

波状境界をもつ二次元管路流の解析*

ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL FLOW IN A WAVY CONDUIT

日野 幹雄**・宮 永 洋 一***

By Mikio HINO and Yoichi MIYANAGA

要 旨 任意形状の河床波上の流れの基本的な性質を理解するために波状境界上の二次元流の解析および実験を行った。

はじめに渦動粘性係数の仮定などの「あいまいさ」が理論に混入することを避けるため、流れを層流とする前提のもとに渦度方程式を解き、速度分布の実験値と比較した。この解を用いて流れの境界面からの剝離が発生していないにもかかわらず境界面に働くせん断応力と波面との間に、位相差 ϕ が存在することを示し、 ϕ と波形パラメーターとの関係式を求め、実験と比較した。

次に、同様の境界条件に従う乱流を混合距離理論の仮定によって解析した。理論解を実験によって検証し、層流理論と比較しつつ乱流の場合の ϕ を検討した。

以上の解析・実験結果を基礎に、移動床面の不安定性の一因を ϕ によって説明した。

1. 序 論

河床不安定理論は Kennedy (1963)¹⁾ がポテンシャル理論に基づく解析方法を発表して以後、河床波の発生機構を説明する理論として多くの研究者の関心を集めた。Reynolds (1965)²⁾、林 (1970)³⁾、Engelund (1970)⁴⁾、Fredsoe (1974)⁵⁾ らの理論はその代表的な例といえる。

ここで一つの問題点は、微小擾乱に対する移動床面の不安定性の原因の扱い方である。Kennedy、林は局所的な流砂量の変化と河床形状との間には位相差 δ が存在するとしている（林の理論では河床勾配の影響が考慮されており、Kennedy の δ とは異なる）。ただし、ポテンシャル理論から直接 δ を決定することはできない。Reynolds は開水路せん断流の一次元解析によって δ を流れの平均量と結びつけているが、速度分布や抵抗係数

の変化が考慮されておらず、理論に「あいまいさ」が含まれる。また、Eegeland, Fredsoe は渦動粘性係数を一定としてせん断流場を解き、 δ を用いずに河床波が発生することを示した。しかし、この理論では不安定性の原因は明確にされていない。以上をまとめると表-1のようになる。

表-1 河床不安定理論

	流れの仮定	不安定性の原因
Kennedy, 林	二次元, ポテンシャル流	δ (未知パラメーター)
Reynolds	一次元, 粘性流	δ (流れの平均量より決定)
Engelund, Fredsoe	二次元, 粘性流	直接の理由説明なし(陰的)

本研究は不明確なパラメーターや仮定の導入を極力避け、波状境界上の流れの解析を行うことにより、河床波上の流れの基本的な性質を理解することを目的とした。

波状境界上の一方向流れについては、風波の発生機構の解明を目的とした Miles (1957)⁶⁾、Benjamin (1959)⁷⁾、Stewart (1970)⁸⁾、Davis (1970)⁹⁾ (1972)¹⁰⁾ らの一連の研究および水面形状と境界面の相互作用を解析した岩佐ら (1968)¹¹⁾ の研究が挙げられる。

Miles は対数分布の主流上の振動流れを非粘性とし、乱れは波面の影響を受けないとする“quasi-laminar model”を提案した。これに対し、Stewart は深海波上の空気流における振動流速成分の測定結果から、Miles の理論では波面上の速度分布を正しく予測できないとしている。一方、Benjamin は速度場を表わす適切な座標は平均波面ではなく、瞬間的かつ局所的な波面からの距離であるとして直交曲線座標を導入し、波状境界上の半無限の層流を解析している。Davis はこの考え方を乱流に拡張し、Reynolds 応力の関数形を仮定することによって“turbulent model”を示した。その結果は Stewart の実測値を定性的にはよく説明した。

岩佐らの解析では、速度分布の相似性を仮定することにより、問題は一次元化されているが、抵抗係数が未知となり、振動法を用いているが、オーダーの点で二、三

* 本論文は、すでに発表した文献(14), (21)を統一し、詳述したものである。

** 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 (財)電力中央研究所 環境水理部河川環境研究室

の論議がある¹²⁾。

Miles 以下の一連の研究の関心は主として固定境界面の圧力分布に向けられている。その理由は風波の発生が圧力に起因する不安定現象と考えられるからである。しかし、河床波の発生においてはせん断応力の分布がより重要である。Benjamin は波面変動とせん断応力分布の間に位相差が存在することを示した。Hsu ら¹³⁾(1971) は波状円管内の空気流の測定結果から乱流の場合にも位相差が存在することを確認している。この位相差が粘性に起因する^{注1)}ことは明らかであり、流れの平均量や波型形状との関係を知ることが移動床面の不安定性を理解する一つのカギになると思われる¹²⁾。そこで本研究では次の手順で解析をすすめた。

- (i) 流れを層流とする前提に基づく任意形状の波状境界上の二次元流の解析とその実験的検討。
- (ii) 混合距離理論を仮定した波状境界上の二次元の乱流の解析とその実験的検討。

層流の解析から始める理由は、渦動粘性係数という不明確な量をいきなり導入することを避けるためである。理論の第一段階では現象の質的理解が重要であり、波状境界上の乱流の基本的な性質は層流においても見出しうると考えた。したがって層流状態で実際に河床波が発達することを主張するものではない¹⁴⁾。

次に渦動粘性係数を導入し、混合距離理論が成立するものと仮定して乱流の場合の解析解を求める。結果を層流解と実測値の両方から比較することにより、層流理論を実際の河床波上の流れに拡張しようとするものである。

河床波は普通開水路に発生するものを指すが、開水路流では水深も未知量となり、さらに仮定が必要となる。本研究ではこれを避けるため、流れを管路流とした。すなわち、水面波の効果を除くことによって理論展開をより明晰なものとした。実際、奈良井 (1970)¹⁵⁾、岩佐ら (1972)¹⁶⁾によれば管路内に河床波の発生することが観測されており、移動床面の不安定性の一因は、管路流においても見出しうるといえる。

2. 任意形状の波状境界をもつ二次元管路の層流

(1) 理論解析

図-1 のような波状境界をもつ二次元管路の非圧縮で定常な層流を考える。ここに、波状関数 $\eta(x)$ は任意の周期関数とする。

注 1) 波状境界上の粘性流における波面と圧力、せん断応力分布の間に位相差が生ずることを(数式的、物理的に明確にとらえた Benjamin にちなんで) Benjamin 機構と呼ぶことを提案する。

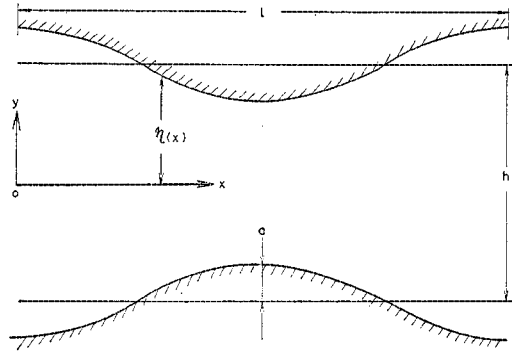


図-1 境界形状 (波型は任意)

この問題は流関数 ψ を導入し、摂動法によって解くことができる。なお、波状境界をもつ円管内の層流については Chow ら(1972)¹⁷⁾の解がある。

(a) 基礎方程式および境界条件

x, y 方向の速度成分を u, v とし、流関数 ψ を式(1)で定義する。

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

基礎方程式は Navier-Stokes の方程式の回転をとって得られる渦度方程式(2)である。

$$\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}\right) \nabla^2 \psi = \nu \nabla^4 \psi \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, ν は流体の動粘性係数である。

境界条件は流量が一定、 x 軸上で v が 0、および境界面上で速度が 0 となることより式(3a), (3b)のように表わされる。

$$y=0 : \psi=0, \frac{\partial \psi}{\partial x}=0 \dots\dots\dots (3a)$$

$$y=\pm \eta : \psi = \mp \frac{Q}{2}, \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \dots\dots (3b)$$

ここに、 Q は流量で、断面平均流速の一波长平均を u_m とすると $Q=u_m h$ である。

いま、 h, l, u_m を用いて変数を無次元化する。無次元パラメータ δ, ϵ の定義を含めてこれを式(4)のように表わす。~をつけた量が無次元化された変数である。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\psi} &= \psi/u_m h, R_e = u_m h/\nu, \\ \tilde{x} &= x/l, \tilde{y} = y/h, \tilde{\eta} = \eta/h = \frac{1}{2} + \epsilon \tilde{\theta}, \\ \delta &= h/l, \epsilon = a/h, \\ \tilde{\nabla}^2 &= \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

無次元化された基礎方程式、境界条件はそれぞれ式(5), (6a), (6b)のようになる。

$$R_e \delta \left(-\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi} = \tilde{\nabla}^4 \tilde{\psi} \dots\dots (5)$$

$$\tilde{y}=0 : \tilde{\psi}=0, \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}=0 \dots\dots\dots (6a)$$

$$\bar{y} = \pm \bar{\eta} : \bar{\psi} = \mp \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = 0 \dots\dots (6b)$$

(b) 振動法による解

式 (5) を (6a), (6b) の条件で解くために流関数を δ について,

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_0 + \delta \bar{\psi}_1 + \delta^2 \bar{\psi}_2 + \dots \dots\dots (7)$$

と展開し, これを式 (5) に代入する. δ の各次数の項について係数を 0 とおくと $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots$ に関する次のような線形微分方程式とその解を得る.

