{e=1}^N \oint_{S_e} V N_n^e d\sigma = - \sum_e \frac{(LV)_n}{2} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$B_n = \sum_{e=1}^N K_l^r K_{i3}^s \int_{V_e} N_l^e \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i} dV \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$D_n = \sum_{e=1}^N \int_{V_e} S N_n^e dV \quad \dots\dots\dots (31)$$

式 (27) の  $b_n, c_n$  は座標により定まる値である。式 (28) の  $n, p, q$  は Fig. 2 に示す三角形要素の各節点番号であり、 $d$  は三角形の要素の面積を表わす。式 (27) の  $\bar{K}_r$  は

$$\bar{K}_r = (K_n^r + K_p^r + K_q^r) / 3 \quad \dots\dots\dots (32)$$

であって、 $K_r$  の平均値を示している。

式 (26) および式 (31) の  $D_n$  は領域内の吸水および湧水流量を表わす。この項は式 (10)、(23) では式の簡略化のために取り扱っていなかったが、ここに付記することにより解析で考慮できるようにする。

(2) 時間項の取り扱い

式 (26) はある特定の時間状態に対して式 (10) を有限要素法により定式化したものである。したがって、時間項を取り扱う場合には、問題を適当な漸化式に書き下し、逐次計算を行うと、全時間にわたる解が得られる。漸化式として差分法を直接用いる方法と、Galerkin の重みつき残差法を各時間区間に対して用いるなどの方法があるが、本論文では時間項の取り扱いが明確な差分法を用いる。差分法による漸化式としては、前進差分、後退差分、中央差分があるが、これらの中で中央差分は良い結果が得られるため、ここでは主に中央差分を採用し、状況に応じて後退差分を用いる。

中央差分による式 (26) の漸化式は、

$$\begin{aligned} & \left( A_{nm}^{K+1/2} + \frac{2}{\Delta t^K} F_{nm}^{K+1/2} \right) \psi_m^{K+1} \\ & = 2 Q_n^{K+1/2} - 2 B_n^{K+1/2} - 2 D_n^{K+1/2} \\ & - \left( A_{nm}^{K+1/2} - \frac{2}{\Delta t^K} F_{nm}^{K+1/2} \right) \psi_m^K \quad (n, m=1, 2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

ここに、 $K$  はある時間段階を表わし、 $t = t^K$ 、 $\Delta t^K = t^{K+1} - t^K$  であり、各時間区間において

$$\psi_n^{K+1/2} = \psi_n^K + \frac{\Delta t^K}{2 \Delta t^{K-1}} (\psi_n^K - \psi_n^{K-1}) \quad \dots\dots\dots (34)$$

式 (33) より逐次計算の解  $\psi_n^{K+1}$  を Gauss の消去法<sup>20)</sup> を用いて求めることができる。

対象としている問題は非線形問題であるため、解の精度を良くする目的で反復計算過程を用いるが、各過程においては、

$$\psi_n^{K+1/2} = \frac{1}{2} (\psi_n^K + \psi_n^{K+1}) \quad \dots\dots\dots (35)$$

とする。

4. 水分保持曲線のヒステリシス

2. において飽和-不飽和領域の浸透流の支配方程式を示し、さらに式 (33) により有限要素法による定式化を示した。

式 (33) を解くときに必要な入力は、

- (1) 飽和状態における透水係数  $K_{ij}^s$  と貯留係数  $S_s$
- (2) 構成材料の間隙率  $n$
- (3) 不飽和状態の透水係数と体積含水率  $\theta$  の関係

- (4) 不飽和状態のサクシオン（負の圧力水頭） $\psi$ と体積含水率 $\theta$ の関係
- (5) 浸透領域の初期圧力水頭 $\psi_0$ 。または初期体積含水率 $\theta_0$ の値

である。しかし、一般に $\psi$ と $\theta$ の関係は一義的に定まらず、浸透（吸水）か排水（脱水）かという過程の違いや、土の初期保水状態により著しく影響される。実験によると、Fig. 3に示すように、 $\psi$ は浸透過程と排水過程とは同一のルートを通らないいわゆるヒステリシスループを描く。水分保持曲線がヒステリシスループを描く原因の定性的な説明として次のことが考えられる<sup>23)</sup>。

