【討　議】

吉田　裕
増田陳紀　共著
村田　修

“運動方程式と等価な変分汎関数と時間積分の有限要素スキーム”への討議

（土木学会論文報告集第254号・1976年10月掲載）

▶討議者（*Discussion*）――中　村　秀　治（電力中央研究所）
By Hideharu Nakamura

本論文において，著者らは運動方程式と等価な変分汎関数を示し，それに有限要素技法を適用して新しい時間積分のアルゴリズムを提案しているが，この方法は従来から提案されている時間積分法とは本質的に異なるものである．討議者も有限要素法の基礎理論および時間積分の安定性，精度の向上については検討を進めているところであり，興味深く読ませていただいた．

論文中における数式の展開と計算結果についてはきわめて明快であるが，次の2点において討議者と認識の上で若干のくい違いがあるように思われる．

（i） この方法は最小2乗変分原理とは立場を異にしていると述べているが，多くの場合，有限要素法はなんらかの意味で最小2乗法と等価であり，この場合もその例外ではない．

（ii） 時間積分の計算を境界値問題として解く場合，精度は後に **(1)** で述べるような方法で考察でき，また，安定性の議論は不必要と思われるが，実用的に意味のある漸化式による計算法（論文中式(29)）は，この辺の検討が十分なされなければならない．論文中，**図-5** において，漸化式の精度を判断する計算例（一自由度系，$\omega\Delta t=1, 2, 4, 8$）を示しており，精度のよいことを強調しているが，はたしてよいといいきれるだろうか．討議者の検討した限りでは，このスキームは無条件安定とはいえないし，多自由度系の場合には安定性および精度を著しく減少させ，安定領域を把握することすら不可能にする要素を含んでいるのである．

そこで，以上の2点について討議者の考えを述べ，それらに対する著者らのご意見を伺いたいと思います．

（1） まず，汎関数自体について考察しよう．次の付帯条件

$$\boldsymbol{\alpha}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{f}} \quad \text{（ただし，・は時間微分）} \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\boldsymbol{x}|_{t=0}=\boldsymbol{x}_0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}|_{t=0}=\dot{\boldsymbol{x}}_0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

のもとにおける最小2乗変分原理

$$J=\int_0^T \frac{1}{2}\{\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{\alpha}^T\ddot{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\beta}^T\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\varphi})\}^2\,dt \quad \cdots\cdots(4)$$

を考えると[1]，式 (4) は部分積分を用いて変形すれば，ただちに次式が導かれる．

$$J=\int_0^T\left[\frac{1}{2}(T^*\boldsymbol{\varphi})^T(T^*\boldsymbol{\varphi})-\boldsymbol{\varphi}^T\overline{\boldsymbol{f}}\right]dt$$
$$-[\dot{\boldsymbol{\varphi}}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}^T(\boldsymbol{\alpha}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x})]_{t=0,T}$$
$$+\int_0^T\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\,dt \quad \cdots\cdots(5)$$

微分演算子 T, T^* その他の記号はほとんど，論文中におけるものと同様とする．式(5) の右辺第1項，第2項は著者らが与えた汎関数と同じであり，第3項は付帯条件からユニークに決まるものである．したがって，停留条件に関して，著者らの与えた汎関数と式(4) に示した最小2乗汎関数の等価性は明らかである．

次に，有限要素解析による誤差について考察してみよう．著者らの与えた汎関数

$$J(\boldsymbol{\varphi})=\int_0^T\left[\frac{1}{2}(T^*\boldsymbol{\varphi})^T(T^*\boldsymbol{\varphi})-\boldsymbol{\varphi}^T\overline{\boldsymbol{f}}\right]dt$$
$$-[\dot{\boldsymbol{\varphi}}^T\overline{\boldsymbol{F}}_1+\boldsymbol{\varphi}^T\overline{\boldsymbol{F}}_0]_{t=0,T} \quad \cdots\cdots(6)$$