0 次 の 解

$$\frac{\partial^4 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}^4} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\bar{y} = 0 : \bar{\psi}_0 = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}} = 0 \dots\dots\dots (9a)$$

$$\bar{y} = \pm \bar{\eta} : \bar{\psi}_0 = \mp \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}} = 0 \dots\dots (9b)$$

$$\bar{\psi}_0 = \frac{1}{4} Y(Y^2 - 3) \dots\dots\dots (10)$$

ただし, $Y = \bar{y}/\bar{\eta}$ である.

1 次 の 解

$$\frac{\partial^4 \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}^4} = R_e \left(-\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}^2} \dots\dots\dots (11)$$

$$\bar{y} = 0 : \bar{\psi}_1 = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{x}} = 0 \dots\dots\dots (12a)$$

$$\bar{y} = \pm \bar{\eta} : \bar{\psi}_1 = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}} = 0 \dots\dots (12b)$$

$$\bar{\psi}_1 = \frac{3}{1120} R_e \epsilon \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} Y(Y^6 - 7Y^4 + 11Y^2 - 5) \dots\dots\dots (13)$$

2 次 の 解

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}^4} = & -2 \frac{\partial^4 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + R_e \left(-\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_1}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}^3} \right) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\bar{y} = 0 : \bar{\psi}_2 = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{x}} = 0 \dots\dots\dots (15a)$$

$$\bar{y} = \pm \bar{\eta} : \bar{\psi}_2 = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}} = 0 \dots\dots (15b)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2 = & \frac{3}{40} \left\{ \epsilon \bar{\eta} \frac{d^2 \bar{g}}{d\bar{x}^2} - 4\epsilon^2 \left(\frac{d^2 \bar{g}}{d\bar{x}^2} \right)^2 \right\} Y(Y^4 - 2Y^2 + 1) \\ & + \frac{R_e^2}{3449600} \left\{ \epsilon^2 \left(\frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \right)^2 G(Y) - \epsilon \bar{\eta} \frac{d^2 \bar{g}}{d\bar{x}^2} H(Y) \right\} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここに, G, H は次のような関数である.

$$\begin{aligned} G(Y) = & 98Y^{11} - 1155Y^9 + 4488Y^7 - 8778Y^5 \\ & + 8222Y^3 - 2875Y \dots\dots\dots (16a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y) = & 35Y^{11} - 385Y^9 + 1518Y^7 - 3234Y^5 \\ & + 3279Y^3 - 1213Y \dots\dots\dots (16b) \end{aligned}$$

3 次 の 解

$$\frac{\partial^4 \bar{\psi}_3}{\partial \bar{y}^4} = -2 \frac{\partial^4 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + R_e \left\{ -\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial^3 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}^3} \right. \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{\partial^3 \bar{\psi}_2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial^3 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + \frac{\partial^3 \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}^3} \right) \\ & - \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_1}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}^3} \\ & - \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}^3} \left. \right\} \dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\bar{y} = 0 : \bar{\psi}_3 = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial \bar{x}} = 0 \dots\dots\dots (18a)$$

$$\bar{y} = \pm \bar{\eta} : \bar{\psi}_3 = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial \bar{y}} = 0 \dots\dots (18b)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_3 = & \frac{R_e \epsilon \bar{\eta}}{201600} \frac{d^3 \bar{g}}{d\bar{x}^3} \left\{ P(Y) + \frac{R_e^2}{147680} R(Y) \right\} \\ & + \theta(\epsilon^2, \epsilon^3) \dots\dots\dots (19) \text{注2} \end{aligned}$$

ここに, P, R は次のような関数である.

$$\begin{aligned} P(Y) = & -35Y^9 + 168Y^7 - 198Y^5 + 32Y^3 + 33Y \\ & \dots\dots\dots (19a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(Y) = & 630Y^{15} - 9800Y^{13} + 60970Y^{11} \\ & - 220220Y^9 + 505674Y^7 - 792974Y^5 \\ & + 699346Y^3 - 243626Y \dots\dots\dots (19b) \end{aligned}$$

(c) 速度成分

速度成分についても (7) にならって,

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \delta \bar{u}_1 + \delta^2 \bar{u}_2 + \dots \dots\dots (20)$$

$$\bar{v} = \delta \bar{v}_1 + \delta^2 \bar{v}_2 + \dots \dots\dots (21)$$

と展開すると, 式 (1), (10), (13), (16) より次のように表わされる.

$$\bar{u}_0 = \frac{3}{4\bar{\eta}} (1 - Y^2) \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 = & \frac{3R_e}{1120\bar{\eta}} \epsilon \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} (5 - 33Y^2 + 35Y^4 - 7Y^6) \\ & \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = & \frac{3}{40} \left\{ \frac{4\epsilon}{\bar{\eta}} \left(\frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \right)^2 - \epsilon \frac{d^2 \bar{g}}{d\bar{x}^2} \right\} (1 - 6Y^2 + 5Y^4) \\ & + \frac{R_e^2}{3449600} \left\{ \epsilon^2 \left(\frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \right)^2 \frac{dG}{dY} - \epsilon \frac{d^2 \bar{g}}{d\bar{x}^2} \frac{dH}{dY} \right\} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dY} = & 1078Y^{10} - 10395Y^8 + 31416Y^6 \\ & - 43890Y^4 + 24666Y^2 - 2875 \dots\dots (24a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dY} = & 385Y^{10} - 3465Y^8 + 10626Y^6 \\ & - 16170Y^4 + 9837Y^2 - 1213 \dots\dots (24b) \end{aligned}$$

である. また,

$$\bar{v}_1 = \frac{3}{4\bar{\eta}} \epsilon \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} Y(1 - Y^2) \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 = & \frac{3R_e}{1120\bar{\eta}} \left\{ \epsilon^2 \left(\frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \right)^2 \right. \\ & \cdot Y(5 - 33Y^2 + 35Y^4 - 7Y^6) \\ & \left. - \epsilon \frac{d^2 \bar{g}}{d\bar{x}^2} Y(5 - 11Y^2 + 7Y^4 - Y^6) \right\} \dots\dots (26) \end{aligned}$$

注 2) 繁雑な計算を避けるため, ϵ の 2 次以上の項は無視した.

となる。

(d) Benjamin 機構

まず、無次元化される前の境界面に働くせん断応力を τ_s とすると、流体の分子粘性係数を μ としてこれは、

$$\tau_s = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=\bar{y}} \dots\dots\dots(27)$$

により計算される。無次元化すれば次式を得る。

$$\bar{\tau}_s = \frac{\tau_s}{\rho u_m^2} = -R_e^{-1} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \delta \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{y}=\bar{\eta}} \dots\dots(28)$$

式 (28) に式 (22)~(26) を代入すると、 δ の 2 次の項までとったせん断応力は、

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_s = & \frac{3 R_e^{-1}}{2 \bar{\eta}^2} - \frac{3}{35 \bar{\eta}^2} \delta \epsilon \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} + \frac{3 R_e^{-1}}{2 \bar{\eta}^2} \delta^2 \\ & \cdot \left\{ \left(\frac{2}{5} + \frac{8}{8085} R_e^2 \right) \epsilon \bar{\eta} \frac{d^2 \bar{g}}{d\bar{x}^2} \right. \\ & \left. - \left(\frac{13}{5} + \frac{79}{40425} R_e^2 \right) \epsilon^2 \left(\frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \right)^2 \right\} \dots\dots(29) \end{aligned}$$

となる。

式 (29) に Benjamin 機構を見ることが出来る。すなわち、右辺第 1 項は境界形状と同位相に変化するが、第 2 項は境界形状の勾配の影響により crest の上流側 ($d\bar{g}/d\bar{x} < 0$) でせん断応力が増すことを表わす。第 3 項には境界形状の曲率の影響および勾配の非線形効果が見られる。

曲率の項は境界形状と同位相に変化するので、いま、非線形項を除いて考えるとせん断応力のピークは常に上流側に移ることになる。このことは Benjamin の解析結果によっても示されている。

式 (29) を用いて位相差 ϕ と波形パラメーターとの関係を求める。陽な形に求めるために、 ϵ の 2 次以上の項を省略し、 $\bar{g} = \exp\{2\pi i \bar{x}\}$ 注3) を代入すると、

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\pi R_e \delta}{35 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{5} \left(1 + \left(\frac{R_e}{20.1} \right)^2 \right) \delta^2 \right\}} \right] \dots\dots(30)$$