- (1) 土の間隙が小さく、かつ断面の急激な変化があるために生じる、いわゆる「インクビン効果」。

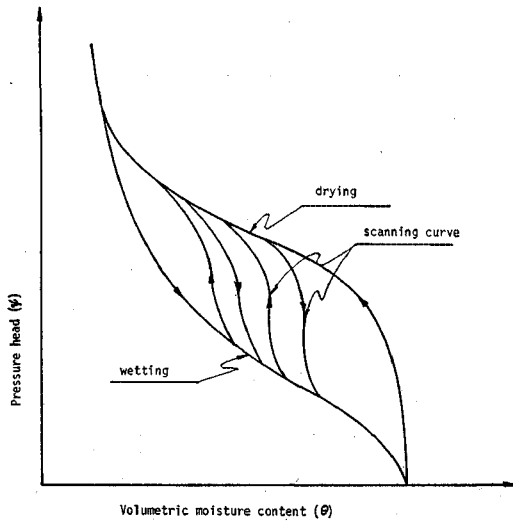


Fig. 3 Hysteresis between volumetric moisture content and pressure head

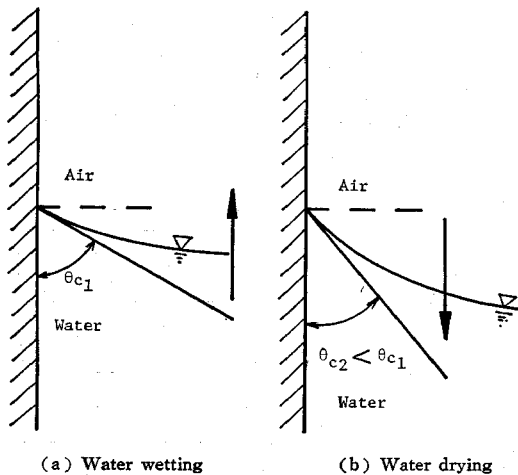


Fig. 4 Contact angle between a water-air interface and a solid

- (2) 間隙を水が前進するときと、後退するときでは接触角の違いが生じる。このため前進のメニスカスの方が曲率半径が大きくなり、同じ体積含水率で比較すると、排水過程より浸透過程の方が吸引力が弱くなる (Fig. 4 参照)。

- (3) 浸透過程における間隙空気 の封入。

これらの要因のほかに土粒子と水の吸着力などの力学的要素も考えられる。

Fig. 3の水分保持曲線の主ループは、完全飽和の状態から排水過程への移行と乾燥状態から浸透過程への移行とによる体積含水率の変化およびサクシオンの変化を測定することにより求められる。しかし、もし、浸透あるいは排水過程の途中からその過程を逆に移行するとFig. 3に示すように主ヒステリシス曲線から分離して別のヒステリシス曲線、いわゆる走査曲線 (scanning curve) が現れる。すなわち、初期体積含水率の違いと、浸透および排水の過程の相違によりそれぞれ別の走査曲線が存在する。このような現象に対してヒステリシスの影響を考慮した不飽和浸透解析<sup>24)~26)</sup>があるが、それらは実験により求めた走査曲線の値を直接解析に用いているため、浸透領域内のすべての点の初期体積含水率に対して走査曲線を求める必要がある。したがって、このような手法では実際問題を解析するには非常に不便である。

一方、この不便さを解消するため、主ヒステリシス曲線から走査曲線を推測する研究がなされ、いくつかの手法<sup>27)~31)</sup>が提案されている。それらの研究の中で、Mualem<sup>31)</sup>は非常に簡単なモデルを用いて実験値とよく一致する走査曲線を推測する方法を提唱している。したがって本論文では、Mualemの手法を用いて領域内のすべての点に対する走査曲線を推測し、それらの曲線から比水分容量 $c(\psi)$ を計算する方法をとる。この手法では、不飽和状態のサクシオン $\psi$ と体積含水率 $\theta$ の関係の主ヒステリシス曲線のみを入力データとするだけで、走査曲線が推測できる。したがって、従来のように浸透領域内のすべての走査曲線を入力する必要がなく、実際の問題を解くには非常に有利な手法となる。

Mualemの方法では、走査曲線は次に示す式より求める。

- (1) 初期排水過程の走査曲線

$$\theta \left( \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_{\min} \end{matrix} \right) = \theta_w(\psi) + \frac{[\theta_w(\psi_1) - \theta_w(\psi)]}{[\theta_u - \theta_w(\psi)]} [\theta_d(\psi) - \theta_w(\psi)] \dots \dots (36)$$

- (2) 初期浸透過程の走査曲線

$$\theta \left( \begin{matrix} \psi_{\max} \\ \psi_1 \end{matrix} \right) = \theta_w(\psi) + \frac{[\theta_u - \theta_w(\psi)]}{[\theta_u - \theta_w(\psi_1)]} [\theta_d(\psi) - \theta_w(\psi_1)] \dots \dots (37)$$

