

BEITRAG ZUR BERECHNUNG VON QUERSCHOTTEN IN HOHLKASTENTRÄGERN

von Masaharu HIRASHIMA* und Sohji YAJIMA**

1. EINLEITUNG

Bei der Behandlung dünnwandiger Stäbe ist nicht allein die Berechnung der Verwölbung seines Querschnittes von Wichtigkeit. In gleicher Weise muß seine Querschnittsverformung unter Biegetorsionsbelastung in Betracht gezogen werden. Das eigentliche Torsionsproblem beruht im wesentlichen auf dem St.-Venant'schen Prinzip, nach dem sich die Torsionsbeanspruchungen ohne Wölbbehinderung ermitteln lassen¹⁾. Werden jedoch Wölbbehinderung in bestimmter Weise angeordnet, so lassen sich die nun auftretenden Normalspannungen ohne Schwierigkeiten berechnen. Das Verwölbungsbild ändert sich bei dünnwandigen Stäben mit offenem Querschnitt aufgrund seines geringen Torsionswiderstandes. Demgegenüber steht das Verhalten dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Querschnitt, deren Wölbeinflüsse auf die Normalspannungen geringer sind, da ihr Torsionswiderstand größer ist. Dieser erhöhte Torsionswiderstand führt zu einer Querschnittsverformung. Für Konstruktionen, die als "dünnwandige Stäbe" ausgeführt sind, gilt, daß sie trotz einer geringeren Wandstärke eine relativ große Steifigkeit besitzen. Sie erfahren deshalb eine konstruktive Verstärkung durch den Einbau querschnittsversteifender Querschotte, Verbände, Rippen oder Rahmen. Ihre Anordnungen und ihre elastische Nachgiebigkeit beeinflussen die Verformbarkeit der Querschnitte und die Umlagerung der Spannungen. Zur Lösung des Problems kommen entweder 1) die Faltwerktheorie oder 2) die Schubflußtheorie zur Anwendung. Als Faltwerke werden prismatische Schalen, die in Bezug auf ihre größere Länge einen kleineren Querschnitt besitzen, und Stäbe mit verformbaren Querschnitten bezeichnet, d.h. sie stellen den

* Prof. Dr.-Ing., Abteilung für Bauingenieurwesen, Universität Waseda.

** Dipl.-Ing., Doktorand in Bauingenieurwesen, Universität Waseda.

Übergangsbereich von Stäben zu Schalen dar. Unter Zuhilfenahme der Faltwerktheorie behandelt Wlassow die Querschnittsverformung des prismatischen Querschnittes^{2),3)}. Mit der Wlassow'schen Methode lassen sich die Verschiebungen und die Querschnittskräfte durch geeignete Wahl von Funktionen ausdrücken, die dem Verformungsverlauf im Querschnitt entsprechen. Ferner wird der Verlauf der Verformungen und der Querschnittskräfte in Längsrichtung berücksichtigt. Lacher⁴⁾ beruft sich auf die Wlassow'sche Methode, zieht jedoch auch Bewegungsmöglichkeiten an den Knoten des prismatischen Querschottes in Betracht. Verschiebungen von Punkten einer Querschnittsebene in Längsrichtung und Profillinienrichtung und zudem senkrecht zur Profilinie werden von de Boer⁵⁾ beschrieben. Die Querschnittsverformung kann mit dieser Arbeit nicht nur als Verschiebung des Wandstabes, sondern auch als Biegeverformung des Wandstabes angesehen werden.

Mit den bekannten Gleichungen der erweiterten technischen Biegelehre, in der die klassischen Lösungen des Biege- und Torsionsproblems als Querschnittsstarrkörperverschiebungen abgespaltet und für jede normierte Konturverformung zusätzliche gewöhnliche Differentialgleichungen formuliert werden, behandelt Schardt¹⁵⁾ das Problem dünnwandiger, offener Querschnitte, wobei eine Querschnittsverformung nicht berücksichtigt wird. Sedlaceks Arbeit⁶⁾ entspricht der Schardt'schen in der Verwendung der Drehwinkel in den Knoten als Querschnittsverformung. Er ersetzt jedoch die Drehwinkel durch Biegedrehwinkel von Durchlaufträgern, die an den Knoten starr gestützt sind. Das heißt, daß die Querschnittsverformung in Erweiterung der Biege- und Torsionstheorie untersucht wurde. Die genannten Arbeiten basieren auf der Bornscheuer'schen Abhandlung⁷⁾, die den Vorteil bietet, daß in anschaulicher und übersichtlicher Berechnungsweise die Erweiterungen für den Spannungszustand aus der elementaren Biege- und Torsionstheorie aufgebaut

werden. Hees und Bornscheuer⁸⁾ befassen sich ebenfalls mit dieser Methode. Nach den oben beschriebenen Methoden wurde die Faltwerktheorie benannt. Obwohl in ihr die Querschnittsverformung berücksichtigt wird, behält dennoch die Hypothese von Bernoulli ihre Gültigkeit. Diese erlaubt, daß in den Gleichungen für Stäbe mit geschlossenem Querschnitt die Querschnittsverformung gleich Null gesetzt wird und man dann die Differentialgleichung der Wölb torsion mit offenem Querschnitt erhält. Dagegen behandelt Heilig⁹⁾ den Kastenträger mit beliebiger Querschnittsform unter Kontinuität der Schubspannung in den Querschnittswänden. Dies ist die Schubflußtheorie, die Hapel¹⁰⁾ und Saeki¹¹⁾ unter der Berücksichtigung der Wölbschubspannung bei geschlossenen Profilen erweitern.

Der durch verschiedenförmige Querschotte versteifte Hohlkastenträger mit mittelgroßer Stützweite findet im heutigen Brückenbau häufige praktische Anwendung. Bei der Lösung dieses Problems liefert die Faltwerktheorie die gewünschte Genauigkeit. In ihr lassen sich Formeln zur Berechnung der Beanspruchung σ und τ mit Querschnittswerten angeben, die in Analogie zu den Trägheitsmomenten und den Biegemomenten berechnet werden können. Die Faltwerktheorie kann als Erweiterung der klassischen Biege- und Verdrehtheorie angesehen werden, d.h. man kann Faltwerke als prismatische Flächentragwerke betrachten¹⁹⁾. Es ist also zweckmäßig, dünnwandige Stäbe mit der Finiten-Element-Methode zu behandeln^{12), 13)}. Okumura und Sakai¹²⁾ haben das prismatische Flächentragwerk mit der Plattenbiegung unter Berücksichtigung seines räumlichen Verhaltens erforscht. Eine solche räumliche Behandlung des dünnwandigen Stabes ist mit dem bekannten Nachteil eines mühsamen Rechenvorganges verbunden. Nishino, Hasegawa und Natori²¹⁾ versuchen deshalb, zweidimensionale dünnwandige Faltwerke als eindimensionale Stäbe zu behandeln.