において，真の解を $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ とし，$\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\boldsymbol{\varepsilon}$ （ただし，$\boldsymbol{\varphi}|_{t=T}=\dot{\boldsymbol{\varphi}}|_{t=T}=0$ を強制するのであるから，$\boldsymbol{\varepsilon}|_{t=T}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{t=T}=0$）とすれば，

$$J(\boldsymbol{\varphi})=\int_0^T\left[\frac{1}{2}(T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}})^T(T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}})+(T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}})^T(T^*\boldsymbol{\varepsilon})\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(T^*\boldsymbol{\varepsilon})^T(T^*\boldsymbol{\varepsilon})-\hat{\boldsymbol{\varphi}}^T\overline{\boldsymbol{f}}-\boldsymbol{\varepsilon}^T\overline{\boldsymbol{f}}\right]dt$$
$$-[(\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^T\overline{\boldsymbol{F}}_1+(\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\boldsymbol{\varepsilon})^T\overline{\boldsymbol{F}}_0]_{t=0,T} \quad \cdots\cdots(7)$$

式(7) を部分積分して変形すれば，

$$J(\boldsymbol{\varphi})=\int_0^T\left[-\frac{1}{2}(T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}})(T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}})+\frac{1}{2}(T^*\boldsymbol{\varepsilon})^T(T^*\boldsymbol{\varepsilon})\right]dt$$
$$+\int_0^T(TT^*\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\hat{\boldsymbol{f}})^T(\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\boldsymbol{\varepsilon})\,dt$$
$$+\{\boldsymbol{\alpha}(T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}})-\overline{\boldsymbol{F}}_1\}^T(\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})|_{t=0,T}$$

$$+\{-\boldsymbol{\alpha}T^*\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}-\boldsymbol{\beta}T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\bar{\boldsymbol{F}}_0\}^T(\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\boldsymbol{\varepsilon})|_{t=0,T} \quad \cdots\cdots(8)$$

式(8) の右辺第2項以下は論文中における条件から消えることになり，結局，

$$J'(\boldsymbol{\varphi})=-\frac{1}{2}\int_0^T(T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}})^T(T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}})\,dt+\frac{1}{2}\int_0^T\{T^*\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi})\}^T\{T^*(\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi})\}\,dt \quad \cdots\cdots(9)$$

と同等である．式(9) の右辺第1項は正解なのであるから，$J'(\boldsymbol{\varphi})$ を最小化することは右辺第2項を最小化することに等しい．したがって，$\boldsymbol{\varphi}$ を区分3次多項式で近似して有限要素法で解くことは，$\boldsymbol{\varphi}$ の許される範囲内で，

$$\int_0^T\{T^*(\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi})\}^T\{T^*(\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi})\}\,dt \quad \cdots\cdots(10)$$

を最小にする解を得ることなのであり，この意味で最小2乗法と等価である．また，式(10) をエネルギーノルム $|||\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi}|||^2$ で表わし，

$$\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi}\|^2=\int_0^T(\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi})^T(\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi})\,dt \quad \cdots\cdots(11)$$

とすれば，正の定数 c に対して

$$|||\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi}|||^2 \geqq c\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi}\|^2 \quad \cdots\cdots(12)$$

となることが知られている[1]．

（2） 漸化式の場合の安定性および精度について，討議者の考えを述べたい．

マトリックス $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}$ を次のように定めれば，

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{\beta}\\ 0 & \boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta} & -\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\\ \mathrm{II} & 0\end{bmatrix}$$

（ただし，II は単位マトリックス）……(14)

論文中，式(28) は，

$$\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \boldsymbol{x}\end{Bmatrix}_{i+1}=-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}\boldsymbol{L}\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \boldsymbol{x}\end{Bmatrix}_i \quad \cdots\cdots(15)$$

と書けるから，$-\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}$ と $-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}\boldsymbol{L}$ の固有値は等しく，$\boldsymbol{M}$ の固有値 λ_j に対して $e^{\lambda_j\Delta t}$ に近似されていなければならない[2]．また，$-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}\boldsymbol{L}$ の固有ベクトルは $\boldsymbol{M}$ の固有ベクトルに等しくなければならない．

本討議における**図-1**および**図-2**は，一自由度系 $\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}=0$ について $-\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}$ の固有値解析を行い，絶対値と固有周期の伸びについて図示したものである．$\ddot{x}+x=0$ で計算したことは，無減衰で一自由度系の自由振動の方程式が適当な変数変換でこの形に直せることから，一般性を失うことにならない．$\omega\Delta t=2$ 程度までは良い近似をしているが，次第に近似が悪くなり，$\omega\Delta t=7.6$ 付近以上では，固有値が共役複素数でなくなり，2つの異