を得る。 R_e をパラメーターとして、 ϕ と δ の関係を図-2 に実線で示した。 ϕ は常に正であるが、 $0 < \delta < 1$ で極大値を持ち、その値は R_e が大きいほど大きく、また、ピークも顕著になる。

なお、破線は δ の 3 次の解を加えて位相差を計算したもので、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_s = & 6 R_e^{-1} - \epsilon \left\{ 24 R_e^{-1} \bar{g} + \frac{12}{35} \delta \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} - \frac{2}{5} \right. \\ & \cdot \left(3 R_e^{-1} + \frac{4}{539} R_e \right) \delta^2 \frac{d^2 \bar{g}}{d\bar{x}^2} + \frac{1}{75} \\ & \left. \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{60671}{24810240} R_e^2 \right) \delta^3 \frac{d^3 \bar{g}}{d\bar{x}^3} \right\} + \theta(\epsilon^2) \end{aligned} \dots\dots(31)$$

注 3) 正しくは $R_e[\exp\{2\pi i \bar{x}\}]$ と書くべきだが、簡略化した。3.(1)(d), 4.(1) の演算も同様である。

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\pi R_e \delta}{105} \cdot \frac{3 + \frac{2\pi^2}{15} \left\{ 1 - \left(\frac{R_e}{10.8} \right)^2 \right\} \delta^2}{1 + \frac{\pi^2}{5} \left\{ 1 + \left(\frac{R_e}{20.1} \right)^2 \right\} \delta^2} \right] \dots\dots\dots(32)$$

3 次の解を加えると、 $R_e=100$ の場合には $\phi < 0$ の領域が現れ、2 次までとった解と大きく異なる。すなわち、この領域では 3 次の解による負の寄与が卓越していること、および高次の解を加えても十分な収束が得られないことがわかる。この領域では摂動法よりもむしろ数値解法などの方が適切と思われる。

Benjamin は非摂動流速分布に層流境界層の分布を与えて $\phi = \pi/3$ を得ている。Benjamin の解析は、 ϵ の 1 次の摂動解を直接求めずに、 $R_e \delta \rightarrow \infty$ の解 (非粘性解) と δ の 2 次以上の項を無視した解 (粘性解) の和で表わすという特殊な方法を取っているため、境界面で速度が 0 になるという条件を満たすにもかかわらず、得られた解は完全な粘性解とはいえない。したがって、 ϕ が常に $\pi/3$ で R_e や δ によらないという結果は、このような非粘性漸近解的性格からきているものと思われる。

(2) 実験値との比較

前節に求めた近似解が実際の層流をどの程度まで正しく表現しうるかを検証するために実験を行った。

理論解は管路に対するものであるが、これは水面の変

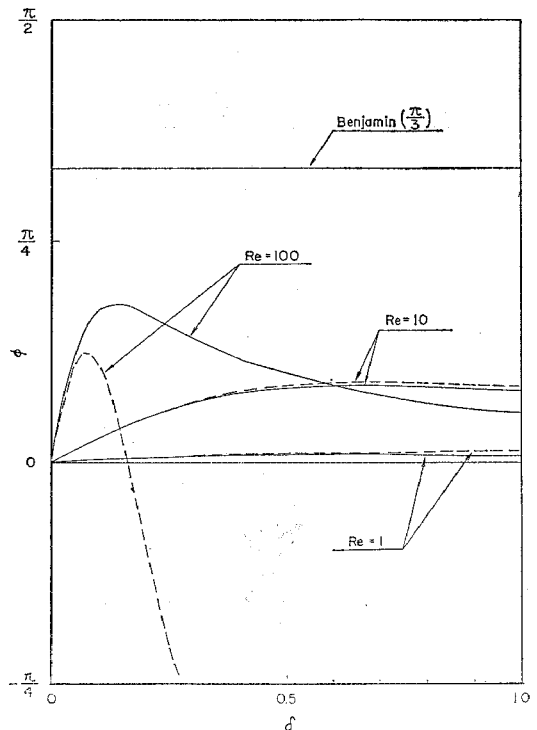


図-2 層流の Benjamin 機構

動がなく水深の与えられた開水路流にも適用できる。したがって測定の便宜も考えて図-3に示すような波状固定床をもつ開水路に、グリセリンと水の混合液を流し、水素気泡法によって流速分布を測定した。実験条件は表-2に示す。

図-4(a), (b) は、一波長内の各断面において、速度分布の理論値と実験値を比較したものである。横軸は単位時間あたりのタイムラインの水平間隔 u_b を水面流速

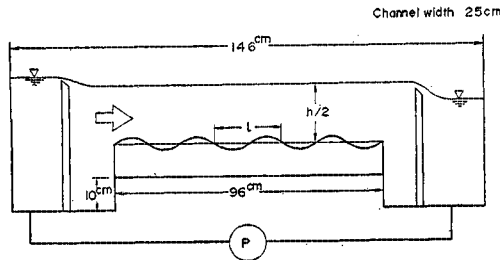


図-3 層流の実験装置

表-2 層流実験条件

	RUN 1	RUN 2
波型形状	正弦波	正弦波
水深 $h/2$ (cm)	5.50	5.27
波長 l (cm)	24.0	18.0
振幅 a (cm)	0.5	0.5
$\delta = h/l$	0.458	0.586
$\epsilon = a/h$	0.0455	0.0474
動粘性係数 ν (m ² /sec)	0.673	0.650
平均流速 U_m (m/sec)	1.87	1.83
$R_s = U_m h / \nu$	29.6	29.7

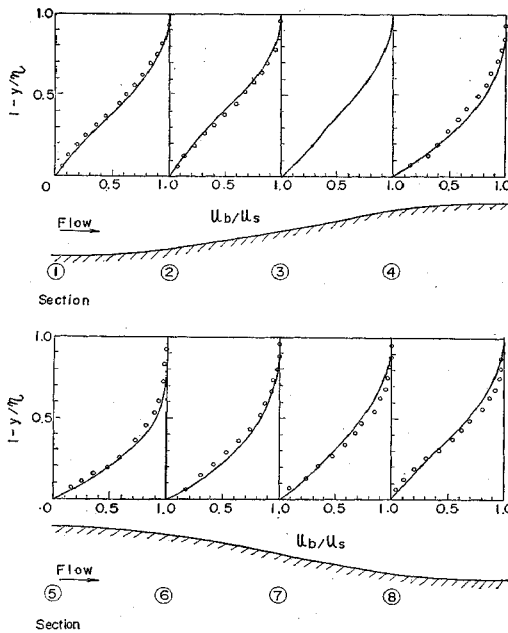


図-4(a) u_b/u_s の実験値 (白ぬき点) と理論値 (実線) の比較 (層流 RUN 1)

u_s で無次元化したもので、流線が水平でないために、無次元化した流速 u/u_s とは異なる。したがって、理論値の u 曲線を y 方向に v だけずらして u_b の理論値とした。縦軸は各断面における水深 η によって無次元化した相対水深である。

実験時に水面の場所的变化はまったく見られず、対称な二次元管路流に近い条件が満足されたため、理論値と実験値はよく一致したと思われる。

境界面に働くせん断応力の分布は図-5 のようになる。理論値は式 (29) によって計算し、実験値は速度分

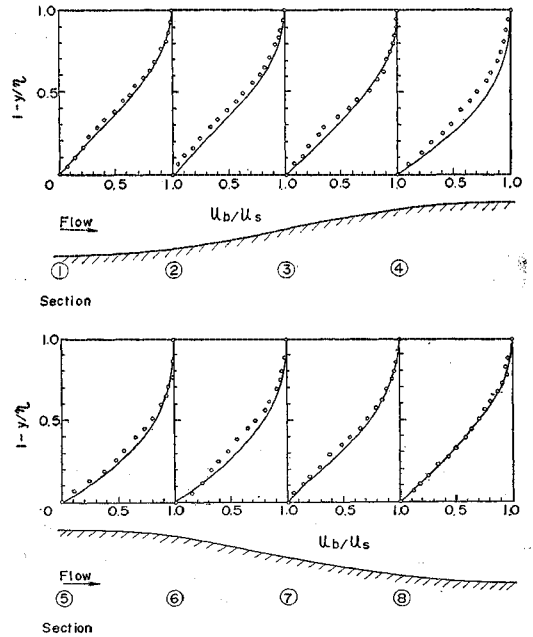


図-4(b) u_b/u_s の実験値と理論値の比較 (層流 RUN 2)

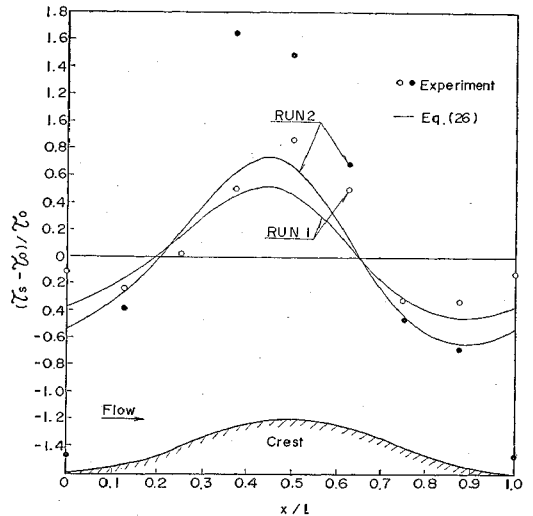


図-5 境界面に働くせん断応力の実験値と理論値の比較 (層流)