Das elastische Querschott wird in der Lacher'schen Arbeit angeführt. Der Stab in seinem Rechenbeispiel hat keine allgemeine Kastenform, sondern spezielle Abmessungen. Das Vollscheiben-Querschott wird als querverbandförmiges Querschott nach Abdel-Samad, Wright und Robinson¹⁸⁾ umgerechnet und seine Steifigkeit berechnet. Die Beziehung zwischen der Steifigkeit des elastischen Querschottmaterials und ihre Anordnung wurde bis jetzt in der Forschung wenig erarbeitet²⁴⁾. Demgegenüber existieren in der Literatur mehrere Abhandlungen, die den Einfluß von starren Querschotten erörtern^{13), 17), 28)}; so z.B. bei Nomachi¹⁷⁾,

wo ein Stab, der durch in gleichen Abständen angeordnete Querschotte angesteift ist, einer allgemeinen Torsionsbelastung ausgesetzt wird. Okumura und Sakai¹³⁾ beschreiben, daß bei einer Zunahme der Querschottzahl das Verhalten des Stabes mit zunehmender Genauigkeit durch die Membrantheorie erklärt werden kann. In jeder dieser Arbeiten wird der Einfluß von Querschotten an Hand eines einzelnen, speziellen Beispiels mit festgelegten Abmessungen behandelt. Da die Querschnittsverformung sehr von Querschottabmessungen abhängt, bedarf der praktische Entwurf von querschnittsversteifenden Querschotten einer einheitlichen Darstellung ihres Einflusses. Relationen zwischen Verschiebungen und Entwurfsparametern werden in den Arbeiten^{16), 19)} an Hand spezifischer Differentialgleichungen bestimmt. Mit einer Formel für die "mittragende Breite der Platte" verwenden Wright, Abdel-Samad und Robinson¹⁹⁾ die Anordnung der Querschotte über die Stablänge und beziehen sich dabei auf das "Manuel of American Institute of Steel Construction (AISC) Orthotropic Plate Deck Bridges". Sie benutzen dabei einen Parameter, der auch in der Behandlung der Differentialgleichung des "Balkens auf elastischer Bettung" maßgebend ist. Sie geben jedoch keine Beziehung zwischen dem Querschotteinfluß und diesem Parameter an. Kollbrunner und Basler²²⁾ ermitteln eine charakteristische Länge für das Verhältnis zwischen Torsions- und Biegetorsionsteifigkeit. Es soll damit in Betracht gezogen werden, ob bei der Berechnung dünnwandiger Stäbe die Querschnittsverwölbungen berücksichtigt werden müssen. Komatsu, Nakai und Taido²⁰⁾ schlagen ein Verhältnis zwischen Torsions- und Biegesteifigkeit vor, das bei der Verwölbung im gekrümmten Balken benutzt wurde.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, mit Hilfe der bisher entwickelten Faltwerktheorie den Einfluß versteifender Querschotte im Hohlkastenträger zu betrachten. Es wird die von Wlassow eingeführte Methode für den geschlossenen Querschnitt verwendet und ein leistungsfähigeres Berechnungsverfahren entwickelt, um den Einfluß von Querschotten zu demonstrieren. Im Rechenexperiment wird die Wirkung des starren und des elastischen Querschottes im Hohlkastenträger behandelt und miteinander verglichen. Es wird ein Parameter eingeführt, um eine schematische Darstellung des Querschotteinflusses zu ermöglichen. Ferner soll der Versuch unternommen werden, diesen Parameter als geeignetes Kriterium für den Entwurf dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Querschnitt vorzustellen.

2. GRUNDLAGEN

Es wird der rechteckige Hohlkastenträger unter allgemeiner Torsionsbelastung betrachtet. Die Koordinate in Längsrichtung wird durch x und in Querschnittsprofilrichtung durch s bezeichnet.

(1) Verschiebungen

Die Verschiebungen werden mit Wlassow'schen Ansätzen als Summe der Produkte der folgenden Funktionen beschrieben³⁾:

$$u(x, s) = U(x) \varphi(s), \dots\dots\dots(1)$$

$$v(x, s) = \theta(x) \psi_1(s) + \kappa(x) \psi_2(s). \dots\dots\dots(2)$$

$u(x, s)$ und $v(x, s)$ sind jeweils die Verschiebungen in der Längsrichtung und in der Querschnittsebene senkrecht zur Längsrichtung. Hier werden die gesuchten Verformungsfunktionen $U(x)$ als die Verwölbung, die gleichartige Funktion $\theta(x)$ als der Drehwinkel und $\kappa(x)$ als die Querschnittsverformung bezeichnet, die im weiteren als die Verformungswinkel der Profillinie angenommen wird (Abb. 1b).

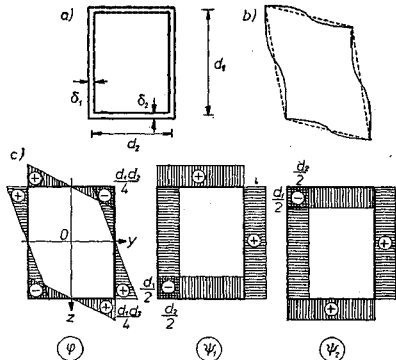


Abb. 1 Querschnittsabmessungen, Querschnittsverformung und Verformungsfunktionen.

Die Funktionen $\varphi(s)$, $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ beschreiben den Verlauf der Verformungen über den Querschnitt in der Längsrichtung und in der Querschnittsebene und sind beliebig wählbar. Die in Abb. 1c) dargestellten Funktionen lauten

$$\left. \begin{aligned} \varphi(s) &= \omega = yz \\ \psi_1(s) &= h \\ \psi_2(s) &= \dot{y}z + y\dot{z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

Der Wert ω entspricht der Sektorfläche. h ist das Lot vom Schubmittelpunkt auf eine beliebige Seite des Rechtecks. \dot{y} und \dot{z} sind die Ableitungen der Koordinate eines beliebigen Punktes der

Wandmittellinie nach s (Abb. 1c).

