

# アーチの面内耐荷力解析と模型実験

## ANALYSIS AND EXPERIMENT ON IN-PLANE LOAD CARRYING CAPACITY OF ARCHES

新家 徹\*・頭井 洋\*\*・波田 凱夫\*\*\*  
By Tohru SHINKE, Hiroshi ZUI and Yoshio NAMITA

### 1. 緒 言

本文は、アーチ軸線の変形および非弾性域のひろがり、さらに、材料のひずみ硬化やアーチ軸線の初期変形、残留応力等を考慮したアーチの終局耐荷力の解析を行い、種々の計算例により、上記の要因がアーチの終局耐荷力におよぼす影響について論ずるとともに、本文の計算手法の妥当性を検証するために行った模型実験について報告するものである。

著者らは、先に伝達マトリックス法を用いて、アーチ軸線の変形および非弾性域のひろがりを考慮したアーチの面内座屈および終局耐荷力の汎用解析手法を報告したり、この手法によれば、任意の境界条件および載荷条件のもとで、任意の断面と軸線形状を有するアーチの面内非弾性座屈および終局耐荷力の解析ができる。しかし、そこでは材料の応力・ひずみ関係は完全弾塑性体とし、ひずみ硬化および残留応力の影響はないものと仮定していた。周知のように、圧縮力をうける構造部材の耐荷力に及ぼす残留応力や初期変形等いわゆる初期不整の影響は無視しえず、道路橋示方書においても、許容圧縮応力度の規定では初期不整の影響が考慮されている。アーチの耐荷力を論ずるにあたって、これら初期不整は、重要な要因になると考えられる。

残留応力の影響を考慮したアーチの面内耐荷力に関する研究としては、サンドウィッチ断面を有する 2 ヒンジアーチを対象にした倉西・Le-Wu Lu<sup>(1),(2)</sup>の研究や、マトリックス変形法を用い、断面細分割法を併用した小松・崎元<sup>(3)</sup>あるいは前田・林・森川<sup>(4)</sup>らの研究がみられる。しかし、固定アーチも含めたアーチの耐荷力に及ぼす残留応力や初期変形の影響を明らかにする資料は、ま

だ十分整っていないと思われる。

本文は、文献 1) の手法を発展させ、材料のひずみ硬化や残留応力および軸線の初期変形を考慮した解析手法を提示するものである。この手法によれば、任意の断面形状、残留応力分布、応力・ひずみ関係を有するアーチの面内非弾性座屈および終局耐荷力の解析を行うことができる。箱形断面のアーチを例にとり、材料のひずみ硬化や残留応力、軸線の初期変形を考慮した場合のアーチの耐荷力特性を、種々の数値計算により論じた。

一方、アーチの面内強度に関する実験的研究としては、これまで対称荷重による弾性分岐座屈強度に関する実験が数多く行われてきている。しかし、アーチに非対称荷重を載荷した場合の終局耐荷力に関する実験は数少ない。前田・藤本<sup>(5)</sup>は、2 ヒンジ円弧アーチの模型を用い、対称載荷および非対称載荷の場合の塑性崩壊実験を行い、理論値との比較検討を行っている。Deutsch<sup>(6)</sup>は、2 ヒンジアーチおよび固定アーチに対し、ライズ・スパン比  $f/l$  および支間の半分に載荷された荷重と満載荷重との比 (荷重比)  $p/w$  をパラメーターにとり、数多くの試験体について実験を行っており、その成果は系統的な実験的研究として評価されている。しかし、この実験では、耐荷力に大きい影響を及ぼす弾性係数と降伏応力度の比  $E/\sigma_F$  およびアーチの細長比  $a=l\sqrt{A/I}$  とは無関係に結果がまとめられている。さらに、Deutsch の行った実験の模型アーチの細長比は、 $a=l\sqrt{A/I}=1560$  と極めて大きな値であり、実際のアーチの細長比は、 $a=150\sim 250$  くらいであることを考えると、Deutsch の実験結果をそのまま参照するには、問題が多いと思われる<sup>(7)</sup>。