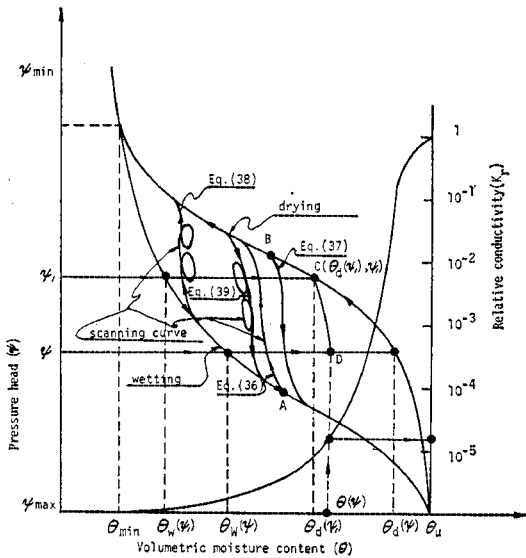


Fig. 5 Hysteresis in the volumetric moisture content-pressure head

(3) 初期浸透後、排水と浸透を繰り返す走査曲線

$$\theta \begin{pmatrix} \psi_1 \dots \psi \\ \psi_{\min} \psi_2 \dots \psi_N \end{pmatrix} = \theta_w(\psi) + [\theta_w(\psi_{N-1}) - \theta_w(\psi)] \frac{[\theta_d(\psi_N) - \theta_w(\psi_N)]}{[\theta_u - \theta_w(\psi_N)]} + \sum_{j=1}^{(N/2)-1} [\theta_w(\psi_{2j-1}) - \theta_w(\psi_{2j+1})] \cdot \frac{\theta_d(\psi_{2j}) - \theta_w(\psi_{2j})}{\theta_u - \theta_w(\psi_{2j})} \dots (38)$$

(3) 初期排水後、浸透と排水を繰り返す走査曲線

$$\theta \begin{pmatrix} \psi_1 \dots \psi_N \\ \psi_{\min} \psi_2 \dots \psi \end{pmatrix} = \theta_w(\psi) + [\theta_w(\psi_N) - \theta_w(\psi)] \frac{\theta_d(\psi) - \theta_w(\psi)}{\theta_u - \theta_w(\psi)} + \sum_{j=1}^{(N-1)/2} [\theta_w(\psi_{2j-1}) - \theta_w(\psi_{2j+1})] \cdot \frac{\theta_d(\psi_{2j}) - \theta_w(\psi_{2j})}{\theta_u - \theta_w(\psi_{2j})} \dots (39)$$

式 (36) は Fig. 5 に示すように、浸透過程の A 点の状態から排水過程に移ったときの走査曲線を求める式である。また、式 (37) は排水過程の B 点の状態から浸透過程へ移ったときの走査曲線を求める式である。式 (38)、(39) は排水-浸透および浸透-排水を繰り返すことによる走査曲線を求める式である。なお、式 (36)~(39) の中の  $\theta_w(\psi)$ 、 $\theta_d(\psi)$ 、 $\theta_u$  は Fig. 5 に示す値である。すなわち、初期排水過程を例にとりて説明すると、不飽和領域のある点のサクシオンを  $\psi_1$  とすると、主ヒステリシス曲線より  $\theta_w(\psi_1)$ 、 $\theta_d(\psi_1)$  の値は Fig. 5 に示すように定められる。浸透が進みサクシオン  $\psi_1$  が  $\psi$  になると、 $\theta_w(\psi)$ 、 $\theta_d(\psi)$  の値も Fig. 5 に示すように決定さ

れる。 $\theta_u$  の値は飽和状態の体積含水率であるから間隙率  $n$  に等しい。これらの値を式 (36) に代入すると、 $\theta(\psi)$  の値が求まる。

また、比水分容量  $c(\psi)$  は Fig. 5 の CD 曲線の勾配として表わされ、式 (38) の  $F_{nm}$  の  $c_l$  が求められる。

飽和状態の透水係数  $K_{ij}^s$  に対する不飽和状態の透水係数の比で定義される  $K_r(\psi)$  の値は、サクシオン  $\psi$  に対する  $\theta(\psi)$  が式 (36) より求められたことより、この  $\theta(\psi)$  と  $\theta-K_r$  曲線より Fig. 5 に示すように計算される。したがって式 (27) の  $A_{nm}$  の  $K_r'$  が定められる。