(2) Verformungsansätze

In einem Querschnitt a läßt sich der Verschiebungszustand durch den Vektor δ_a darstellen:

$$\delta_a = \begin{Bmatrix} U \\ \theta \\ \kappa \end{Bmatrix}. \dots\dots\dots(4)$$

Die folgenden Funktionen werden für die Verschiebungen angesetzt:

$$\left. \begin{aligned} U_a &= \alpha_U + \beta_U x_a + \gamma_U x_a^2 + \lambda_U x_a^3, \\ \theta_a &= \alpha_\theta + \beta_\theta x_a + \gamma_\theta x_a^2 + \lambda_\theta x_a^3, \\ \kappa_a &= \alpha_\kappa + \beta_\kappa x_a + \gamma_\kappa x_a^2 + \lambda_\kappa x_a^3. \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)^*$$

In Matrixschreibweise gilt

$$\delta_a = (1, x_a) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \lambda \end{Bmatrix} = X_a A, \dots\dots\dots(6)$$

wobei X_a eine Koordinatenmatrix und A ein Koeffizientenvektor ist.

Wenn man einen Stab in Längsrichtung in mehrere Abschnitte (Elemente) zerschneidet, haben die Elementverschiebungen in einem Abschnitt die folgende Form:

$$\delta^e = \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \end{Bmatrix}, \dots\dots\dots(7)$$

wobei a, b, c, d jeweils Koordinaten $x=a, b, c, d$ bedeuten. Mit weiteren Koordinatenmatrizen

$$N^e = (1, X_a, X_b, X_c, X_d) \dots\dots\dots(8)$$

lassen sich die Elementverschiebungen (7) in der Form

$$\delta^e = N^e A \dots\dots\dots(9)$$

schreiben. X_b, X_c, X_d sind Koordinatenmatrizen an den Stellen $x=b, c, d$. Der Koeffizientenvektor wird dann

$$A = (N^e)^{-1} \delta^e. \dots\dots\dots(10)$$

Die beliebig gewählten Funktionen φ und ψ werden wie folgt ebenfalls in Matrizenform ausgedrückt:

$$\Phi_f = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots(11)$$

Die Verschiebungen (1) und (2) eines beliebigen Querschnittes im Abstand x können mit den oben

* Es werden Reihenentwicklungen der Verschiebungsfunktionen bis zur 3. Ordnung betrachtet, um die Querschnittsverformung als Plattenbiegung behandeln zu können.

eingeführten Vektoren zu einem Vektor f zusammengefaßt werden:

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \Phi_f X_f A . \quad (12)$$

Es wird dann mit der Beziehung (10)

$$f = \Phi_f X_f (N^e)^{-1} \delta^e . \quad (13)$$

(3) Verzerrungen und Spannungen

Die Verzerrungen ϵ werden aus den Verschiebungen u und v ermittelt. Mit den Gleichungen der Scheibentheorie gilt:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} . \quad (14)$$

Man erhält die Spannungen

$$\sigma = D \epsilon , \quad (15)$$

wobei D die Elastizitätsmatrix ist:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} . \quad (16)$$

E ist der Elastizitätsmodul und ν ist die Poissonzahl.

(4) Berücksichtigung der Querschnittsverformung

Infolge der Querschnittsverformung entstehen bei "steifknötigen" Faltenwerken zusätzlich zu den Scheibenverschiebungen, die bisher errechnet wurden, Plattenverformungen. Die Plattendurchsenkung $w(x, s)$ läßt sich hierbei als Produkt aus der schon verwendeten Querschnittsverformung $\kappa(x)$ und einer noch zu bestimmenden Funktionen $\xi(s)$ berechnen:

$$w(x, s) = \kappa(x) \xi(s) . \quad (17)$$

In einer der Gleichung (13) entsprechenden Form wird die Verschiebung dargestellt:

$$w = \Xi X_w (N_A^s)^{-1} \delta^s . \quad (18)$$

Der Index A bedeutet, daß es sich hier um Verschiebungen der Abschnittsränder senkrecht zur $x-s$ Ebene handelt. Der Verzerrungsvektor wird mit Hilfe der Plattenbiegetheorie ausgedrückt:

$$\epsilon_A = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \end{Bmatrix} . \quad (19)$$

Wie Gl. (15)

$$\sigma_A = D_A \epsilon_A , \quad (20)$$

wobei für D_A mit der Plattendicke t die Beziehung (21) gilt:

$$D_A = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} . \quad (21)$$

(5) Die Bestimmung der Funktion $\xi(s)$

Bevor die Steifigkeitsmatrix aufgestellt werden kann, muß die Funktion $\xi(s)$ bestimmt werden, die, obwohl sie beliebig gewählt werden kann, als Voraussetzung die Verteilung der Querschnittsverformung haben muß. Wlassow nimmt die Verformung eines Rahmens von der Breite 1 als Querschnittsverformung an. Die maximalen Biegemomente treten bei einer solchen Verformung nach Abb. 2a) in den Rahmenecken auf.

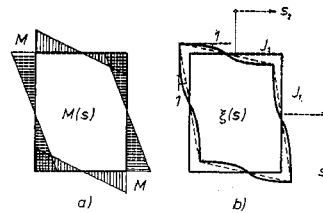


Abb. 2 Biegemomente und -verformungen beim steifknötigen Faltenwerk.