さらに、初期変形や残留応力の影響を考慮した実験的研究については、これまでほとんど見受けられない。

そこで、本文では、アーチ両端の境界条件、ライズ・スパン比  $f/l$ 、アーチの細長比  $a=l\sqrt{A/I}$ 、荷重比  $p/w$ 、初期変形量・スパン比  $e/l$ 、残留応力等をパラメーターに

\* 正会員 (株) 神戸製鋼所構造研究所 主任研究員

\*\* 正会員 (株) 神戸製鋼所構造研究所 研究員

\*\*\* 正会員 工博 (株) 神戸製鋼所構造研究所 次席研究員

選り、一連の模型実験を行い、種々の観点から検討を加えるとともに、本文の手法による計算値との比較検討を行った。

### 2. 理論解析

#### (1) 仮定

本解析は、2次解析理論に基づき伝達マトリックス法を用いてアーチの面内座屈および終局耐荷力の汎用解析を行うもので、文献 1) の解析手法を種々の残留応力分布を有する一般断面形状のアーチに適用できるように発展させたものである。本解析で用いた主な仮定は次のとおりである。

- a) 材料の応力とひずみの関係は任意とする。ただし履歴効果は考えない。
- b) 断面の応力状態が非弾性域に入った後も、平面保持の法則が成立する。
- c) 断面の図心を連ねた線をもってアーチの軸線を代表させる。
- d) アーチの軸線は連続な曲線をなす。ただし軸線を適当な長さの要素に分割するとき、二つの軸線要素の隣接点で接線の傾斜角の不連続があってもさしつかえない。
- e) 適当に分割された棒要素内では、変形前の曲率  $K_0$ 、伸び剛性  $EA$  および曲げ剛性  $EI$  は一定である。またこの要素に変形前のアーチ軸に関して法線方向および接線方向に作用する荷重  $p$  および  $q$  は、要素内軸線上で等分布する。
- f) アーチ軸線に作用する荷重は、変形後あるいは座屈後もその作用方向を変えない。
- g) 分割された棒要素内の断面力は、2次放物線で近似する。
- h) せん断変形の影響は無視する。
- i) 残留ひずみと荷重により生ずるひずみは重ね合わせが成立する。

仮定 a), g) および i) は、本解析が断面の残留応力を考慮できるよう文献 1) に比し、新しく設けた仮定である。すなわち、断面の残留応力を考慮するとき、アーチの終局状態においては、断面内のひずみはかなりの大きさに達することも考えられるので、材料のひずみ硬化を考慮し(仮定 a)、また非弾性域のひろがりより正確にとらえるため、文献 1) では断面力は要素内で一定としていた仮定をすて、新しく g) の仮定を採用したものである。このため文献 1) に比し、曲げモーメントと軸力に対する曲率変化と軸線のひずみの関係( $M-N-\phi-\epsilon$

関係) および基礎方程式から格間伝達マトリックスを誘導する方法につき計算方法の修正が必要となる。以下この2点につき説明する。

#### (2) 曲げモーメントと軸力に対する曲率の変化と軸線のひずみの関係 ( $M-N-\phi-\epsilon$ の関係)

本文では、 $M-N-\phi-\epsilon$  関係および曲げ剛性、伸び剛性の減少率を断面細分割法<sup>10), 11)</sup>により求める。この方法は、任意の部材断面を有限の微小な要素に分割し、それぞれの微小要素がある仮定した応力・ひずみ関係を有するものとして、 $M-N-\phi-\epsilon$  関係を求めるもので、任意の応力・ひずみ関係および残留応力分布を考慮することができる。本文では、ある与えられた  $M$  と  $N$  の組み合わせに対し、 $\phi$  と  $\epsilon$  を求める必要があるため、仮定したひずみ分布より計算した  $M$  と  $N$  が、与えられた  $M$  と  $N$  に一致するまで二重の繰り返し計算が必要となる。計算手順は、以下のとおりである。