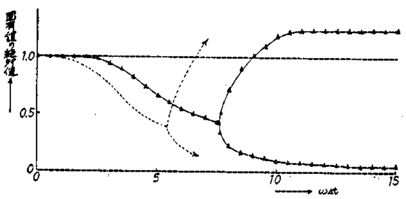

図-1　固有値の絶対値

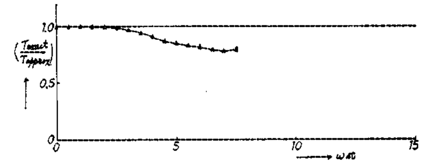

図-2　周期の伸び（Texact，Tapprox はそれぞれ正解と近似解の固有周期）

なる実数になる．絶対値については，一方は0に近づくが，他方は $\omega\Delta t=8.9$ 付近で1を越える．すなわち，論文中，**図-5** において $\omega\Delta t=1, 2, 4, 8$ に対する計算を行い，安定な計算結果を示しているが，$\omega\Delta t=8.9$ 付近以上では振動しない発散的な解が得られるはずなのである．周期の伸びについても $\omega\Delta t=2$ 以上になると，伸びが目立ってくる．したがって，無条件安定でないことは明らかであるが，さらに次に述べるような大きな弱点がこのスキームには存在する．

時間積分のほかの多くのスキームが一自由度系で議論されているのは，漸化式の係数マトリックスがある変換により同時に対角化可能だからである．しかるに，このスキームかは $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ が対称であるとしても，任意の $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ に対して，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$, $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T$, $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}^T$, $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\alpha}^T$ を同時にある変換で対角化することは不可能である．減衰マトリックス $\boldsymbol{\beta}$ がレイリー型，($\boldsymbol{\beta}=a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\gamma}$，ただし a, b は任意の正の定数）とすれば，$\boldsymbol{\alpha}=c\mathrm{II}$（$c$ は任意の正の定数，II は単位マトリックス）の場合に限ってのみ，すべてが対角化可能である．つまり，$\boldsymbol{\beta}$ がレイリー型であっても $\boldsymbol{\alpha}=c\mathrm{II}$ の場合以外，多自由度系を自由度系に置きなおして検討できないのである．このことは，$\omega\Delta t$ が大きくなるに従い，$-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}\boldsymbol{L}$ の固有ベクトルが $\boldsymbol{M}$ の固有ベクトルから離れていき，初期ベクトルが無荷重，無減衰の条件下の逐次計算過程で保存されないことをも意味している．

無減衰の多自由度系について，上述の固有値解析を行い，最大固有値について，$\omega_{\max}\Delta t$ と絶対値の関係を調べたところ，本討議の **図-1** に点線で示すような結果が得られた．$\omega_{\max}\Delta t=2.6$ より相当以前にすでに分岐が起こり，一方は1を越えていく．討議者が片持はりを計算モデル（2, 3, 6 要素分割）に取り上げて検討した限りでは，この傾向は系の最大固有値の幅が広がるほど顕著

になる．したがって，数 10 あるいは数 100 自由度の系の応答解析を行う場合に，$\omega_{\max}\Delta t=2$ まで安定範囲が保証されることすら疑わしいことになる．論文中，**図-3** に示された多自由度の応答計算は $\boldsymbol{\alpha}=c\mathrm{II}$ の形になることから，最も条件のよい場合である．$\boldsymbol{\beta}$ はレイリー型で置いてないが，対角マトリックス $\boldsymbol{\beta}^*=2\boldsymbol{hw}$ から逆算して求めているので，レイリー型と同様のことがいえる．

計算量の観点から本スキームを見ても，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ が $(n\times n)$ マトリックスとしたとき，漸化式の係数マトリックスを作るために $2n$ 元の逆マトリックス計算を含む所から，決して少ないとはいえない．すでに発表されている無条件安定なスキームで計算するのに要するのと同等あるいはそれ以上の計算時間が必要になると思われる．

以上の理由から，討議者はこのスキームが精度および安定性の面で必ずしもよいとはいい切れないと考える．

参考文献

1) 坂井藤一：力学における変分原理の一般化について，土木学会論文報告集，No. 249, 1976 年 5 月．
2) 塩尻弘雄・中村秀治：構造解析における動的応答解析の一方法について，土木学会論文報告集，No. 246, 1976 年 2 月．