なお本論文では、体積含水率と不飽和透水係数にはヒステリシスが存在しないと指摘した実験結果<sup>29),30),31)</sup> から、 $\theta-K_r$  のヒステリシスについては数値計算において 1 例しか考慮しなかった。

### 5. 飽和-不飽和浸透流の解析と実験との比較検討

前節までに述べた有限要素法による解の妥当性を検討するために、赤井・宇野<sup>32)</sup>が行ったモデル実験との比較計算を行った。

実験に用いられた水槽は、両端に水位調節用の排水管が取り付けられた長さ 400 cm、幅 25 cm、高さ 50 cm の前面ガラス張りのものである。試料は平均粒径約 1.5 mm の均等砂で、これを間隙率  $n=0.44$  にして水槽の中央部に詰め、長さ 315 cm、幅 23 cm、高さ 33 cm の砂模型が作成された。水槽の底面には 20 cm 間隔に水圧観測のための細孔をあけ、圧力計に連結している管が取り付けられている。浸透流による水圧変化は、この圧力計によって電圧変化に変換され、記録された。

いくつかの模型実験の中で、次の 5 つの場合について、その結果を有限要素法による解析結果と比較する。

- (1) 瞬時水位上昇による非定常浸透流の変化
  - (a) 透水性基盤で初期水位が基盤から 10 cm の位置にある場合
  - (b) 透水性基盤で初期水位が基盤上にある場合
  - (c) 不透水性基盤で水位がない場合

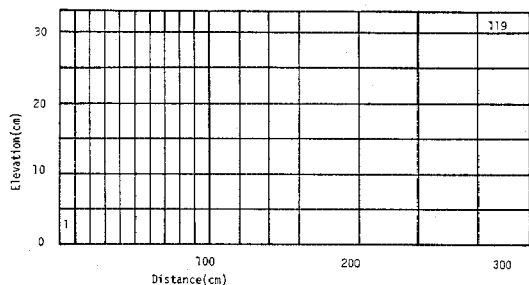


Fig. 6 Finite element network

- (2) 瞬時水位降下による非定常浸透流の変化
- (3) ヒステリシスを考慮した瞬時水位上昇による非定常浸透流の変化

この解析で用いた有限要素法の浸透領域の要素分割図を Fig. 6 に示す。解説の入力データは飽和状態の透水係数  $K_{ij}^s = 0.33 \text{ cm/sec}$  (浸透流の等方性を仮定)、間隙率  $n = 0.44$  である。体積含水率とサクシヨンの関係 ( $\theta$ - $\psi$  関係), および体積含水率と不飽和透水係数の関係 ( $\theta$ - $K_r$  関係) は本来ならば綿密な実験から求めるべきであるが, そのデータがないので, 砂模型の最大毛管上昇高が 8 cm でその点の体積含水率  $\theta = 0.085$  という結果と, 飽和領域においては  $\theta = 0.44$  という事より Fig. 7 に示すような水分保持曲線を仮定した。なお,  $\theta$ - $\psi$  関係におけるヒステリシス現象は, 上記の (1), (2) の問題の解析には考慮しなかった。

Fig. 8~10 に水位が瞬時に 20 m 上昇したときの上記の (a), (b), (c) の 3 つの場合の実験結果と解析結果を示す。図中の実線は解析結果で, 白丸破線は実測結果を示す。

Fig. 8~10 の異なった 3 条件下での実験結果と解析結果を比較検討すると, 解析結果は Fig. 7 の仮定にもかかわらず実験結果とよく一致する。特に, 実験結果では透水性基盤で初期水位がある場合 (Figs. 8, 9) と不透水性基盤で初期水位がない場合 (Fig. 10) とでは, 浸透の初期の形態は非常に異なる。すなわち, 初期水位がある場合には, 浸透流は上に凹形に進行して行くが, 初期水位がない場合には, 浸透流は上に凸形に進行する。このような浸透形態の相違に対して, 本解析ではそれぞれ異なった初期条件を入力データとするだけで, 実験結果と同形態の解析結果が得られた。

また, 浸透流の進行速度についても, 初期水位がある場合には, 初期水位がない場合より速い速度で浸透流が進行することがわかる。さらに, 初期水位が基盤から 10 cm の位置にある場合には, 初