Für die vorgegebene Einheitsverformung nimmt man das Moment an:

$$M = \frac{12}{\frac{d_1}{E J_1} + \frac{d_2}{E J_2}} . \quad (22)$$

Wobei $J_1 = t_1^3/12$, $J_2 = t_2^3/12$ ist. Der Biegemomentenverlauf wird durch

$$M(S_1) = \frac{12}{\frac{d_1}{E J_1} + \frac{d_2}{E J_2}} \frac{2}{d_1} S_1 \quad (23a)$$

$$M(S_2) = \frac{12}{\frac{d_1}{E J_1} + \frac{d_2}{E J_2}} \frac{2}{d_2} S_2 \quad (23b)$$

beschrieben. Entsprechend der Beziehung $\xi = -M/EJ$ wird (23a, b) mit den Randbedingungen

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0 , \\ \xi_1(-d_1/2) = -d_1/2 , \quad \xi_2(d_2/2) = -d_2/2 ,$$

integriert und man erhält die Verschiebungsfunktionen

$$\xi_1(S_1) = \frac{1}{\frac{d_1}{E J_1} + \frac{d_2}{E J_2}} \left[-\frac{4}{E J_1 d_1} S_1^3 + \left(\frac{2d_1}{E J_1} + \frac{d_2}{E J_2} \right) S_1 \right] \dots\dots\dots(24a)$$

$$\xi_2(S_2) = \frac{1}{\frac{d_1}{E J_1} + \frac{d_2}{E J_2}} \left[+\frac{4}{E J_2 d_2} S_2^3 - \left(\frac{2d_2}{E J_2} + \frac{d_1}{E J_1} \right) S_2 \right] \dots\dots\dots(24b)$$

(6) Aufstellung der Steifigkeitsmatrix

Ersetzt man die Gln. (13) und (18) durch

$$B_f = \Phi_f X_f (N^e)^{-1}, \dots\dots\dots(25a)$$

$$B_A = \Xi_w X_w (N_A^e)^{-1}, \dots\dots\dots(25b)$$

so gilt

$$f = B_f \delta^e, \dots\dots\dots(26a)$$

$$w = B_A \delta^e. \dots\dots\dots(26b)$$

Durch Differentiation von (26a, b) entsprechend Gln. (14) und (19) werden die folgenden Beziehungen zwischen den Elementdehnungen und -verschiebungen hergestellt:

$$e = C \delta^e, \dots\dots\dots(27a)$$

$$e_A = C_A \delta^e, \dots\dots\dots(27b)$$

mit den Abkürzungen

$$C = \Phi_C X_C (N^e)^{-1}, \dots\dots\dots(28a)$$

$$C_A = \Xi_C X_{CA} (N_A^e)^{-1}. \dots\dots\dots(28b)$$

Man kann dann entsprechende virtuelle Verschiebungen, die durch $\tilde{}$ gekennzeichnet sind, in der gleichen Form schreiben

$$\tilde{e} = C \tilde{\delta}^e, \dots\dots\dots(29a)$$

$$\tilde{e}_A = C_A \tilde{\delta}^e. \dots\dots\dots(29b)$$

Dann erhält man mit (29a, b) die virtuelle Arbeit \tilde{a} der inneren Kräfte pro Volumeneinheit*:

$$\tilde{a}_i = \tilde{e} \sigma + \tilde{e}_A \sigma_A = (\tilde{\delta}^e)^T ((C)^T \sigma + (C_A)^T \sigma_A). \dots\dots\dots(30)$$

Die virtuelle Arbeit \tilde{a}_a der äußeren Kräfte läßt sich mit dem Randlastvektor F_e wie folgt ausdrücken:

$$\tilde{a}_a = (\delta^e)^T F_e. \dots\dots\dots(31)$$

Dabei sind die äußeren Kräfte als Knotenlasten an den Rändern eines Stabelementes aufzusetzen. Nach der Gleichgewichtsbedingung ist die Summe der virtuellen Arbeiten jedes Stabelementes gleich Null.

$$F_e + \int ((C)^T \sigma + (C_A)^T \sigma_A) d(\text{vol}) = 0 \dots\dots\dots(32)$$

Formt man diese Gleichung mit den Beziehungen

(15), (20) und (27a, b) um, dann resultiert die Steifigkeitsmatrix K :

$$K = - \int ((C)^T D C + (C_A)^T D_A C_A) d(\text{vol}), \dots\dots\dots(33)$$

und die Gleichung (32) läßt sich in der Form

$$F_e = K \delta^e \dots\dots\dots(34)$$

schreiben. Mit den Gln. (28a, b) können die Integranden wie folgt ausgedrückt werden:

$$(C)^T D C = [(N^e)^{-1}]^T (X_C)^T (\Phi_C)^T D \Phi_C X_C (N^e)^{-1}, \dots\dots\dots(35a)$$

$$(C_A)^T D_A C_A = [(N_A^e)^{-1}]^T (X_{CA})^T (\Xi_C)^T D_A \Xi_C X_{CA} (N_A^e)^{-1}. \dots\dots\dots(35b)$$

Φ_C und Ξ_C sind Funktionen von s . Diese erlauben, daß die Ausdrücke $(\Phi_C)^T D \Phi_C$ und $(\Xi_C)^T D_A \Xi_C$ einfach integriert werden können. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1 a) Matrix $(\Phi_C)^T D \Phi_C$
b) Matrix $(\Xi_C)^T D_A \Xi_C$

a)					
$D_x \phi^2$	0	0	$D_1 \phi \dot{\phi}_1$	0	$D_1 \phi \dot{\phi}_2$
0	$D_{xs} \dot{\phi}^2$	$D_{xs} \dot{\phi} \dot{\phi}_1$	0	$D_{xs} \dot{\phi} \dot{\phi}_2$	0
0	$D_{xs} \dot{\phi} \dot{\phi}$	$D_{xs} \dot{\phi}_1^2$	0	$D_{xs} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2$	0
$D_1 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}$	0	0	$D_s \dot{\phi}_1^2$	0	$D_s \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2$
0	$D_{xs} \dot{\phi}_2 \dot{\phi}$	$D_{xs} \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_1$	0	$D_{xs} \dot{\phi}_2^2$	0
$D_1 \dot{\phi}_2 \dot{\phi}$	0	0	$D_s \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_1$	0	$D_s \dot{\phi}_2^2$

b)					
$E_x \xi^2$	$E_1 \xi \dot{\xi}$	0	$D = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_s & 0 \\ 0 & 0 & D_{xs} \end{bmatrix}$	$D_A = \begin{bmatrix} E_x & E_1 & 0 \\ E_1 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & E_{xs} \end{bmatrix}$	entsprechen Gln. (16) und (21).
$E_1 \xi \dot{\xi}$	$E_s \dot{\xi}^2$	0			
0	0	$E_{xs} \dot{\xi}^2$			

3. BERÜCKSICHTIGUNG VON QUERSCHOTTEN

Das Vorhandensein von Querschotten beeinflusst maßgeblich die Querschnittsverformung. Setzt z.B. eine Kraft an der Stelle des starren Querschottes an, so besteht dessen Wirkung in der vollständigen Behinderung der Querschnittsverformung. Weiterhin besitzt das elastische Querschott eine größere Steifigkeit als der Stabquerschnitt. Querschotte lassen sich ihrer Wirkung nach in 1) starre Querschotte und 2) verschieden-

* Zur Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten.

artig geformte, elastische Querschotte aufteilen.