▶回答者 (*Closure*)――――――――吉田　裕・増田陳紀（東京工業大学）・村田　修（日本国有鉄道）
By Yutaka Yoshida, Nobutoshi Masuda and Osamu Murata

筆者らの論文を詳細に検討され，熱心な討議をいただいたことを心から感謝します．討議項目に対して回答する前に次の諸点を確認しておきたいと考えます．すなわち，① 当該論文における筆者らの主張は，境界値問題の解法として確立されている有限要素技法を初期値問題の解析に適用するために，初期値問題としての運動方程式を境界値問題に変換しよう，という発想にあること．② 有限要素技法を適用して得られる具体的な解析過程を平易かつ明確に構成するために，構造問題において最も基本的な最小ポテンシャルエネルギーの原理と等価な変分原理を構成することを目的とし，相当な模索の過程を経てこれを実現し得たこと．③特に，本来の目的である運動方程式の解が基本変数と分離され，自然変数として明確に考慮されるような変分原理を構成する過程は筆者らの少なからず苦心した点であること．④ 新たな発想に基づいて筆者らが提案し得た積分法に，今後の新たな発展の可能性が秘められていることを確信してはいるが，当該論文の範囲内で完璧なものであるというようなことは考えたこともないし，書いてもいないこと．⑤論文中にも記したように，提案した積分法の精度などに関する詳細な検討は今後の課題と考えていたこと．その理由は，提案した基本的な積分過程に基づいて数多くの積分公式を具体化し得ると考えており，論文中に具体的に示した漸化公式そのものもそれらのバリエーションのうちの1つにすぎないと考えたためである．したがって，論文中に示した計算結果は，読者に，提案した積分法の精度に関する位置付けのあらましだけでも判断していただければ，という気持から数値計算結果のありのままを示したものであること．⑥ 計算過程がほかの公式との相対でかなり複雑であり計算量が多くなる，という点は，筆者ら自身が論文中において再三触れた点であること．

以上，当該論文に対する筆者らの認識を確認したうえで，各討議項目に回答します．

（1） 最小2乗法との等価性に関する項目について

イ）討議の基本となっている式(4)（（　）で示した式番号は，討議文中の式番号を表わす）そのものが，上述①～③ における筆者らの発想の原点に関わるものである．新たに導入した変数 φ の関数として x を定義するという原論文中の式 [3]（[　] で示した式番号は，原論文中の式番号を表わす）すなわち，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\varphi}^{(2)}-\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\varphi}^{(1)}+\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\varphi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

から出発して，仮に2乗の形で表わされることを示し得たとしても，そのことが筆者らの論文に対する討議としてどれほどの意味があるのだろうか，という率直な疑問が残るが，討議者の論点について若干ふれておきたい．まず，

ロ）解析の主題である運動方程式（式(1)）そのものを付帯条件として導入し，式(5) の x^Tx の項が付帯条件からユニークに決まるなどという論法は本質を忘れた暴論である．筆者らの主題は変分原理に基づいて運動方程式を近似的に解くためのアルゴリズムを構成しようとするものであり，筆者らの与えた変分原理（式 [5]）は論文中においてはりの解析と対応させて再三触れたように，構造問題において，最小ポテンシャルエネルギーの原理に基づいてつり合い方程式を近似的に構成することとまったく同じ立場に立って，時間軸に関して運動方程式を近似的に解くための解法を構成することを目的としているのである．すなわち，筆者らの変分原理は式(16) を付帯条件として，主題としての運動方程式を評価するものであり，変分原理が運動方程式と等価であることに意義があるのである．討議者が示しているように，主題と

しての運動方程式そのものを付帯条件として導入するというのであれば，運動方程式に対応する原理としての意義は失われる．式(4) に基づくものはあくまでも式(16)と等価なものである．さらに運動方程式を付帯条件として導入するのであれば，式の展開の結果として筆者らの原理と同じ形式が得られたとしてもなんら不思議なことではないが，そのことと変分原理とはまったく次元の異なる問題である．無理をすれば２乗の形で表わすことができる，ということを示すことにもなんらかの意義はあるとは思うが，そのことをもって最小２乗変分原理と等価であるというような議論は変分原理の基本を忘れた議論のための議論としかいいようがない．変分原理は式の展開の遊びではない．