布から求めた。両者の一致があまりよくないのは、水素気泡の浮上の影響が特に底付近の速度分布の実験値の誤差を大きくしたためと思われる。しかし、実験値にもせん断応力の位相差は認められる。すなわち、crest を中心として対称の位置でせん断応力値を比較してみると上流側の方が大きい。

このようにせん断応力が上流側で増す理由は式 (26) の考察で述べたが、流線を描いてみるとより明瞭になる。RUN 1 の実験条件での流線図を式 (10), (13), (16) から計算したものが図-6 (a)~(c) である。 $\bar{\psi}_0$ に対応する流れは crest の前後で対称だが、 $\bar{\psi}_1$ に対応する流れは、crest で上昇し trough で下降するセル状の流れとなり、両者を加えると境界付近で上流側の流れが強くなるのがわかる。また、 $\bar{\psi}_2$ に対応する流れは位相差を生じさせないことも明らかである。このようなセル状の流れは、振動流の場合につき、グリセリンを利用した実験で日野ら¹³⁾により可視化されている。

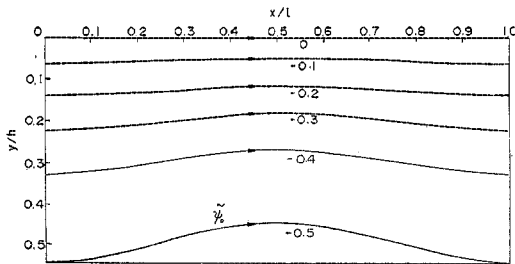


図-6 (a) 0 次解に対応する流線

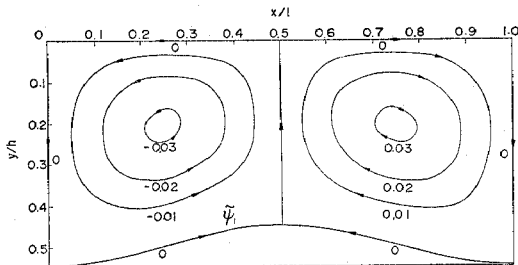


図-6 (b) 1 次解に対応する流線

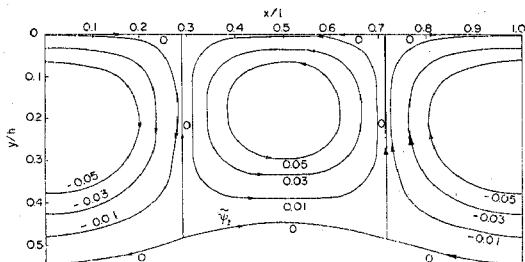


図-6 (c) 2 次解に対応する流線

3. 波状境界をもつ二次元管路の乱流

(1) 理論解析

境界形状は 図-1 に従う。流れは非圧縮、定常である。解析は層流の場合と同じく流関数を導入し、摂動法による。ただし、乱れ速度の 2 次モーメントが不明なので、ここに Boussinesq の渦動粘性係数および Prandtl の混合距離の仮定を取り入れる。

(a) 基礎方程式および境界条件

基礎方程式は、二次元の Reynolds 方程式 (33 a), (33 b) である。

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial \overline{\rho u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\rho u'v'}}{\partial y} \quad (33 a)$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \frac{\partial \overline{\rho u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\rho v'^2}}{\partial y} \quad (33 b)$$

ここに、変数の上につけた $\bar{\quad}$ は確率平均を、 $'$ は変動項を表わす。 ρ, p はそれぞれ流体の密度、圧力である。

いま、Boussinesq の渦動粘性係数を拡張して、式 (33 a), (33 b) の右辺に含まれる乱れ速度の 2 次モーメントを次のように表わす。

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho K_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad (34 a)$$

$$\overline{\rho u'^2} = \rho K_{xx} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right| \quad (34 b)$$

$$\overline{\rho v'^2} = \rho K_{yy} \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right| \quad (34 c)$$

K_{xy}, K_{xx}, K_{yy} が渦動粘性係数である。これらの量について次のような仮定を設ける。

$$K_{xy} = \lambda^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (35 a)$$

$$K_{xx} = K_{yy} \quad (35 b)$$

式 (35 a) の λ は Prandtl の混合距離である。これは波面を微小振幅と考えて次のように仮定する。

$$\lambda = \kappa(\eta - y) \quad (\kappa : \text{Karman 定数}) \quad (36)$$

なお、(35 b) の仮定は $\bar{u}'^2 = \bar{v}'^2$ を意味する。このことは乱流境界層において正しくはない。しかし、乱流混合による運動量の伝達を強く支配する K_{xy} に関する仮定が速度分布の大部分を決めてしまうので、速度分布やせん断応力を議論する限りにおいては問題ないと思われる。

分子粘性は、粘性底層においてのみ重要だから、境界条件によって考慮するものとし、式 (33 a), (33 b) では無視する。そこで、式 (34 a), (34 b), (34 c) を代入

し、平均速度について式 (1) と同様に定義した流関数 Ψ を導入すると次式を得る。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right| \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ K_{xy} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right\} \dots (37 a)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right| \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_{xy} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right\} \dots (37 b)$$

式 (37・a) を y で微分し、式 (37・b) を x で微分して差をとると、式 (35・b) に注意して、

$$\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \Psi = \nabla^2 (K_{xy} \nabla^2 \Psi) \dots (38)$$

を得る。

境界条件は流量が一定、 x 軸上で \bar{v} が 0、および粘性底層の流れとの接続条件より (39 a), (39 b) のようになる。

$$y=0 : \Psi=0, \frac{\partial \Psi}{\partial x}=0 \dots (39 a)$$

$$y=\pm y^* : \Psi=\mp \frac{Q}{2}, -\frac{\partial \Psi}{\partial y}=\frac{u_*^2}{\nu}(\eta-y^*), \\ K_{xy} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=u_*^2 \dots (39 b)$$

ここに、 y^* は粘性底層の外縁、 u_* は摩擦速度である。粘性底層内では \bar{u} は直線分布に従うものとしている。 Q は流量で、断面平均流速の一波長平均を \bar{u}_m とすると $Q=\bar{u}_m h$ である。

変数の無次元化は層流理論の場合と同じ要領で式 (4) に従う。渦動粘性係数は次のように無次元化される。

$$\tilde{K}_{xy}=\frac{K_{xy}}{\bar{u}_m h}=\kappa^2(\tilde{\eta}-\tilde{y})^2 \left| \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} \right| \dots (40)$$

かくして無次元化された基礎方程式、境界条件はそれぞれ (38), (39a), (39b) のようになる。

$$\delta \left(-\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \nabla^2 \tilde{\Psi} = \nabla^2 (\tilde{K}_{xy} \nabla^2 \tilde{\Psi}) \dots (41)$$

$$\tilde{y}=0 : \tilde{\Psi}=0, \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}}=0 \dots (42 a)$$

$$\tilde{y}=\pm \tilde{y}^* : \tilde{\Psi}=\mp \frac{1}{2}, -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}}=R_e \bar{u}_*^2 (\tilde{\eta}-\tilde{y}^*), \\ \tilde{K}_{xy} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}^2}=\bar{u}_*^2 \dots (42 b)$$

(b) 摂動法による解

式 (7) のごとく流関数を δ のべき級数に展開し、式 (41) に代入して δ の各次数別に解を求めると次のようになる。

0 次 の 解

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \left\{ \kappa^2 (\tilde{\eta}-\tilde{y})^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}^2} \right)^2 \right\} = 0 \dots (43)$$

$$\tilde{y}=0 : \tilde{\Psi}_0=0, \frac{\partial \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{x}}=0 \dots (44 a)$$

$$\tilde{y}=\pm \tilde{y}^* : \tilde{\Psi}_0=\mp \frac{1}{2}, -\frac{\partial \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}}=R_e \bar{u}_*^2 (\tilde{\eta}-\tilde{y}^*), \\ \tilde{K}_{xy} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}^2}=\bar{u}_*^2 \dots (44 b)$$

$$\tilde{\Psi}_0=\frac{1}{2}(Z-1)+\frac{\alpha_0}{2} Z \ln Z \dots (45)$$

ただし、 $Z=1-\tilde{y}/\tilde{\eta}$, ($0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{\eta}$) である。式 (45) は式 (43) の正確な解ではなく、せん断応力一定の仮定によって得られた。これは 0 次解を、一様管路の乱流の速度分布について認められている対数分布に従うように置いたことを意味する。係数 α_0 は式 (45 a) ~ (45 c) によって与えられる。