- ① 部材断面を直交二軸方向に  $K \times L$  個の微小要素に分割する(図-1)。
- ② 断面内に存在する残留応力度  $(\sigma_r)_{ij}$  およびひずみ  $(\epsilon_r)_{ij}$  を各要素に与える。
- ③ 断面に新しく加えるべきひずみ分布を仮定する。各微小要素に加えるひずみ  $(\epsilon_a)_{ij}$  は、最外縁のひずみを  $\epsilon_c(0, j)$ ,  $\epsilon_T(K, j)$  とすると、  
 $(\epsilon_a)_{ij} = \epsilon_c - (\epsilon_c - \epsilon_T) i / K \dots\dots\dots(1)$
- ④  $(\epsilon_r)_{ij}$  と  $(\epsilon_a)_{ij}$  とを加え合わせて新しいひずみ  $(\epsilon)_{ij}$  を計算する。  
 $(\epsilon)_{ij} = (\epsilon_r)_{ij} + (\epsilon_a)_{ij} \dots\dots\dots(2)$
- ⑤ 仮定した  $\sigma-\epsilon$  関係に従って  $(\epsilon)_{ij}$  に対応する応力  $(\sigma)_{ij}$  を求める。
- ⑥  $(\sigma)_{ij}$  を用いて全断面の軸力を計算する。  
 $\bar{S} = \bar{N} / N_F \dots\dots\dots(3)$

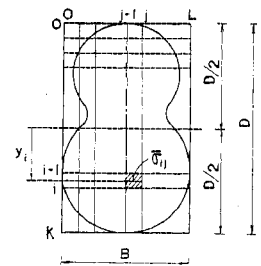


図-1 断面の細分割

ただし

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{L-1} \{(\bar{\sigma})_{i+1, j+1} - (\bar{\sigma}_r)_{i+1, j+1}\} \Delta A$$

ここに

$$(\bar{\sigma})_{i+1, j+1} = \{(\sigma)_{i, j} + (\sigma)_{i+1, j} + (\sigma)_{i, j+1} + (\sigma)_{i+1, j+1}\} / 4$$

$$(\bar{\sigma}_r)_{i+1, j+1} = \{(\sigma_r)_{i, j} + (\sigma_r)_{i+1, j} + (\sigma_r)_{i, j+1} + (\sigma_r)_{i+1, j+1}\} / 4$$

$$\Delta A = B \cdot D / K \cdot L, \quad N_F = \sigma_F A = \text{降伏軸力}$$

#### ⑦ 軸力の収束条件

$$\frac{S-\bar{S}}{S} < \epsilon_n \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\epsilon_n$  : 軸力の許容誤差

$$S = N/N_F$$

が満足されれば ⑨へ進む。

- ⑧ 式(4)の条件が満足されないときは、 $\epsilon_c$  を一定にしたまま、 $\epsilon_T$  のみを変化させて ③~⑥の過程を、式(4)が満足されるまで繰り返す。

- ⑨ (σ)<sub>ij</sub> より曲げモーメントを計算する。

$$\bar{m} = \bar{M}/M_F$$

ただし

$$\bar{M} = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{L-1} \{(\bar{\sigma})_{i+1,j+1} - (\bar{\sigma}_r)_{i+1,j+1}\} y_{i+1} \cdot dA \dots\dots\dots (5)$$

ここに

$$y_i = \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{K} + \frac{1}{2K} \right) D$$

$M_F$  : 降伏モーメント

- ⑩ 曲げモーメントの収束条件

$$\frac{m-\bar{m}}{m} < \epsilon_m \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\epsilon_m$  : 曲げモーメントの許容誤差

$$m = M/M_F$$

が満足されれば、⑫へ進む。

- ⑪ 式(6)の条件が満足されないときは、 $\epsilon_c$  を変化させて③~⑨の過程を、式(6)が満足されるまで繰り返す。

- ⑫ 与えられた曲げモーメントおよび軸力を満足する  $\epsilon_c$  および  $\epsilon_T$  が求まったならば、無次元化した圧縮縁ひずみ  $\epsilon_c = \epsilon_c/\epsilon_F$ 、引張縁ひずみ  $\epsilon_T = \epsilon_T/\epsilon_F$  を用いて、曲率比  $\phi$  および平均ひずみ比  $e_G$  は、次式で計算できる(図-2)。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi/\phi_F = \frac{\epsilon_c - \epsilon_T}{2} \\ e_G &= \frac{\epsilon_c + \epsilon_T}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7 \cdot a, b)$$