ハ）式(6)～式(10) における解法の誤差に関する議論についてはその目的が判然としない．もし，筆者らの解法に関する精度ともいうべきものを議論することが目的であるとすれば，失礼ないい方になるが，いまさらこの程度のことを指摘されてもなんと答えてよいかわからない．なぜなら，筆者らの与えた汎関数は，変分原理としては最も基本的な最小ポテンシャルエネルギーの原理の汎関数とその形式においてまったく同じものであり，有限要素法の誤差論に関連してこれまでに公表されている数多くの知見の大部分が適用可能なのであり，討議者が指摘している程度の事柄はその極く基本的な事項にすぎないからである．なお，討議者が対象としているのは変数 φ の誤差であるが，筆者らの主題は運動方程式を解くことであり，変数 φ を問題にしても直接的には役立たない．対象とすべきは変数 x であり，これは弾性問題における応力評価に関連するものである．

ニ）もし，この誤差に関する議論の目的が，式(10) が２乗の形になるから，筆者らの与えた変分原理が最小２乗法と等価であるということを指摘することにあるのであれば，回答はすでに述べたところに尽きるし，あまりにも不毛な討議であるといわざるを得ない．繰り返すが，変数 φ を導入することそのものが筆者らのアイディアであり，論文中における主張の重要な部分なのであって，論文の終わりのことばで触れたことは，最小２乗変分原理に基づいたのではこのようなアイディアは生まれてこないということである．筆者らの発想の原点に関わる上述の点を出発点として２乗の形になるかどうかといった討議が筆者らの論文に対してなされること自体まったく理解に苦しむところである．さらに，どのような形においてでも２乗の形に表わすことができるものはすべて最小２乗変分原理であるといった議論は討議以前の問題である．

（２） 漸化式の安定性および精度に関する項目について

イ）今回の論文における筆者らの主張は新たな発想そのものであり，そこから従来のものとは本質的に異なる積分法を具体化した過程である．そこに秘められた新たな発展の可能性をこそ主張したいのである．以下に討議項目に対して回答したい．順序が前後するが，

ロ）減衰マトリックス $\boldsymbol{\beta}$ がレィリー型であれば，漸化式の係数マトリックスを同時に対角化することが可能な形に漸化公式を変換することは容易であって，提案した公式が対角化できない形になっていることをもって論文全体に大きな欠陥があるかのような討議は遺憾である．すなわち，論文中の式 [3]，すなわち，式(16) を

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\varphi}^{(2)}-\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\varphi}^{(1)}+\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\varphi}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

と定義し直し，式 [5]～式 [8] における $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ を $\boldsymbol{\alpha}^*$, $\boldsymbol{\beta}^*$, $\boldsymbol{\gamma}^*$（ここに，$\boldsymbol{\alpha}^*=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{-1/2}$, $\boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{-1/2}$, $\boldsymbol{\gamma}^*=\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\alpha}^{-1/2}$）で置き換えれば，各式とも矛盾なく原式の意味を持つ．また，式 [9] は原式のまま成立する．したがって，式 [22] の時間要素マトリックスの各要素 $\boldsymbol{k}_{ij}$ は，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ を $\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*$ で置き換えれば式の形はまったく原式のままである．$\boldsymbol{\alpha}$ が対称であれば，$\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\gamma}^{*T}=(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{-1/2})(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\alpha}^{-1/2})^T=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\gamma}^T$ などとなり，$\boldsymbol{\alpha}^{-1/2}$ を計算する必要はない．$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}$ が対称であり，$\boldsymbol{\beta}$ がレィリー型であれば，$\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha}^{*T}$, $\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\beta}^{*T}$, $\boldsymbol{\gamma}^*\boldsymbol{\gamma}^{*T}$, $\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\beta}^{*T}$, $\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\gamma}^{*T}$, $\boldsymbol{\gamma}^*\boldsymbol{\alpha}^{*T}$ を同時に対角化することが可能であり，スキームの安定性，精度などを１自由度系で議論することが可能である．すなわち，公式の内容における $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ を $\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*$ で置き換えたものに基づけば，多自由度系，特に対象系の $\omega_{\max}$ と $\omega_{\min}$ の差が大きい場合に対する討議者の指摘は意味がなくなる．