$$\alpha_0=\frac{\sqrt{f_0}}{\kappa} \dots (45 a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_0}}=\frac{1}{\kappa} \ln R_e \sqrt{f_0} + \left\{ R_e^* - \frac{1}{\kappa} (1 + \ln 2 R_e^*) \right\} \dots (45 b)$$

$$R_e^*=R_e \bar{u}_*^2 (\tilde{\eta}-\tilde{y}^*) \dots (45 c)$$

ここに、 R_e^* は Couette 流の安定限界に対応する一定のレイノルズ数である。

1 次 の 解

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \left\{ 2 \kappa^2 (\tilde{\eta}-\tilde{y})^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_1}{\partial \tilde{y}^2} \right\} = \left(-\frac{\partial \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}^2} \dots (46)$$

$$\tilde{y}=0 : \tilde{\Psi}_1=0, \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial \tilde{x}}=0 \dots (47 a)$$

$$\tilde{y}=\pm \tilde{y}^* : \tilde{\Psi}_1=0, -\frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial \tilde{y}}=2 R_e \bar{u}_*^2 \bar{u}_{*1} (\tilde{\eta}-\tilde{y}^*),$$

$$\tilde{K}_{xy} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_1}{\partial \tilde{y}^2}=2 \bar{u}_*^2 \bar{u}_{*1} \dots (47 b)$$

$$\tilde{\Psi}_1=-\frac{\epsilon}{8 \kappa^2} \left(\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}} \right) F(Z) \dots (48)$$

ここに、 F は次のような関数である。

$$F(Z)=\alpha_0 Z^2 \ln^2 Z + (2-3 \alpha_0) Z^2 \ln Z \\ + \alpha_1 Z \ln Z + \left(3 - \frac{7}{2} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} \right) Z(1-Z) \dots (48 a)$$

$$\alpha_1=\left(3 - \frac{7}{2} \alpha_0 \right) / \left(\kappa R_e^* + \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{2} \right) \dots (48 b)$$

2 次 の 解

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \left\{ 2 \kappa^2 (\tilde{\eta}-\tilde{y})^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_2}{\partial \tilde{y}^2} \right\} = -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \left[\kappa^2 (\tilde{\eta}-\tilde{y})^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_1}{\partial \tilde{y}^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \right]$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left\{ \kappa^2 (\tilde{\eta} - \tilde{y})^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}^2} \right)^2 \right\} - \frac{\partial \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^3 \tilde{\Psi}_1}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^3 \tilde{\Psi}_1}{\partial \tilde{y}^3} - \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^3 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^3 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}^3} \dots (49)$$

$$\tilde{y}=0 : \tilde{\Psi}_2=0, \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial \tilde{x}}=0 \dots (50 a)$$

$$\tilde{y}=\pm \tilde{y}^* : \tilde{\Psi}_2=0, \quad -\frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial \tilde{y}}=R_e (\tilde{u}_{*1}^2 + 2 \tilde{u}_{*0} \tilde{u}_{*2}) (\tilde{\eta} - \tilde{y}^*),$$

$$\tilde{K}_{xy} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_2}{\partial \tilde{y}^2} = \tilde{u}_{*1}^2 + 2 \tilde{u}_{*0} \tilde{u}_{*2} \dots (50 b)$$

$$\tilde{\Psi}_2 = \epsilon^2 \left(\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}} \right)^2 G(Z) + \epsilon \frac{d^2 \tilde{g}}{d\tilde{x}^2} \tilde{\eta} H(Z) \dots (51)$$

ここに, G, H は次のような関数である.

$$G(Z) = 27 A_{11} Z^3 \ln^4 Z + 9(A_{12} - 4 A_{11}) Z^3 \ln^3 Z + 9(4 A_{11} - A_{12} + A_{13}) Z^3 \ln^2 Z + 3(A_{14} - 2 A_{13} + 2 A_{12} - 8 A_{11}) Z^3 \ln Z + 2 A_{15} Z^2 \ln^2 Z + 2(A_{16} - A_{15}) Z^2 \ln Z + \frac{\alpha_2}{\kappa} Z \ln Z + \left(\frac{\alpha_2}{2\kappa} - 8 A_{11} + 2 A_{12} - 2 A_{13} + A_{14} - A_{15} + A_{16} - A_{17} - A_{18} \right) (Z-1) - \left(\frac{\alpha_2}{2\kappa} - A_{15} + A_{16} - A_{17} \right) (Z^2-1) + (8 A_{11} - 2 A_{12} + 2 A_{13} - A_{14} + A_{15}) (Z^3-1) \dots (51 a)$$

$$H(Z) = 9 B_{12} Z^3 \ln^3 Z + 9(B_{13} - B_{12}) Z^3 \ln^2 Z + 3(B_{14} - 2 B_{13} + 2 B_{12}) Z^3 \ln Z + 2 B_{15} Z^2 \ln^2 Z + 2(B_{16} - B_{15}) Z^2 \ln Z + \frac{\beta_2}{\kappa} Z \ln Z + \left(\frac{\beta_2}{2\kappa} + 2 B_{12} - 2 B_{13} + B_{14} - B_{15} + B_{16} - B_{17} - B_{18} \right) (Z-1) - \left(\frac{\beta_2}{2\kappa} - B_{15} + B_{16} - B_{17} \right) (Z^2-1) - (2 B_{12} - 2 B_{13} + B_{14} - B_{18}) (Z^3-1) \dots (51 b)$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1^2}{32 \kappa^2 \alpha_0} + 8 A_{11} - 2 A_{12} + 2 A_{13} - A_{14} + \frac{\left(\frac{1}{2} - R_e^* - \frac{1}{\alpha_0} \right)}{\kappa} * \dots (51 c)$$

$$\beta_2 = \frac{-2 B_{12} + 2 B_{13} - B_{14} + B_{15} - B_{16} - B_{17} - 2 B_{18}}{\left(\frac{1}{2} - R_e^* - \frac{1}{\alpha_0} \right) / \kappa} \dots (51 d)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= 2 A_1 / 81, \quad A_{12} = 4(A_2 - A_1) / 27 \\ A_{13} &= 2(3 A_1 + 3 A_2 + A_3) / 27 \\ A_{14} &= 2(3 A_2 - 3 A_1 - A_3 + A_4) / 9 \\ A_{15} &= A_5 / 4, \quad A_{16} = (A_6 - 2 A_3) / 4 \\ A_{17} &= (2 A_5 - A_6 - 2 A_7) / 2 \\ A_{18} &= (3 A_1 - 3 A_2 + A_3 - A_4 + A_7) / 3 \end{aligned} \right\} \dots (51 e)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{12} &= 4 B_2 / 27, \quad B_{13} = 2(B_3 - 3 B_2) / 27 \\ B_{14} &= 2(3 B_2 - B_3 + B_4) / 9 \\ B_{15} &= B_5 / 4, \quad B_{16} = (B_6 - 2 B_3) / 4 \\ B_{17} &= (2 B_5 - B_6 - 2 B_7) / 2 \\ B_{18} &= (B_3 - 3 B_2 - B_4 + B_7) / 3 \end{aligned} \right\} \dots (51 f)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\alpha_0 / 64 \kappa^4, \quad A_2 = (\alpha_0 - 2) / 64 \kappa^4 \\ A_3 &= (6 - 5 \alpha_0 + \alpha_1 - 4 / \alpha_0) / 64 \kappa^4 \\ A_4 &= (5 \alpha_0 + \alpha_1 + 4 / \alpha_0 + 2 \alpha_1 / \alpha_0 - 10) / 64 \kappa^4 - \alpha_0 / 4 \\ A_5 &= \alpha_1 / 16 \kappa^4, \quad A_6 = (3 - 7 \alpha_0 / 2 + \alpha_1 / 2) / 8 \kappa^4 + \alpha_0 / 2 \\ A_7 &= (3 \alpha_0 - \alpha_1 - 12 / \alpha_0 - 2 \alpha_1 / \alpha_0 - \alpha_1^2 / 2 + 10) / 64 \kappa^4 - (1 + 3 \alpha_0) / 4 \end{aligned} \right\} \dots (51 g)$$

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= -\alpha_0 / 128 \kappa^4, \quad B_3 = 3(\alpha_0 - 1) / 64 \kappa^4 \\ B_4 &= (6 - 9 \alpha_0 / 2 + \alpha_1 / 2 - 2 / \alpha_0) / 64 \kappa^4 + \alpha_0 / 16 \\ B_5 &= -\alpha_1 / 16 \kappa^4 \\ B_6 &= (7 \alpha_0 / 2 + \alpha_1 / 2 - \alpha_1 / \alpha_0 - 3) / 16 \kappa^4 - \alpha_0 / 4 \\ B_7 &= (2 \alpha_0 + 3 / \alpha_0 + \alpha_1 / 2 \alpha_0 - 9 / 2) / 32 \kappa^4 + (1 + 2 \alpha_0) / 8 \end{aligned} \right\} \dots (51 h)$$

なお, $R_e^* = 11.6, \kappa = 0.4$ として $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ の値を 図-7 に示す.