(1) **Starre Querschotte**

Die Vollscheibe besitzt in ihrer Ebene eine sehr große Steifigkeit. Deshalb kann man annehmen, daß an der Stelle des Querschottes keine Querschnittsverformungen auftreten.

(2) **Elastische Querschotte**

Die Wirkung eines elastischen Querschottes kann durch Übergangsbedingungen beschrieben werden, wobei das Querschott durch eine Federkonstante ersetzt werden kann. Die Gestalt des Querschottes beschränkt jedoch die Möglichkeiten der Berechnung von Ersatzkonstanten.

(a) **Rahmenform**

In Gl. (22) berechnet man das Knotenmoment, das durch die Einheitsverschiebung hervorgerufen wird. Dabei benutzt man die Einheitsbreite eines Rahmens, den man aus dem dünnwandigen Stab herausgeschnitten hat. Man berücksichtigt dabei die Dicke (Länge) δ_{q1} , δ_{q2} des Querschottes in Längsrichtung x und addiert alle Querschnittsverformungen an allen Knoten im Querschnitt. Mit Q_q wird das Querbimoment an der Stelle des Querschottes und mit k_q die entsprechende Federkonstante bezeichnet:

$$Q_q = -k_q \kappa = - \frac{96}{\frac{d_1}{EJ_1} + \frac{d_2}{EJ_2}} \kappa, \dots\dots\dots(36)$$

wobei $J_1 = \delta_{q1} t_1^3 / 12$, $J_2 = \delta_{q2} t_2^3 / 12$ ist.

(b) **Vereinfachte Berechnung für die Rahmenform**

Wenn man das Querschott durch ein Feldelement ersetzt, hat das Element eine geringere Länge aber eine größere Biegesteifigkeit als die anderen Feldelemente. Damit lassen sich Querschotte genauso wie Feldelemente in die Steifigkeitsmatrix einarbeiten. An der Stelle j des Querschottes werden die Verschiebungen durch die folgenden Kontinuitätsbedingungen ausgedrückt:

$$\partial_b \text{ Feld}(j-1) = \partial_a \text{ Querschott}(j), \dots\dots\dots(37a)$$

$$\partial_b \text{ Querschott}(j) = \partial_a \text{ Feld}(j+1), \dots\dots\dots(37b)$$

Das Querschottelement hat — wie oben erwähnt — eine geringere Länge gegenüber einer Biegesteifigkeit. Man kann also näherungsweise

$$\partial_a \text{ Querschott}(j) = \partial_b \text{ Querschott}(j) \dots\dots\dots(38)$$

setzen. Damit gilt

$$\partial_b \text{ Feld}(j-1) = \partial_a \text{ Feld}(j+1) \dots\dots\dots(39)$$

(c) **X-Form bzw. Querverband**

Die Verformung v_x ist an den Knoten bei der Querschnittsverformung (Abb. 3b):

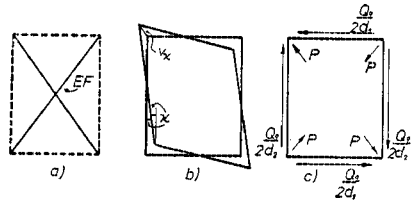


Abb. 3 Querschott mit X-Form.

$$v_x = \frac{1}{2} \kappa \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \dots\dots\dots(40)$$

Die Kraft P an den Knoten wird durch das Q_q ausgedrückt (Abb. 3c)

$$P = \frac{Q_q}{2d_1 d_2} \cdot \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \dots\dots\dots(41)$$

Mit der Beziehung $P/EF = v_x / \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

$$Q_q = -k_q \kappa = - \frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} EF \kappa, \dots\dots\dots(42)$$

wobei EF die Dehnsteifigkeit ist.

4. PARAMETERSTUDIE FÜR DÜNNWANDIGE QUERSCHOTTE

Zunächst soll ein Parameter η wie folgt definiert werden:

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{c}{EJ_\omega}} l \dots\dots\dots(43)^*$$

EJ_ω ist die Steifigkeit der Wölbkrafttorsion und c die Querschnittsteifigkeit, die wie folgt — nach Tabelle 1 — ausgedrückt werden sollen:

* Der Parameter η leitet sich aus der Wlassow'schen Differentialgleichung für den dünnwandigen Hohlkastenträger³⁾ ab;

$$\frac{a}{c} (b_1^2 - b_2^2) f^{VI} - ab_1 f^{IV} + (b_1^2 - b_2^2) f'' = 0, \dots\dots\dots(a)$$

wobei

$$a = \frac{1}{24} Ed_1^2 d_2^2 (F_1 + F_2 + 6\Delta F), \dots\dots\dots(b)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} G(d_1^2 F_1 + d_2^2 F_2), \dots\dots\dots(c)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} G(-d_1^2 F_1 + d_2^2 F_2), \dots\dots\dots(d)$$

$$c = \frac{96}{\frac{d_1}{EJ_1} + \frac{d_2}{EJ_2}}, \dots\dots\dots(e)$$

f in Gl. (a) ist eine Funktion für eine allgemeine Verformung d.h. f ist weder Drehwinkel, Querschnittsverformung noch Verwölbung.

$$EJ_{\omega} = \int D\varphi^2 dF = a \text{ (Fußnote Gl. (b))} \dots(44)$$

$$c = \int D_A \xi^2 dF$$

(entspricht der Gl. (e) in Fußnote) \dots(45)

Die Stablänge l wird in (43) verwendet, um eine dimensionslose Beziehung für η zu erhalten. Abb. 4 zeigt die Abhängigkeit des Parameter η von der Stablänge l bei verschiedenen Querschnittsabmessungen δ_1 und δ_2 .

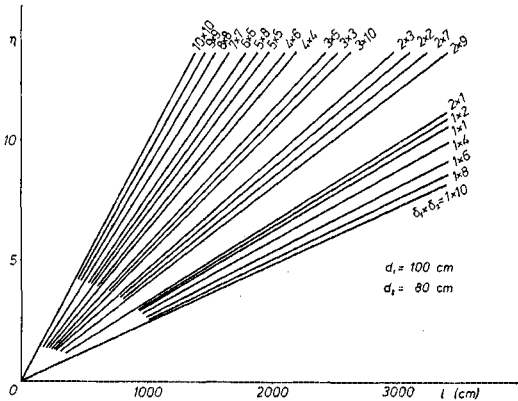


Abb. 4 η -Wert in Abhängigkeit von der Länge l des Stabes mit verschiedenen Wanddicken.