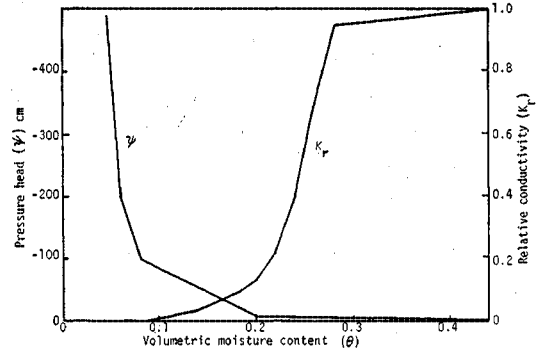


Fig. 7 Unsaturated property of soil

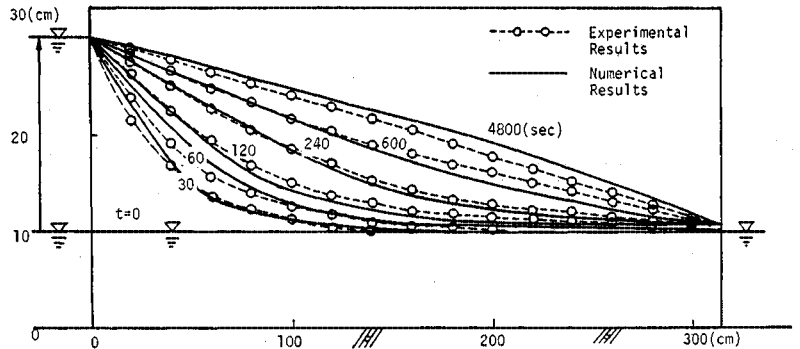


Fig. 8 Comparison of numerical and experimental results (for wetting)

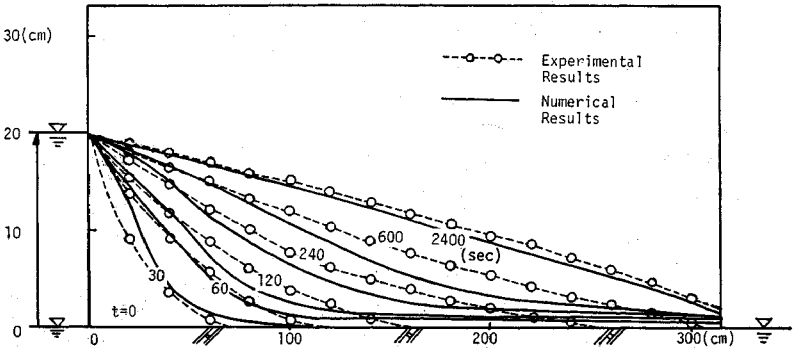


Fig. 9 Comparison of numerical and experimental results (for wetting)

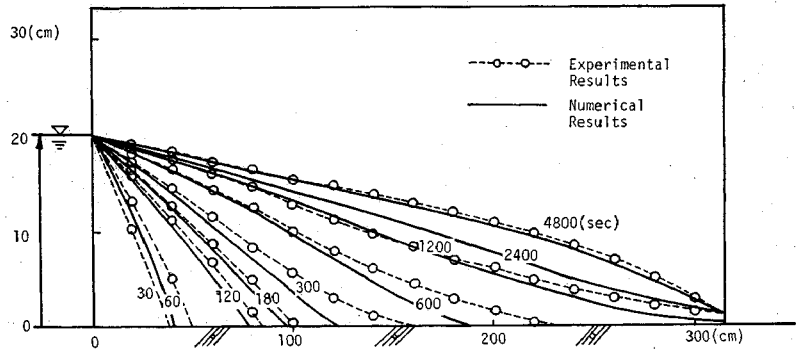


Fig. 10 Comparison of numerical and experimental results (for wetting)

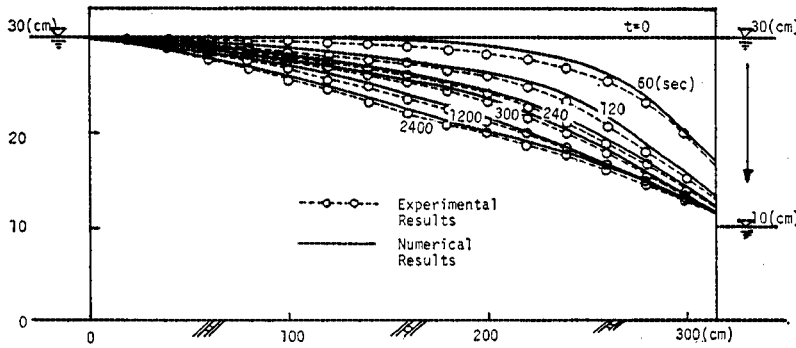


Fig. 11 (a) Comparison of numerical and experimental results (for drying)