ハ）論文中に提案した漸化公式の精度および安定性について討議者が **図-1** に示した特性は討議者の指摘の通りである．しかし，どのような解法にしても，近似解法はあくまで近似解法であって，必ずより精度の良い解法が可能であることは常識であるから，精度が良いか悪いかといった議論は比較する対象との総合的，相対的な判断である．時間刻み幅 $\omega\cdot\varDelta t$ と減衰係数 ζ とを変数として，論文中に提案した漸化公式の特性根を求め，規範

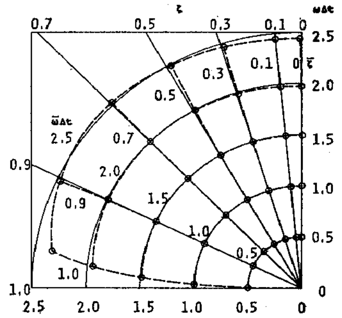

図-3 $\lambda\cdot\varDelta t$ 平面 [$(\omega\varDelta t, \zeta)$-平面] のひずみ

伝達関数の特性根 $e^{\lambda\cdot\Delta t}$ と $\lambda\cdot\Delta t$ 平面で比較することによって解法の精度を評価することができるが[3]，筆者らの漸化公式の $\lambda\cdot\Delta t$ 平面のひずみを図示したものが **図-3** である．

ニ）討議者の指摘のとおり，解析の対象によっては，積分公式が無条件に安定なものでなければ，いかに精度の良い公式であっても，それの適用に制約を受ける場合がある．このような場合には，筆者らの提案する時間要素を２つ用いて構成される漸化公式を考えることができる．すなわち，論文中の式 [22] の $\boldsymbol{k}_{ij}$ を $t_m=\Delta t/2$ として求め，これらの $\boldsymbol{k}_{ij}$ によって構成される $\boldsymbol{K}_{ij}$ を用いて，式 [29] に対応する時間刻み幅 Δt に対する積分漸化公式を次のように構成することができる．

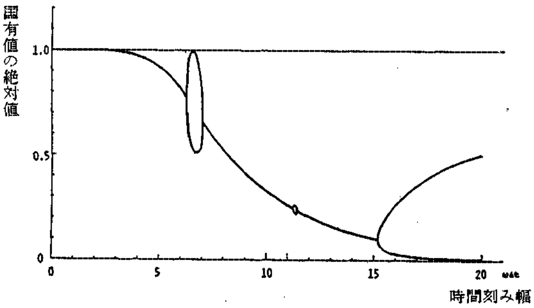

図-4　固有値の絶対値と時間刻み幅

$$\boldsymbol{F}_{i+1}=[-\boldsymbol{K}_{21}\cdot(\boldsymbol{K}_{11}+\boldsymbol{K}_{22})^{-1}\cdot\boldsymbol{K}_{21}]\cdot[\boldsymbol{K}_{11}-\boldsymbol{K}_{12}\cdot(\boldsymbol{K}_{11}+\boldsymbol{K}_{22})^{-1}\cdot\boldsymbol{K}_{21}]^{-1}\cdot(-\boldsymbol{F}_i+\bar{\boldsymbol{F}}_i) \quad\cdots(18)$$

式(18) の漸化公式に対して，討議者の示した **図-1** に対応する特性図を描いたものが **図-4** である．$\omega\Delta t\to\infty$ に対して，固有値は異なる実数 0 および 0.638・・・ に漸近する．上記の漸化公式が安定なものであることがわかる．

ホ）筆者らの提案した漸化公式は逆行列計算を必要とし，計算量が多いという点については原論文中で再三述べたところであり，上記の式(18) に示した漸化公式ではさらに計算量が多くなる．筆者らの提案した公式を含めて，これまでに具体化されている積分公式のうちのどの公式を用いるかは，計算対象の特性，計算の目的と積分公式の特性とを総合的に判断して決めることである．あまりにも当然のことではあるが，筆者らの提案した積分公式そのものがすべての点において優れており，完璧なものであるというようなことは考えたこともないということを記して，回答の結びとしたい．

参 考 文 献

3）渡辺嘉二郎・嶋田健司・清水信之・鎌田美知枝・山本鎮男：構造解析のための常微分方程式の直接数値積分法—積分法の特性評価（その１・２）—，機械学会講演論文集，pp. 103-108, 51. 10.