Im folgenden werden zahlenmäßige Ermittlungen zeigen, wie der Parameter η als ein Kriterium beim Entwurf des dünnwandigen Hohlkastenträgers angewendet werden kann. Die Materialkonstanten sind $E=2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0,3$. Die Querschnittskräfte werden wie folgt bezeichnet; Das Bimoment B entspricht der Verwölbung U , das reine Torsionsmoment H entspricht dem Drehwinkel θ und das Querbimoment Q entspricht der Querschnittsverformung κ . Hierbei werden zwei Kombinationen der Randbedingungen benutzt;

a) $\kappa=\theta=B=0$, \dots\dots\dots(46)

b) $\theta=B=Q=0$. \dots\dots\dots(47)

Die Randbedingung a) bedeutet, daß die Querschnittsverformung und der Drehwinkel behindert werden, der Querschnitt sich aber frei in der Längsrichtung verwölben kann. Die Randbedingung b) erlaubt, daß eine Querschnittsverformung und Verwölbung auftreten kann, der Drehwinkel aber behindert wird. Die Randbedingung b) ist folglich ein Idealfall, und man kann annehmen, daß das starre Querschott den Querschnitt an dieser Stelle völlig versteift. An dem Vergleich der mit den Randbedingungen a) und b) berech-

neten Ergebnisse läßt sich der Einfluß des Querschottes erörtern. Die Querschnittsabmessungen, die Art der Belastung und deren Angriffspunkte sind jeweils in den Abbildungen angegeben. Die einzelne Belastung hat die Größe 1.

(1) Parameter η und Querschnittsverformung κ

In Abb. 5 wird der Zusammenhang zwischen dem Parameter η und der Querschnittsverformung κ dargestellt. Die einzelne Querbimomentbelastung $Q=1$ greift in der Mitte des Stabes an. Es werden beide Randbedingungen a) und b) benutzt. Die Größe der Querschnittsverformung κ an der Stelle des Lastangriffspunktes wird für verschiedene Wandstärken aufgetragen.

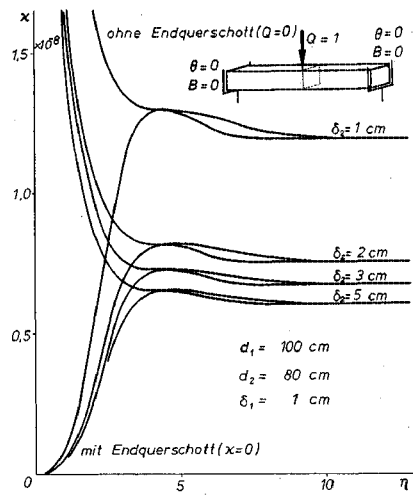


Abb. 5 Zusammenhang zwischen Querschnittsverformung κ und Parameter η bei Stäben und mit Endquerschott.

Die mit den Randbedingungen a) und b) berechneten beiden Kurven treffen sich für verschiedene Querschnittsabmessungen bei demselben η -Wert (ca. 4, 5). Das bedeutet, daß die Behinderung der Querschnittsverformung von einer bestimmten Stablänge an keinen Einfluß mehr ausübt. Die Kurve für die Randbedingung b) zeigt die immanente Steifigkeit des Querschnittes gegen die Querschnittsverformung und Abb. 6 zeigt diese immanente Steifigkeit des Stabquerschnittes. Die Pfeile bezeichnen die Stelle der Querbimomentbelastung. Nähern sich nun die Lastangriffspunkte dem Stabende, so nehmen die Wert η in dieser Richtung zu, während sie in entgegengesetzter Richtung abnehmen. Ab einem bestimmten mittleren Belastungsbereich des Stabes bleiben die Werte jedoch gleich. Das heißt, daß

die immanente Steifigkeit des Querschnittes gegen die Querschnittsverformung des Stabes bis zu einer bestimmten bzw. einem bestimmten η -Wert wirksam ist. Nähert sich die Belastung dem Stabende, so wird dementsprechend der κ -Wert größer.

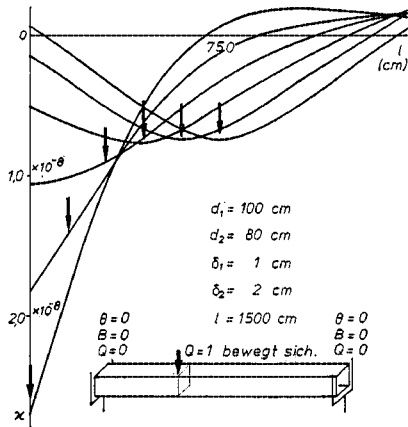


Abb. 6 Verteilung der Querschnittsverformung beim Stab ohne Querschott mit verschiedenen Lastangriffspunkten.

(2) Parameter η bei starren Querschotten

Um den Einfluß eines starren Querschottes auf den dünnwandigen Stab durch den Parameter η zu beurteilen, zeigt Abb. 7 die Kurven von jeweils mit nur einem Querschott verstärkten Stäben der Länge 1500 cm bzw. 3000 cm. Dabei greift die Belastung $Q=1$ an einem Viertelpunkt des Stabes an. In den Kurven sind für die Verformungen im Lastangriffspunkt der beiden Stäbe aufgezeichnet. Das Querschott wird vom linken Ende des Stabes in Richtung des gleichbleibenden Lastangriffspunktes (siehe Abb. 7) und weiter zum

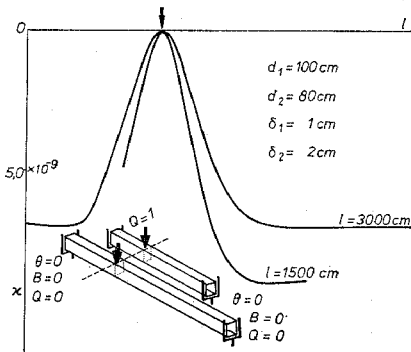


Abb. 7 Auswirkung des Querschottes bei verschiedenen Stablängen.

rechten Stabende hin verschoben. Die Querschnittsverformung κ am Angriffspunkt der Belastung wird auf der Ordinate aufgetragen. Der Nullpunkt für κ befindet sich im Belastungspunkt. Unabhängig von der Stablänge, jedoch bei gleichem Lastangriffspunkt, kann man am Verlauf der Kurven erkennen, daß sie beide an der gleichen Stelle ihre Richtung ändern und dann Parallel zueinander und zur Abszisse verlaufen.