さらに、曲げ剛性および伸び剛性の減少率  $\alpha, \beta$  は、

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & R/\beta EA \\ 1 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R/\alpha EI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & qR(1+\tau) & -pR^2(1+\tau)/\alpha EI & 0 & 1+\tau \\ 0 & 0 & pR(1+\tau) & qR^2(1+\tau)/\alpha EI & -(1+\tau) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau = MR/\alpha EI$$

式(9)の係数行列に含まれる無次元化された曲げモーメント  $\tau$ 、曲げ剛性および伸び剛性の減少率  $\alpha, \beta$  は、アーチ軸線方向に変化するので、式(9)は係数に変化する非線形の微分方程式となっている。要素両端の状

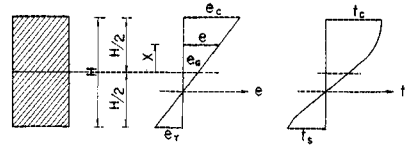


図-2 断面のひずみおよび応力分布

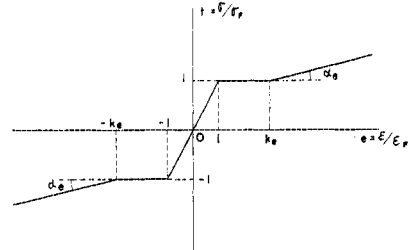


図-3 応力・ひずみ関係

それぞれ次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{m}{\phi}, \quad \beta = \frac{S}{e_G} \dots\dots\dots (8 \cdot a, b)$$

この手法は、任意の  $\sigma-\epsilon$  関係に対し適用できるが、本文の計算例では、すべて図-3に示したように3本の直線に仮定された  $\sigma-\epsilon$  を関係を用いた。同図において、応力、ひずみは、それぞれ降伏応力度および降伏ひずみで除して無次元化されており、 $k_e$  および  $\alpha_e$  は、それぞれ、ひずみ硬化開始時のひずみ比および、ひずみ硬化曲線の勾配を示している。

### (3) 格間伝達マトリックスの誘導

本解析では、アーチ軸線にそって分割された要素内においても、曲げモーメントおよび軸力の軸線方向の変化を考慮して格間伝達マトリックスを導く。このとき、基礎となる一階の連立常微分方程式は、次式で与えられる<sup>1)</sup>。

$$\frac{dZ_i}{d\theta} = A_i(\theta) Z_i + L_i \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} Z_i &= \{w, v, \psi, M, Q, N\}^T \\ L_i &= \{0, 0, 0, 0, pR(1+\tau), -qR(1+\tau)\}^T \end{aligned}$$

態量を関係づける格間伝達方程式は、次のように与えられる。

$$Z_i^L = U_i Z_{i-1}^R \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} Z_i^L &= \begin{bmatrix} Z_i(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Z_{i-1}^R = \begin{bmatrix} Z_i(0) \\ 1 \end{bmatrix} \\ U_i &= \begin{bmatrix} S_i & S_i \int_0^\varphi S_i^{-1}(\theta) L_i d\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

$S_i$  は、式 (9) の同次方程式の解の係数マトリックスを表わす。 $U_i$  は、格間伝達マトリックスであるが、本文ではこれを求める際の数値積分の方法として、Runge-Kutta の方法を用いた<sup>12)</sup>。