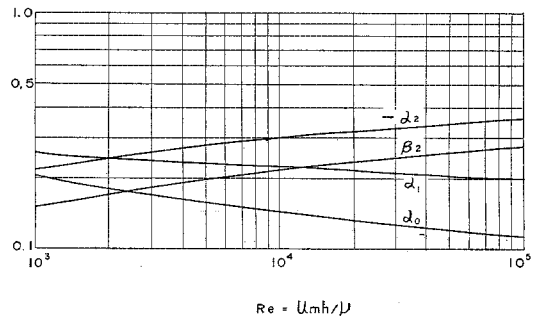


図-7 乱流の速度分布係数と R_e の関係

(c) 速度成分

式 (20), (21) のように速度成分を δ のべき級数に展開すると各次数の解は次のようになる.

$$\tilde{u}_0 = \frac{1 + \alpha_0}{2 \tilde{\eta}} + \frac{\alpha_0}{2 \tilde{\eta}} \ln Z \dots (52)$$

$$\tilde{u}_1 = -\frac{\epsilon}{8 \kappa^2 \tilde{\eta}} \frac{dF}{dZ} \dots (53)$$

ここに,

$$\frac{dF}{dZ} = 2 \alpha_0 Z \ln^2 Z + 4(1 - \alpha_0) Z \ln Z + \alpha_1 \ln Z$$

$$-(4-4\alpha_0+\alpha_1)Z + \left(3-\frac{7\alpha_0}{2} + \frac{3\alpha_1}{2}\right) \dots\dots\dots (54)$$

である。

$$\tilde{u}_2 = \frac{\epsilon^2 \left(\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}}\right)^2}{\tilde{\eta}} \frac{dG}{dZ} - \epsilon \frac{d^2\tilde{g}}{d\tilde{x}^2} \frac{dH}{dZ} \dots\dots\dots (55)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dZ} = & 81 A_{11} Z^2 \ln^4 Z + 27 A_{12} Z^2 \ln^3 Z \\ & + 27 A_{13} Z^2 \ln^2 Z + 9 A_{14} Z^2 \ln Z \\ & + 4 A_{15} Z \ln^2 Z + 4 A_{16} Z \ln Z + \frac{\alpha_2}{\kappa} \ln Z \\ & + \left(2 A_{17} - \frac{\alpha_2}{\kappa}\right) (Z-1) + 3 A_{18} (Z^2-1) \\ & + \frac{\alpha_2}{2\kappa} - 8 A_{11} + 2 A_{12} - 2 A_{13} + A_{14} - A_{15} \\ & + A_{16} + A_{17} + 2 A_{18} \dots\dots\dots (55 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dZ} = & 27 B_{12} Z^2 \ln^3 Z + 27 B_{13} Z^2 \ln^2 Z \\ & + 9 B_{14} Z^2 \ln Z + 4 B_{15} Z \ln Z + \frac{\beta_2}{\kappa} \ln Z \\ & + \left(2 B_{17} - \frac{\beta_2}{\kappa}\right) (Z-1) + 3 B_{18} (Z^2-1) \\ & + \frac{\beta_2}{2\kappa} + 2 B_{12} - 2 B_{13} + B_{14} - B_{15} + B_{16} \\ & + B_{17} + 2 B_{18} \dots\dots\dots (55 b) \end{aligned}$$

である。また、

$$\tilde{v}_1 = \frac{\epsilon}{2\tilde{\eta}} \frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}} (1-Z) (1+\alpha_0+\alpha_0 \ln Z) \dots\dots\dots (56)$$

$$\tilde{v}_2 = -\frac{\epsilon}{8\kappa^2} \frac{d^2\tilde{g}}{d\tilde{x}^2} F(Z) - \frac{\epsilon^2 \left(\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}}\right)^2}{8\kappa^2\tilde{\eta}} (1-Z) \frac{dF}{dZ} \dots\dots\dots (57)$$

となる。

(d) Benjamin 機構

摩擦速度の各次数の解は次のようになる。

$$\tilde{u}_{*0} = \frac{\kappa\alpha_0}{2\tilde{\eta}} \dots\dots\dots (58)$$

$$\tilde{u}_{*1} = -\frac{\alpha_1}{8\kappa\tilde{\eta}} \epsilon \frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}} \dots\dots\dots (59)$$

$$\tilde{u}_{*2} = \frac{\alpha_2}{\tilde{\eta}} \epsilon^2 \left(\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}}\right)^2 + \beta_2 \epsilon \frac{d^2\tilde{g}}{d\tilde{x}^2} \dots\dots\dots (60)$$

境界面に働くせん断応力の無次元量を $\tilde{\tau}_s$ とすると、

$$\tilde{\tau}_s = \tilde{u}_{*0}^2 + 2\delta\tilde{u}_{*0}\tilde{u}_{*1} + \delta^2(\tilde{u}_{*1}^2 + 2\tilde{u}_{*0}\tilde{u}_{*2}) + \dots\dots\dots (61)$$

より δ の 2 次までとった解は、

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_s = & \frac{\kappa^2\alpha_0^2}{4\tilde{\eta}^2} - \frac{\alpha_0\alpha_1}{8\tilde{\eta}^2} \delta \epsilon \frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}} + \frac{\delta^2}{\tilde{\eta}^2} \\ & \cdot \left\{ \left(\kappa\alpha_0\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{64\kappa^2} \right) \epsilon^2 \left(\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}}\right)^2 + \kappa\alpha_0\beta_2\tilde{\eta}\epsilon \frac{d^2\tilde{g}}{d\tilde{x}^2} \right\} \dots\dots\dots (62) \end{aligned}$$

式 (62) と式 (29) を比較すれば明らかなように、乱流の場合にも層流の場合と類似の形で Benjamin 機構が現れている。式 (62) において ϵ の 2 次以上の項を省略し、 $\tilde{g} = \exp(2\pi i\tilde{x})$ を代入すると位相差は、

$$\phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{\pi\alpha_1\delta}{4\kappa^2\alpha_0 \left(1 + \frac{2\pi^2\beta_2}{\kappa\alpha_0} \delta^2\right)} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

と求まる。 R_e をパラメータとする ϕ と δ の関係を図-8 に示す。3 次の解を求めることは、相当複雑な計算を要するので省略した。

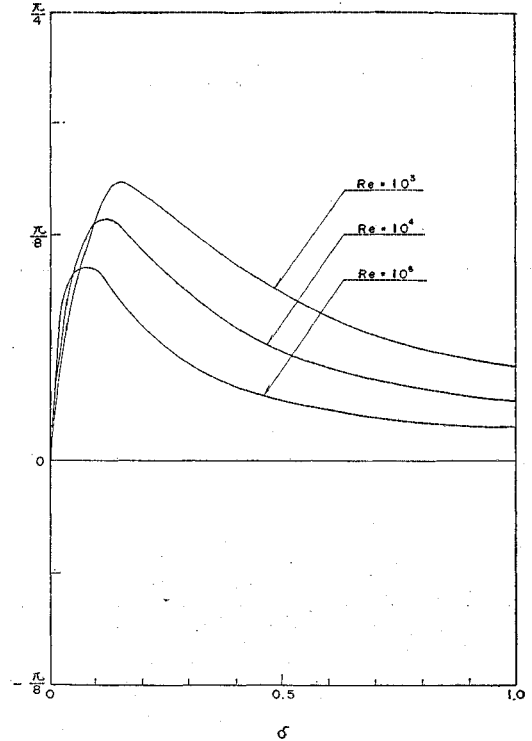


図-8 乱流の Benjamin 機構

層流の場合 (図-2) と比較すると、 ϕ が $0 < \delta < 1$ で極大値をもつのは同じだが、乱流の場合には R_e が大きいほどこの極大値は小さくなる。また、層流の場合よりも R_e に対する ϕ の反応は鈍いといえる。

(2) 実験値との比較

乱流解の実験による検証も、まず速度分布について行う。

装置は図-9 に示すような矩形断面波型管路である。速度分布の測定は水素気泡法による。この場合にもやはり流線の曲がり方を考慮した補正が必要で、タイムラインの水平間隔を理論値から計算して比較する。

表-3 に示す実験条件で波型一波长にわたり 8 断面で測定した結果が図-10 (a), (b) である。理論値は $\kappa = 0.4$, $R_e^* = 11.6$ とし、 R_e は径深の 2 倍を代表長にとつ

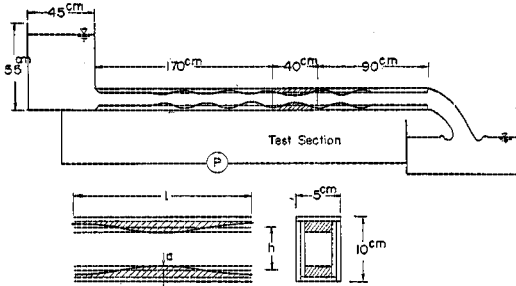


図-9 乱流の実験装置

表-3 乱流実験条件

	RUN 1	RUN 2
波型形状	正弦波	正弦波
径 深 R (cm)	0.974	0.974
平均管径 h (cm)	6.41	6.41
波 長 l (cm)	40.0	40.0
振 幅 a (cm)	0.456	0.456
$\delta = h/l$	0.160	0.160
$\epsilon = a/h$	0.071	0.071
平均流速 U_m (cm/sec)	25.6	37.3
$R_e = 2U_m R/\nu$	4.89×10^3	7.27×10^3