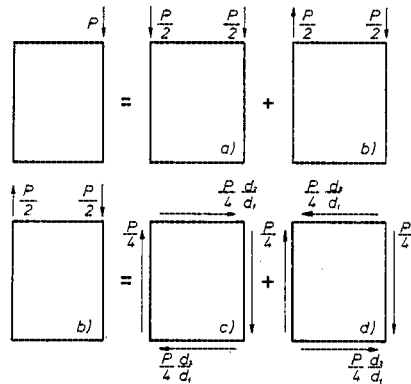


Abb. 8 Zerlegung der Kraft.

Die Zerlegung der äußeren Belastung ist in Abb. 8 abgebildet — es ist zu entnehmen, daß die allgemeine Torsionsbelastung in eine reine Torsions- und eine Querbimomentenbelastung zerlegt werden kann. Wird nun die Querschnittsverformung durch Querschotte beschränkt, so kann nur das Verfahren für eine reine Torsionsmomentenbelastung angewendet werden. Abb. 9 zeigt die Beziehung zwischen der Anzahl starrer Querschotten und dem Bimoment unter reiner Torsionsbelastung. Die Randbedingungen entsprechen Fall a). Je höher die Anzahl der star-

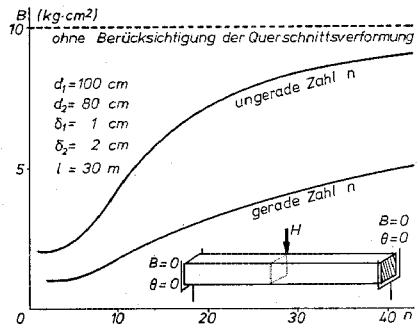


Abb. 9 Bimoment B und Anzahl n der Querschotte beim Stab mit reiner Torsionsbelastung H .

fassern im Modellversuch demonstriert worden²³⁾. Um diese Auswirkungen jedoch für variable Querschnittsabmessungen vollständig behandeln zu können, wurde der Parameter η eingeführt, der von den Steifigkeiten des Systems gegen Querschnittsverformungen und gegen Verwölbung abhängt. Der Parameter η , der beim Balken auf elastischer Bettung für die Berechnung von Verschiebungen verwendet wird, kennzeichnet auch im vorliegenden Problem das Verhältnis zwischen den Querschnittswerten und Querschnittsverformungen.

Die Wirkung des Querschottes kann an seiner Stelle als Interferenzpunkt für die Querschnittsverformung betrachtet werden, die mit zunehmender Entfernung vom Lastangriffspunkt zum Stabende hin abnimmt (Abb. 6). Die Intensität dieser Dämpfung ist in großem Maß von den geometrischen Verhältnissen und von der Form des Querschottes, nämlich vom η -Wert, abhängig. Nimmt die Wandstärke des Hohlkastenträgers ab, so trägt er zur "Störung" der Querschnittsverformung in Längsrichtung bei: so hat z.B. ein Stab mit den Abmessungen $d_1=100$ cm, $d_2=80$ cm, $\delta_1=1$ cm und $\delta_2=1$ cm bei $\eta=4,5$ eine Länge von $l=1500$ cm (Abb. 4 und 5). Bei gleichem η -Wert hat ein Stab mit $\delta_1=\delta_2=2$ cm bei gleicher Querschnittsbreite und -höhe ca. 1000 cm Länge. Aus den angeführten Beispielen läßt sich ersehen, daß eine größere Wandstärke des Hohlkastenträgers entscheidend zur Verminderung von Querschnittsverformungen bei kürzerer Stablänge beiträgt. Dem steht entgegen, daß bei geringeren Wandstärken das Querschott einen größeren, positiven Einflußbereich auf die Querschnittsverformung besitzt. Mit anderen Worten dargestellt: der Einfluß des Plattenbiegungsanteils der Querschnittsverformung bei geringerer Wandstärke oder bei kürzerer Stablänge ist deshalb nicht groß, weil der Steifigkeitsanteil der Plattenbiegung dabei noch klein bleibt. Man kann folglich sagen, daß bei geringerer Wandstärke oder bei kürzerer Stablänge die Schubverformung, die in Abb. 1b) durch die gestrichelte Linie gezeigt wird, den Querschnittsverformungsanteil beherrscht. Wenn der Hohlkastenträger jedoch genügende Stablänge oder Wandstärke hat, wird die Steifigkeit des Plattenbiegungsanteils c integriert und dann hat c Einfluß auf die Querschnittsverformung. In dieser vorliegenden Arbeit wird die Wlassow'sche Theorie angewendet, um mit dem Parameter η den Berücksichtigungsbereich der Plattenbiegesteifigkeit c in Betracht zu ziehen.

In der graphischen Darstellung ergibt sich folgendes: Kurz vor dem Schnittpunkt der beiden

Kurven* verringert sich die Wirkung des Querschottes. Es läßt sich daraus folgern, daß die statische Wirkung dicht liegender Querschotte nur gering ist. Die Abb. 5 zeigt dieses Phänomen bei kleinem η -Wert. Aufgrund der experimentellen Rechenergebnisse wird nun vorgeschlagen, den η -Wert zwischen 1,5 und 3,0 festzulegen, da in diesem Bereich die Querschnittsverformung am wirkungsvollsten beeinflußt werden kann. Praktisch angewendet sieht die Reihenfolge folgendermaßen aus: $d_1=160$ cm, $d_2=330$ cm, $\delta_1=1,0$ cm und $\delta_2=2,0$ cm bei $\eta=4,5$ der Abstand des Querschottes voneinander $l_q=10,0$ m ist. Sicherheitsfaktor liegt annahmsweise bei $\eta=3$ $l=6,5$ m.