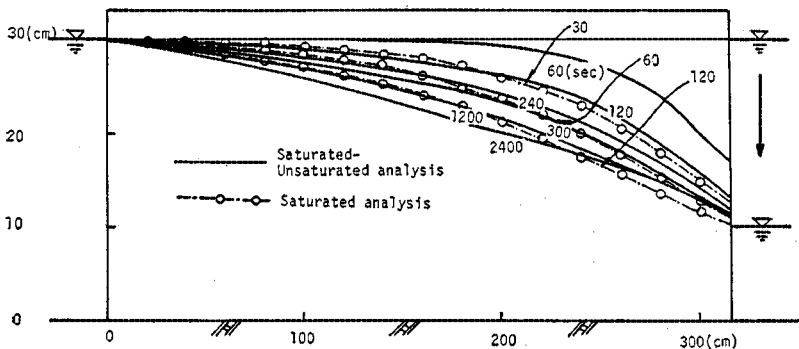


Fig. 11 (b) Comparison of the saturated-unsaturated analysis and saturated analysis (for drying)

期水位が基盤上にある場合よりも浸透流の進行速度が速いことも実験結果と解析結果は一致している。これらの比較の結果を考えあわせると、本論文の解析の妥当性は十分裏付けられたことになる。

Fig. 11 (a), Fig. 11 (b) は初期水位が基盤より 30 cm の位置にあった状態から、急激に一方の水位が 20 cm 降下したときの自由水面の変化を示したものである。Fig. 11 (a) は実験結果 (白丸破線) と、ここで述べた解析法による結果 (実線) との比較である。Fig. 11 (b) は従来の飽和領域のみを対象とした解法<sup>3), 4)</sup>による結果 (白丸一点鎖線) と不飽和領域を含めた解法による結果 (実線) との比較である。従来の解析法で用いた入力データは透水係数  $K=0.33$  cm/sec, 有効間隙率すなわち貯留係数  $\beta=0.092$  である。

Fig. 11 (a) より、今回の解析結果が水位低下の問題に対しても実測値とよく一致していることがわかる。一方、飽和領域のみを対象とした従来の解析法による結果では、Fig. 11 (b) より明らかなように、飽和-不飽和領域を対象

とした解析結果より自由水面の低下が速い。この原因として、前者の解析では有効間隙率  $\beta$  なる定数を解析に用いた結果によると考えられる。この定数は水位が低下することにより  $\beta$  なる排水が瞬間的に起こると仮定した値である。しかし、実際には飽和状態から排水が進行して不飽和状態になった後も毛管水流が生じて排水が進行する。この状態における浸透の抵抗係数が不飽和状態の透水係数である。毛管水流の運動は体積含水率が臨界値 (field capacity) に達するともはや生じなくなり、不飽和透水係数が零になったことを示す。飽和状態の体積含水率を  $\theta_u$  (間隙率  $n$  に等しい値) とし、臨界値の体積含水率を  $\theta_f$  (残留含水率) とすると、有効間隙率  $\beta$  は、  

$$\beta = \theta_u - \theta_f \dots\dots\dots (40)$$

と定義される。しかし、不飽和浸透を考慮すると、 $\theta_u$  から  $\theta_f$  の状態まで体積含水率が変化するには

かなりの時間を要する。

飽和領域のみを対象とした解析では、この現象を考慮することができなかった。したがって  $\theta_u$  から  $\theta_f$  までの移行を説明するために、遅延排水の効果<sup>33)</sup>を考慮した非常に複雑な浸透解析が提唱されている。しかし、本論文の飽和-不飽和浸透解析では、そのような遅延排水のモデルを考慮する必要もなく、土中水の挙動を統一的に取り扱える、より厳密な解析が可能であると考えられる。

最後に、Fig. 12 は Fig. 8 と同様な条件のもとで、Fig. 6 に対応する水分保持曲線に、Fig. 13 に示すヒステリシスを考慮した入力データを用いた解析例であ