表-4 Hsu らによる波型円管の実験

	Model I	Model II
波型形状	正弦波	正弦波
径 深 R (cm)	3.1	3.1
平均管径 D (cm)	12.4	12.4
波 長 l (cm)	25.4	50.8
振 幅 a (cm)	0.561	0.561
$\delta = D/l$	0.490	0.245
$\epsilon = a/D$	0.0451	0.0451
平均流速 U_m (cm/sec)	1.42×10^3	1.42×10^3
$R_e = 2U_m R/\nu$	5.65×10^4	5.65×10^4

たものを用いて計算した。速度分布は一波長で大きく変化し、断面 4, 5 では矩形分布に近くなる。理論値も実験値を良く説明しているといえる。

また、図-11 (a), (b) は各断面の u_b/u_s の分布を一つのグラフにまとめたものであるが、ほぼ指数則に従うことがわかる。これより速度分布も指数則に従うといえるが、べき指数の変化を見ると、crest に近いほど大きく、また crest をはさんで対称の位置にある断面どうしでは上流測の方が大きい。非一様流の場合、速度分布がその断面の壁面せん断応力のみで決まるとはいえないため、この指数の変化を Benjamin 機構に直接結びつけることはできない。事実 Hsu らの実験結果によれば、指数の変化は crest をはさんで対称である。Hsu らの実験条件は表-4 に示してある。

Hsu らはせん断応力分布も Preston tube によって実測しており、それには位相差が現れている。表-4 の Model II の実測結果と式 (62) による計算値とを比較したものが 図-12 である。計算値はやや大きすぎるし、

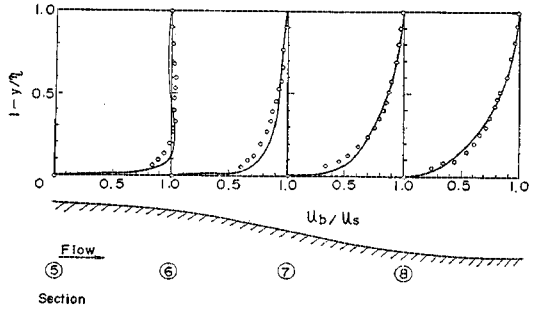
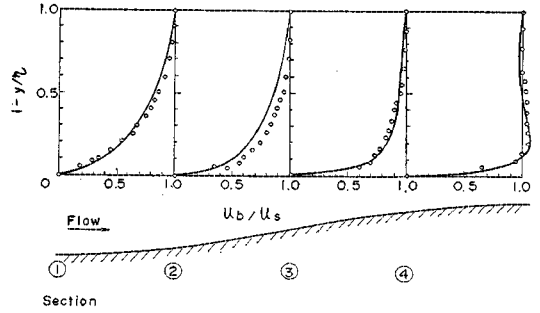


図-10 (a) u_b/u_s の実験値 (白ぬき点) と理論値 (実線) の比較 (乱流 RUN 1)

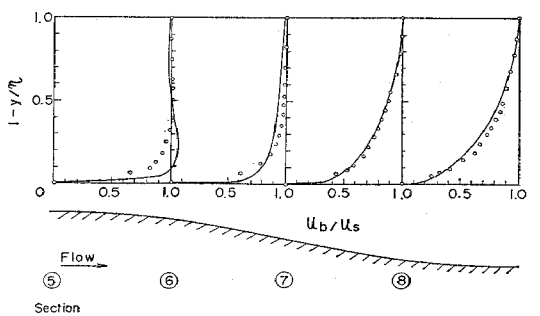
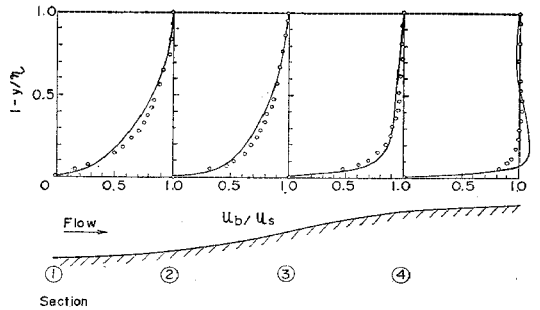


図-10 (b) u_b/u_s の実験値と理論値の比較 (乱流 RUN 2)

trough 付近で τ_s が負になる ($\tau_s - \tau_0/\tau_0$ を -1 を越える) のも計算仮定に反する。これは実験管路が $\delta = 0.245$ (式 (62) の十分な収束は $\delta \leq 0.1$ 程度) で擾動解の十分な収束が得られないためである。しかし、著者らの $\delta = 0.16$ の実験結果では速度分布の良好な一致が得られているし、位相差はほぼ合っており、むしろ混合距離理論を非一様乱流に単純に拡張しただけでほかに何ら不明確

な仮定やパラメータを導入していないことを考慮すれば、理論値は実験値を良く説明しているといえよう。

なお、Model I の実験値と理論値の差はさらに大きくなる。これは Model I の波型が $\delta=0.499$ という大きな値をもつために式 (62) 右辺の β_2 を含む項が非常

に大きくなり、 δ^2 の項が δ^0, δ^1 の項の 10 倍のオーダーになって摂動解が収束しないことによる。

以上の考察から (1) に示した波状二次元管路の乱流の理論解は、 δ や R_0 などのパラメータに対してやや敏感すぎる（特にせん断応力）面はあるが、 δ の十分小さい範囲では対応する流れをよく表現しているといえる。

(3) 乱流問題と摂動解

非一様乱流場を摂動法によって解いている例は、先の Davis の論文⁹⁾が挙げられるけれども、これは数値解である。本来強い非線型場である乱流場に、線型解からの補正法である摂動解の方法は無理と思われる、事実これまでは解析的に解いて成功した例はあまりないようである。本論文は比較的成功した例で、この点で乱流問題に対する摂動法の適応性を見直すことも必要ではないかと思われる。

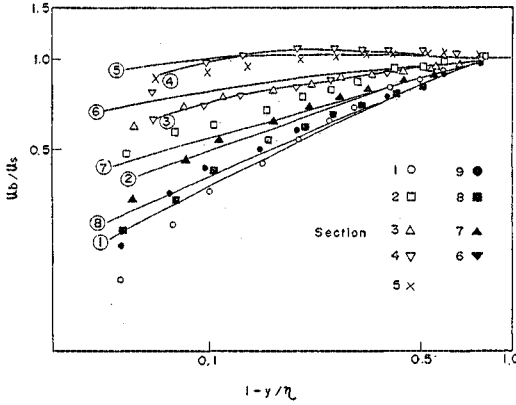


図-11 (a) u_b/u_s の分布形 (乱流 RUN 1, 実線が理論値)

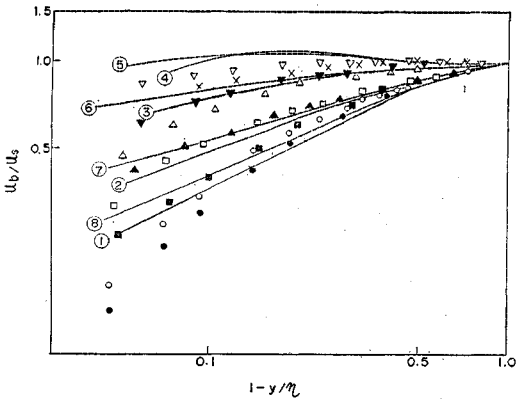


図-11 (b) u_b/u_s の分布形 (乱流 RUN 2)

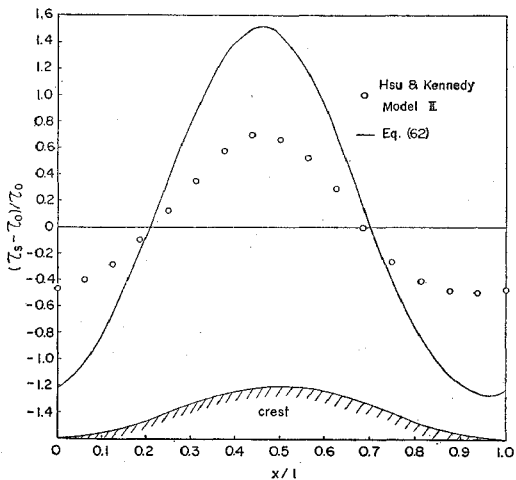


図-12 境界面に働くせん断応力の実験値 (Hsu らによる) と理論値の比較 (乱流)

4. 河床波の発生について

(1) 移動床面の不安定性と位相差 ϕ の関係

層流解・乱流解ともに流れは定常であるが、いま、ここで $\bar{\tau}_s$ に比例する量だけ境界面表層が輸送され、時間とともに変形していくものとする。初期 (初生) 河床波の変形に対する流体の応答が十分速い場合には河床変形を非定常、流れを準定常として扱うことができる¹⁰⁾。