Wird der Querschnitt durch starre Querschotte versteift, so verändert sich das Querbimoment zum reinen Torsionsmoment. Zusätzlich sollen jedoch die Querschottabstände und die Querschnittsabmessungen in Betracht gezogen werden, da unter Umständen größere Wölbspannungen auftreten können. Eine allmähliche Verstärkung des Querschnittes durch elastische Querschotte ist in Betracht der Querschnittsverformung gegenüber starren Querschotten zu bevorzugen.

Bei der Berechnung von elastischen Querschotten bietet die Abb. 11 eine nützliche Hilfe. Der Querschnittsverformung wirkt die große Steifigkeit des Querverbandes und die geringere versteifende Wirkung an den Knoten des Hohlkastenträgersquerschnittes entgegen. Deshalb kann der Querverband als starres Querschott betrachtet und die Wirkung von Knotenversteifungen vernachlässigt werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß der Parameter η beim Entwurf des dünnwandigen Hohlkastenträgers als nützliches Bemessungskriterium vorgeschlagen wird, und zwar zur Erklärung der Beziehungen zwischen der Querschnittsverformung und den Querschnittsabmessungen und zur Berechnung der Anordnung der Querschotte.

Die Verfasser danken Herrn Dr.-Ing. Bernhard Falter für seine wissenschaftliche Assistenz und Korrekturlesung dieser Abhandlung.

LITERATUR

- 1) Szabó, I.: Höhere Technische Mechanik, 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1972.
- 2) Wlassow, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin 1958.
- 3) Wlassow, W. S.: Dünnwandige Elastische Stäbe, Band I, VEB Verlag, Berlin 1964.

* für Stäbe mit und ohne Endquerschott.

- 4) Lacher, G.: Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische oder starre Querschotte versteiften Tragwerken mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querkraft, *Der Stahlbau*, Heft 10 und 11, S. 299~308 und 325~335, 1962.
- 5) de Boer, R.: Der gerade Stab mit geschlossenem dünnwandigen Profil unter näherungsweise Berücksichtigung der Schub- und Querschnittsdeformationen, *Ingenieur-Archiv*, 39. Band, S. 53~62, 1972.
- 6) Sedlacek, G.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für prismatische Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung, *Fortschritt-Berichte VDI Zeitschrift*, Reihe 4 Nr. 8, 1968.
- 7) Bornscheuer, F. W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, *Der Stahlbau*, Heft 1, S. 1~9, 1952.
- 8) Hees, G. und F. W. Bornscheuer: Querschnittsverformung des einzelligen Kastenträgers mit vier Wänden in einer zur Wölbkrafttorsion analogen Darstellung, *Der Bauingenieur*, Heft 11, S. 370~377, 1971, und Heft 1, S. 21~28, 1972.
- 9) Heilig, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform, *Der Stahlbau*, Heft 11, S. 333~349, 1961.
- 10) Hapel, K. H.: Zum Problem der Biegetorsion von dünnwandigen Stäben mit geschlossenen Profilen bei Berücksichtigung der Wölbschubverformung, *Der Stahlbau*, Heft 8 und 9, S. 234~240 und 277~281, 1972.
- 11) Saeki, N.: Warping torsion theory in consideration of the deformation due to secondary shearing stress and its numerical examples, *Proc. of JSCE*, No. 209, S. 27~36, 1973 (in Japanisch).
- 12) Okumura, T. und F. Sakai: An approach to statical analysis of three-dimensional structures consisting of thin flat plates and applications, *Proc. of JSCE*, No. 176, S. 43~59, 1970 (in Japanisch).
- 13) Okumura, T. und F. Sakai: Cross-sectional deformation of box-girders and the influence of intermediate diaphragms, *Proc. of JSCE*, No. 190, S. 23~36, 1971 (in Japanisch).
- 14) Böge, G. und K. Roik: Finites Verfahren zur Berechnung prismatischer Flächentragwerke unter Berücksichtigung von Schubverformungen und Änderungen der Querschnittsgestalt, *Die Baustatik*, Heft 7, S. 227~235, 1973.
- 15) Schardt, R.: Eine Erweiterung der technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Faltwerke, *Der Stahlbau*, Heft 6, S. 161~171, 1966.
- 16) Schardt, R. und H. Okur: Hilfswerte für die Lösung der Differentialgleichung $ay^{IV}(x) + by^{II}(x) + cy(x) = p(x)$, *Der Stahlbau*, Heft 1, S. 6~17, 1971.
- 17) Nomachi, S. G.: On the torsion bending of thinwalled rectangular beams with equidistant rigid diaphragms, *Tran. of JSCE*, No. 146, S. 13~21, 1967 (in Japanisch).
- 18) Abdel-Samad, S. R., R. N. Wright und A. R. Robinson: Analysis of box girders with diaphragms, *Proc. of ASCE*, ST 10, S. 2231~2256, October 1968.
- 19) Wright, R. N., S. R. Abdel-Samad und A. R. Robinson: BEF analogy for analysis of box girders, *Proc. of ASCE*, ST 7, S. 1719~1743, July 1968.
- 20) Komatsu, S., H. Nakai und Y. Taido: A Proposition for designing the horizontally curved girder bridge in connection with ratio between torsional and flexural rigidities, *Proc. of JSCE*, No. 224, S. 55~66, 1974 (in Japanisch).
- 21) Nishino, T., A. Hasegawa und E. Natori: Thinwalled rectangular beams with shear deformation and cross sectional distortion, *Proc. of JSCE*, No. 248, S. 25~40, 1976 (in Japanisch).
- 22) Kollbrunner, C. F. und K. Basler: *Torsion in Structures*, Springer-Verlag, Berlin 1969.
- 23) Hirashima, M. und S. Yajima: Zur Berechnung der dünnwandigen elastischen Stäbe mit geschlossenem Profil unter Berücksichtigung der Wirkung vom Querschott, *Bulletin of Science and Engineering Research Laboratory Waseda University*, No. 52, S. 73~81, 1971.
- 24) Yajima, S.: Berechnungen und Modellversuche zum Hohlkastenträger unter Torsionsbelastung mit Berücksichtigung verschiedener Querschotte und Querschottanordnungen, *Der Stahlbau* (zur Zeit im Druck des Heftes 12, 1976 befindlich).
- 25) Hirashima, M., S. Yajima und Y. Gomi: Modellversuch des durch verschiedene Querschotte versteiften Hohlkastenträgers, *Bulletin of Science and Engineering Research Laboratory Waseda University*, No. 74, S. 68~80, 1976.

(Received Oct. 19, 1976)