これらの伝達マトリックスが得られれば、文献 1) と同様の所論によりアーチ左端の未知状態量を決定する連立方程式が任意の境界条件に対して

$$BX = Y \dots (12)$$

の形で得られる。ここに、 $X$  は未知状態量ベクトル、 $Y$  は荷重ベクトル、 $B$  は係数マトリックスである。

式 (12) の係数マトリックスの行列式が、

$$\text{determ } |B| = 0 \dots (13)$$

となるとき不安定現象 (極限状態) が生じる。式 (13) は分岐座屈、終局耐荷力 (非弾性不安定現象) の両者に対して成立するが、式 (12) の同次式より求まる固有ベクトルのモードにより両者は区分できる。ただし、本文の計算対象では、前者は初期変形のないアーチに満載荷重の載荷した場合のみ生じ、アーチに非対称の初期変形を考慮した場合や半載荷重の載荷した場合はすべて後者の問題となり分岐座屈は生じず、変位が発散する荷重をもって終局耐荷力とする。

### 3. 数値計算

#### (1) $M-N-\phi-\epsilon$ の関係

図-4 に、無次元化された軸力  $S=0.7$  の場合の  $M-\phi$  関係を長方形断面および箱形断面について示す。鋼材の応力・ひずみ関係は、図-3 に示したものとし、 $\alpha_e = 0.01$ ,  $k_e = 10$  とした。箱形断面の高さ・幅比  $D/B = 8/5$ , フランジの幅厚比  $B/t_f = 50$ , ウェブの高さ・厚さ比  $D/t_w = 400/3$  である。長方形断面および箱形断面のそれぞれについて、図-4 に示したような残留応力分布を有する場合についても  $M-\phi$  関係を示した。図-5, 図-6 には、曲げ剛性の減少率と曲げモーメント, 伸び剛性の減少率と曲げモーメントの関係を示した。図-4, 5, 6 より、図-4 に示したような残留応力分布を有する長方形断面では、残留応力の影響は顕著であり、残留応力の存在により剛性は大きく低下することがわかる。また箱形断面においても残留応力の存在により、剛性はかなり低下している。実際のアーチ橋に用いられる断面は、箱形断面かパイプ断面が多く、溶接箱型断面の場合、降伏