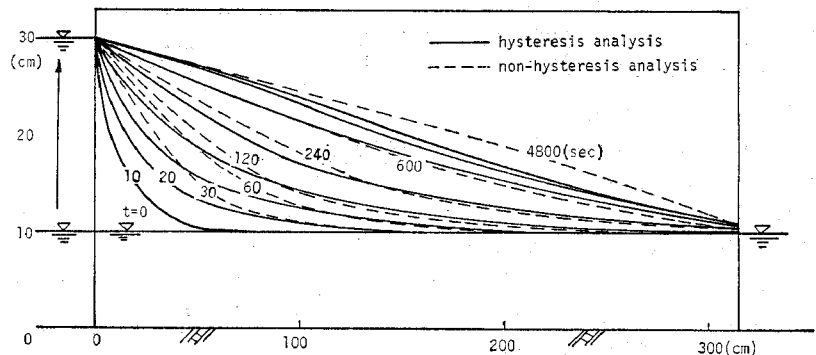


Fig. 12 The numerical results in considering hysteresis



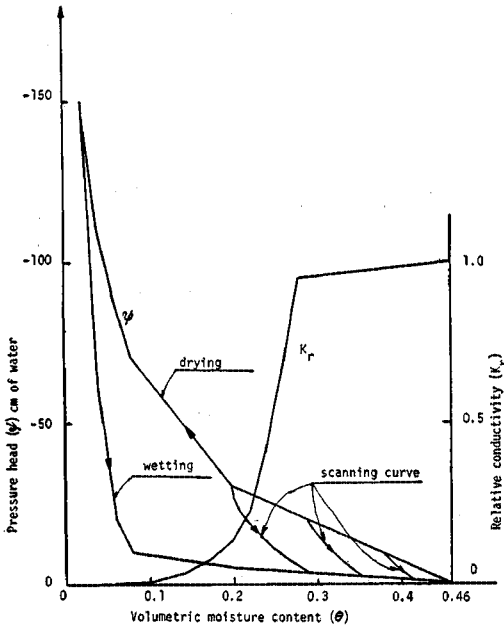


Fig. 13 Unsaturated property of soil (considering hysteresis)

る。Fig. 13 の走査曲線は Maulem の式 (36) にもとづいて計算した曲線である。すなわち、初期に排水過程にあった状態から浸透過程へ移ったときの走査曲線である。ヒステリシスを考慮した水分保持曲線のデータがないため、Fig. 13 のデータを用いて解析の一例を示したが、Maulem の方法を用いてヒステリシスを考慮した飽和-不飽和浸透流の有限要素法による解析が可能であることがわかる。

## 6. 結 論

本論文は飽和-不飽和浸透流の挙動について、有限要素法による非定常解析を示したものである。すなわち、その手法は従来の飽和領域のみを対象とした浸透解析法よりも簡単であり、土中の浸透流を統一的に取り扱う解析法について論じたものである。

この研究の特色および得られた結果を要約すれば以下のようになる。

(1) 飽和-不飽和領域における浸透流の支配方程式を示し、その方程式が従来の不飽和領域の浸透解析に用いられてきた Klute の拡散方程式より有効な式であることを論じた。

(2) 支配方程式の有限要素法による定式化に重みつき残差法を用い、関数と等価な汎関数を用いる変分法より容易に定式化が行えることを述べた。

(3) 不飽和領域の浸透解析で問題となる水分保持曲

線のヒステリシスに対しては、Maulem の走査曲線を求める式を用いることにより、ヒステリシスを考慮した有限要素法による浸透解析が可能であることを明らかにした。

(4) 飽和-不飽和領域の浸透流に対するこの解析の結果と模型実験の結果とを比較検討して、本解析法が地下水位上昇、降下の問題に対して非常に有効であることを示した。

(5) 最後に、従来の飽和領域のみを対象とした解析では考慮し得なかった残留含水率 (field capacity) についても、この解析では十分考慮できることを論じた。

なお、不飽和領域の水分保持特性である  $\theta$ - $\psi$  関係、 $\theta$ - $K_r$  関係を求めるための計測手法は、今後究明されなければならない問題点である。