底質の連続式は、

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} - C \frac{\partial \bar{\tau}_s^n}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (C, n > 0, \bar{t}: \text{無次元化さ$$

$$\text{れた時間}) \dots \dots \dots (64)$$

となる。 $\bar{g} = \exp\{2\pi i \bar{x}\}$ とおくと $\bar{\tau}_s^n$ は ϵ の 2 次以上の項を無視して次の形に書ける。

$$\bar{\tau}_s^n = \bar{\tau}_0^n [1 - n \epsilon A \exp\{i(2\pi \bar{x} + \phi)\}] \dots \dots \dots (65)$$

ここに、 $\bar{\tau}_0$ は境界形が平坦なときのせん断応力であり、 A は R_0 と δ を含む正の定数である。

式 (65) を式 (64) に代入すると、

$$\frac{d\epsilon}{d\bar{t}} + 2\pi i n C \bar{\tau}_0^n A e^{i\phi} \epsilon = 0 \dots \dots \dots (66)$$

を得る。これより ϵ は時間の指数関数で表わされ、

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp(-2\pi i n C \bar{\tau}_0^n A e^{i\phi} \bar{t}) \dots \dots \dots (67)$$

となる。式 (67) の \bar{t} にかかる係数の実数部分の正負に応じて初生河床波の増幅・減衰が決まるが、 $n, C, \bar{\tau}_0$,

表-5 位相差 ϕ と不安定性の関係

位相差	$R_0(-ie^{i\phi})$	河床波	$Im\{-ie^{i\phi}\}$	進行方向
$0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$	正	増幅	負	下流
$-\frac{\pi}{2} \leq \phi < 0$	負	減衰	負	下流

A などはいずれも正の定数であるから結局 ϕ の値に応じて決まることがわかる。これをまとめたものが表—5である。

図—2を見ると、 δ の2次までとった解では常に $0 \leq \phi < \pi/2$ で、あらゆる波長に対する増幅を示すが、3次までとった解によると $\phi < 0$ の領域が現れ、増幅を起こす波長が限定されてくる ($R_0=100$)。2. (1) (d) でも述べたように、この領域では擾動解が収束していないので、実際の ϕ の正負を知るためには別の解析方法によらなければならない。

乱流の場合(図—8)には3次の解を求めていないので、常に $0 \leq \phi < \pi/2$ であるが、層流解と乱流解の類似性から考えるとほぼ同様のことがいえる。

また、河床波の進行方向は、層流の場合には式(30)、(32)、乱流の場合には式(63)から明らかのように、 ϕ が $\pm\pi/2$ の範囲を越えることはないので表—5に示すとおり常に下流である。

(2) 流砂量の非平衡性の影響

移動床面の不安定性を説明する要因として、Benjamin機構は重要であるが、より一般的には流砂量の非平衡性²⁰⁾も考慮すべきだろう。

多くの流砂量公式は、ある場所の流砂量がその場所のせん断応力のみによって決まるという形をもつ。平坦河床における平衡状態ならばこの関係は成立するが、河床波上の流砂量は非平衡状態にあるので、その場所のせん断応力のみによっては決まらず、砂粒子の受けた履歴を考慮しなければならない。すなわち、流砂量とせん断応力の間にもまた位相差 ϕ' が存在すると考える必要がある。

流砂量の非平衡性が移動床面に与える影響を考えるには、式(65)~(67)において形式的に ϕ を $\phi + \phi'$ に置き換えてみればよい。河床波の増幅・減衰は単純に ϕ の正負によって議論できなくなることは明白である。また、河床波の進行方向も、 $\phi + \phi'$ が $\pm\pi/2$ の範囲を越えれば常に下流ばかりでなく上流となる場合も出てくる。

実際問題として ϕ' については不明な部分も多く、今後検討していくべき機構であると考えている。

5. 結 論

任意形状の周期的波状境界をもつ二次元管路流をモデルとして初生の河床波上の流れの基礎的な検討を行い、正弦波形状の波面について具体的計算と実験を行った。結果をまとめると次のようになる。

(1) 層流の理論解は速度分布の実験値とよく一致した。

(2) 境界面からの流れの剥離が生じないにもかかわらず Benjamin が指摘したように波型境界せん断応力の間位相差 ϕ が存在する。しかし、 ϕ は単純な Benjamin 理論の与える $\pi/3$ ではなく、 R_0 と δ による。この位相差 ϕ を求め、 R_0 、 δ との関係式を得ることによってその機構が明らかになった(本論文ではこれを Benjamin 機構と呼んでいる)。

(3) 混合距離理論を仮定した乱流の理論解は $\delta=0.16$ の管路の速度分布の実験値とよく一致した。

(4) 上記の理論解は R_0 、 δ などのパラメータに対して実際の流れに比べると敏感すぎる面がある。

また、Hsu らの円管実験 ($\delta=0.244$) におけるせん断応力分布をやや大きく見積りすぎるが、 δ が大きすぎることもおよび本理論が実験のパラメータの導入に頼っていない点を考えると比較的よく実験結果を説明しているといえる。

(5) 乱流の場合にも Benjamin 機構が存在し、この理論では層流の場合とほぼ類似の関係式として求めた。

(6) 安定解析により移動床面の不安定性の一要因を Benjamin 機構によって説明できることを示した。

本研究が主眼としたのは理論の明晰さと透徹性である。したがって、開水路流でないとか、粗面流れでないとかいう問題は、本論文においては二次的なものと考えた。

参 考 文 献

- 1) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, Jour. Fluid Mech., Vol. 16, pp. 521~544, 1963.
- 2) Reynolds, A.J.: Waves on the erodible bed of an open channel, Jour. Fluid Mech., Vol. 22, pp. 113~133, 1965.
- 3) Hayashi, T.: Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, Vol. 96, Hy 2, pp. 357~366, 1970.
- 4) Englund, F.: Instability of erodible beds, Jour. Fluid Mech., Vol. 42, pp. 225~244, 1970.
- 5) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channels, Jour. Fluid Mech., Vol. 64, pp. 1~16, 1974.
- 6) Miles, J.W.: On the generation of surface waves by shear flows, Jour. Fluid Mech., Vol. 3, pp. 185~204, 1957.
- 7) Benjamin, T.B.: Shearing flow over a wavy boundary, Jour. Fluid Mech., Vol. 6, pp. 161~205, 1959.
- 8) Stewart, R.H.: Laboratory studies of the velocity field over deep-water waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 42, pp. 733~754, 1970.
- 9) Davis, R.E.: On the turbulent flow over a wavy boundary, Jour. Fluid Mech., Vol. 42, pp. 721~731, 1970.
- 10) Davis, R.E.: On prediction of the turbulent flow over a wavy boundary, Jour. Fluid Mech., Vol. 52,

- pp. 287~306, 1972.
- 11) Iwasa, Y. and J.F. Kennedy : Free surface shear flow over a wavy bed, Proc. ASCE, Vol. 94, Hy 2, pp. 431~454, 1968.
 - 12) 日野幹雄 : 河床波の発生機構に関する私説, 文部省科学研究費総合研究 (A)「沖積地河川における河床形態と流体抵抗の研究」最終報告書 (代表者 岸 力), 1975.
 - 13) Hsu, S.T. and J.F. Kennedy : Turbulent flow in wavy pipes, Jour. Fluid Mech., Vol. 47, pp. 481~502, 1971.
 - 14) 日野幹雄・宮永洋一 : 河床波の発生機構の解析, 第 20 回水理講演会論文集, pp. 71~76, 1976.
 - 15) 奈良井修二 : 河床形態の変動特性に関する研究 (2)一閉管路移動床の実験から一, 京都大学防災研究所年報, 第 13 号 B, pp. 285~298, 1970.
 - 16) 岩佐義朗・富所五郎・葛山文治 : 掃流粒子を含む管路流れに関する研究, 土木学会第 27 回年次学術講演概要集, pp. 159~160, 1972.
 - 17) Chow, J.C.F. and K. Soda : Laminar flow in tubes with constriction, Physics of Fluid, Vol. 15, pp. 1700~1706, 1972.
 - 18) 日野幹雄・藤崎治男 : 波型底面上の粘性振動流, 第 22 回海岸工学講演会論文集, pp. 35~40, 1975.
 - 19) 日野幹雄 : 海浜流系および海浜地形の形成に関する流体力学的不安定理論 III—応答遅速性に基づく理論, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 14, pp. 43~54, 1973.
 - 20) 日野幹雄・石川忠晴 : Pickup Function と非平衡流砂量式, 昭和 50 年度第 3 回関東支部年次研究発表会講演概要集, pp. 173~176, 1976.
 - 21) 日野幹雄・宮永洋一 : 河床波上の流れの解析, 土木学会第 31 回年次学術講演概要集, pp. 326~327, 1976.

(1976.10.30・受付)