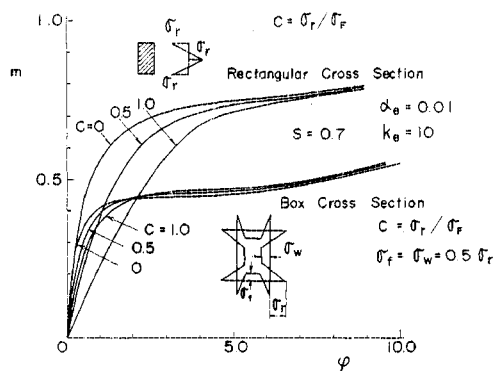


図-4 長方形断面および箱形断面の  $M-\phi$  関係

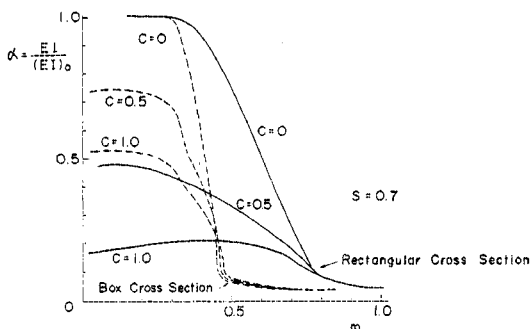


図-5 曲げ剛性の減少率と曲げモーメントとの関係

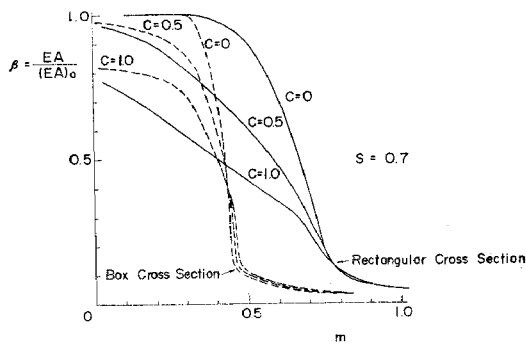


図-6 伸び剛性の減少率と曲げモーメントとの関係

応力度近くの残留応力が生じていることも十分考えられるので、アーチの耐荷力を計算するにあたって、残留応力は無視しえない影響を有するものと考えられる。

以下の数値計算では、すべて、本節と同じ形状を持つ箱形断面を用い、アーチの軸線形状は放物線とした。

#### (2) アーチの耐荷力におよぼす材料のひずみ硬化の影響

ここでは、材料のひずみ硬化が、アーチの耐荷力におよぼす影響を調べるため、図-3 のひずみ硬化開始時のひずみ比  $k_e$  の値を種々変化させ、アーチの耐荷力を求めた。結果を図-7 に示す。図で  $\sigma_{cr}$  は、極限荷重にお

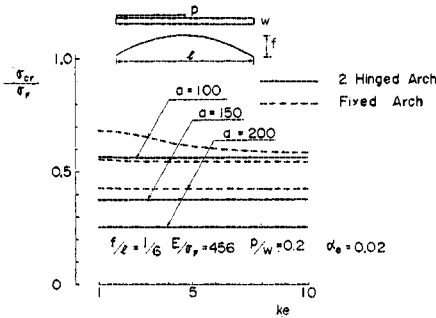


図-7 材料のひずみ硬化がアーチの耐荷力に及ぼす影響

ける水平反力をアーチの断面積で除したもので、縦軸は、この  $\sigma_{cr}$  と降伏応力度  $\sigma_F$  との比  $\sigma_{cr}/\sigma_F$  を示している。ただし、極限荷重と水平反力との関係式は、弾性一次理論による式を用いている。このとき、 $\sigma_{cr}/\sigma_F$  は次式により与えられる<sup>1)</sup>。

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_F} = \frac{E}{\sigma_F} \lambda_{cr} \frac{(1+0.5 p/w)}{8 \cdot a^2 \cdot f/l} \dots\dots\dots(14)$$

ただし、 $\lambda_{cr} = w_{cr} l^2 / EI$  で、 $w_{cr}$  は極限荷重時の満載等分布荷重強度である。図-7 で横軸は  $k_e$  を示している。図-7 ではアーチの細長比  $a=100, 150, 200$  の3通りについて示している。図-7 より、固定アーチで  $a=100$  かつ  $k_e=1\sim 5$  の場合には、かなりのひずみ硬化の影響がみられる。図-7 の計算例では、 $p/w=0.2$  とし、残留応力はないものとしている。 $p/w$  が大きい場合、また残留応力が存在する場合は、もう少しひずみ硬化の影響が大きくなることが考えられる。しかし、実際のアーチの細長比は 200 前後であり、また構造用鋼材の  $k_e$  は 5~12 であるので、アーチの耐荷力におよぼす材料のひずみ硬化の影響は、小さいと考えられる。このようにアーチの耐荷力におよぼすひずみ硬化の影響がそれほどみられない理由は、アーチの細長比が比較的大きく変形がそれほど進んでいない段階で、アーチとしての力学的機能を失ない、終局状態に達することによるものと思われる。以下の計算では、すべて、 $\alpha_e=0.01$ 、 $k_e=10$  としている。

(3) アーチの耐荷力に及ぼすアーチ軸線の初期変形の影響

柱の場合と同様、アーチにおいても、製作あるいは架設途中でアーチ軸線の初期変形がある程度生ずることはさけられないと考えられる。そこで、ここではアーチ軸線の初期変形が、アーチの耐荷力にどの程度の影響をおよぼすかを検討するために、図-8 に示すように、アーチの耐荷力をもっとも低下させると考えられる初期変形、すな