## 参 考 文 献

- 1) Finn, W.D. : Finite Element Analysis of Seepage through Dams, Proc. ASCE, SM, Vol. 93, No. 6, pp. 41~48, 1967.
- 2) Taylor, G.S. et al. : Computer Methods for Transient Analysis of Water-table Aquifers, Water Reso. Res., 5(1), pp. 144~152, 1969.
- 3) Neuman, S.P., P.A. Witherspoon : Analysis of Non-steady Flow with a Free Surface using the Finite Element Method, Water Reso. Res., 6(5), pp. 889~897, 1970.
- 4) 赤井・大西・西垣 : 堅井、横井の揚水による地下水位低下に関する非定常解析, 第 10 回土質工学研究発表会, pp. 619~622, 1975.
- 5) Youngs, E.G. : Moisture Profiles during Vertical Infiltration, Soil Sci., 84, pp. 283~290, 1957.
- 6) Philip, J.R. : The Theory of Infiltration; 1, The Infiltration Equation and its Solution, Soil Sci., 83, pp. 345~357, 1957.
- 7) Rubin, J. : Theoretical Analysis of Two-dimensional Transient Flow of Water in Unsaturated Soils, Soil Sci. Am. Proc., 32, pp. 607~615, 1968.
- 8) Freeze, R.A. : Three-dimensional Transient Saturated-Unsaturated Flow in a Ground Water Basin, Water Reso. Res., 7 (2), pp. 347~363, 1971.
- 9) Neuman, S.P. : Saturated Unsaturated Seepage by Finite Elements, Proc., ASCE HY, Vol. 99, No. 12, pp. 2233~2250, 1973.
- 10) Neuman, S.P. : Galerkin Method of Analyzing Non-steady Flow in Saturated-Unsaturated Porous Media, Finite Element Method in Flow Problems, edited by C. Taylor, O.C. Zienkiewicz, R.H. Gallagher, John Wiley & Sons, Chap. 19, 1974.
- 11) Richards, L.A. : Capillary Conduction of Liquids through Porous Mediums, Physics, 1, pp. 318~333, 1931.
- 12) Swartzendruber, D. : The Flow of Water in Unsaturated Soils, Flow through Porous Media, edited by R.J.M. De Wiest, Academic Press, Chap. 6, pp. 217, 1969.
- 13) Klute, A. : A Numerical Method for Solving the Flow Equation for Water in Unsaturated Materials, Soil Sci., 73, pp. 105~106, 1952.
- 14) Childs, E.C. : The Non-steady State of the Water

- Table in Drained Land, *J. Geophys. Res.*, 65 (2), pp. 780~787, 1960.
- 15) Youngs, E.G. : The Drainage of Liquids from Porous Materials, *J. Geophys. Res.*, 65 (12), pp. 4024~4030, 1960.
  - 16) Ligon, J.T. *et al.* : Unsteady-state Drainage of Fluid from a Vertical Column of Porous Material, *J. Geophys. Res.*, 67, pp. 5199~5204, 1962.
  - 17) Fujioka *et al.* : Approximate Solution to a Vertical Drainage Problem, *J. Geophys. Res.*, 69(24), pp. 5349~5255, 1964.
  - 18) Philip, J.R. : On Solving the Unsaturated Flow Equation; 1, the Flux-concentration Relation, *Soil Sci.*, 116 (5), pp. 328~335, 1973.
  - 19) Biot, M.A. : General Theory of Three-dimensional Consolidation, *Journ. Appl. Phys.*, pp. 12~155, 1941.
  - 20) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, New York, 1971.
  - 21) Finlayson, B.A. : The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New York, 1972.
  - 22) Sokolnikoff, I.S. and R.M. Riedheffer : Mathematics of Physics and Modern Engineering, McGraw-Hill, New York, 1966.
  - 23) Bear, J. : Dynamics of Fluids in Porous Media, Elsevier, pp. 447~448, 1972.
  - 24) Whisler, F.D., Klute, A. : A Numerical Analysis of Infiltration, Considering Hysteresis, into a Vertical Soil Column at Equilibrium under Gravity, *Soil Sci. Soc. Proc.*, 29 (5), pp. 489~494, 1965.
  - 25) Ibrahim, H.A., Brutsaert, W. : Intermittent Infiltration into Soils with Hysteresis, *ASCE, HY*, 94, pp. 113~137, 1968.
  - 26) Staple, W.J. : Comparison of Computed and Measured Moisture Redistribution Following Infiltration, *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 33, pp. 840~947, 1969.
  - 27) Poulouvassilis, A. : Hysteresis of Pore Water, an Application of the Concept of Independent Domains, *Soil Sci.*, 93, pp. 405~412, 1964.
  - 28) Philip, J.R. : Similarity Hypothesis for Capillary Hysteresis in Porous Materials, *J. Geophys. Res.*, 69 (8), pp. 1553~1562, 1964.
  - 29) Everett, D.H. : Adsorption Hysteresis, *Solid Gas Interface*, Vol. 2, edited by E.A. Flood, Maree Dekker, New York, Chap. 36, pp. 1055~1113, 1967.
  - 30) Topp, G.C. : Soil-water Hysteresis, The Domain Theory Extended to Pore Interaction Condition, *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 35, pp. 219~225, 1971.
  - 31) Mualem, A. : A Conceptual Model of Hysteresis, *Water Reso. Res.*, 10 (3), pp. 514~520, 1974.
  - 32) 赤井浩一・宇野尚雄 : 土中の準一次元非定常浸透流に関する研究, *土木学会論文集*, 127, pp. 14~22, 1966.
  - 33) Boulton, N.S. : Analysis of Data from Non-equilibrium Pumping Test Allowing for Delayed Yield from Storage, *Proc. ICE*, 26, pp. 469~482, 1963.

(1976.11.20・受付)