わち終局状態におけるアーチ軸線の変形と相似の初期変形を有するアーチの耐荷力を計算によって求め、結果を図-8~10 にまとめた。もちろん実際のアーチに生ずる初期変形の形状や大きさをどのように仮定するかという問題は、種々の検討が必要であるが、本計算例では、この影響がもっとも顕著に現われる場合として、図のような初期変形を選んだものである。満載等分布荷重 ( $p/w=0$ )、非対称荷重 ( $p/w=0.2$ ) をうけるアーチについて、アーチの細長比および最大初期変形量とスパンの比  $e/l$  をパラメーターにとり耐荷力を求めた。その結果を column curve と同様の形にまとめ、図-8~9 に示した。また図-10 は、細長比を一定 ( $a=200$ ) として、荷重比  $p/w$  を変化させたときの結果を示したものである。図-8 より、満載等分布荷重の場合には、 $e/l=0.0005$  の場合でも、かなりの耐荷力の低下をもたらし、弾性座屈と非弾性座屈の境界付近となる細長比のときもっともその影響が顕著になっている。この傾向は柱の場合におけるそれと同様である。図-9 より、 $p/w=0.2$  の非対称載荷の場合は、細長比のひろい領域にわたり初期変形の影響

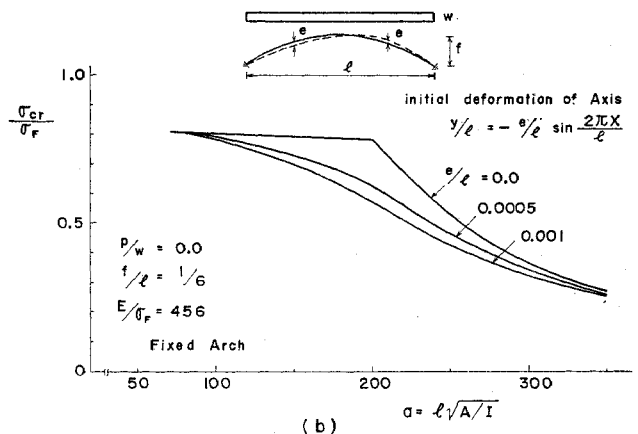
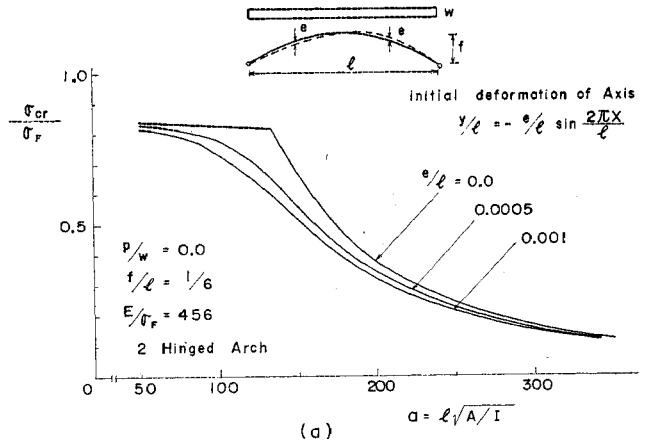


図-8 初期変形がアーチの耐荷力に及ぼす影響

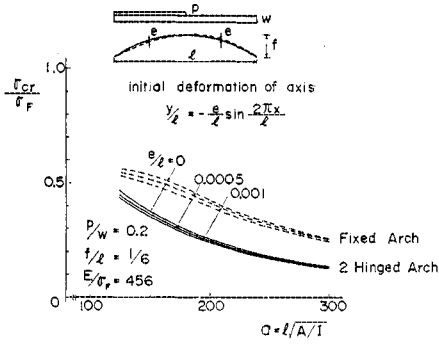


図-9 初期変形がアーチの耐力に及ぼす影響

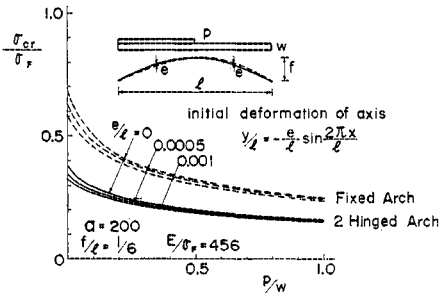


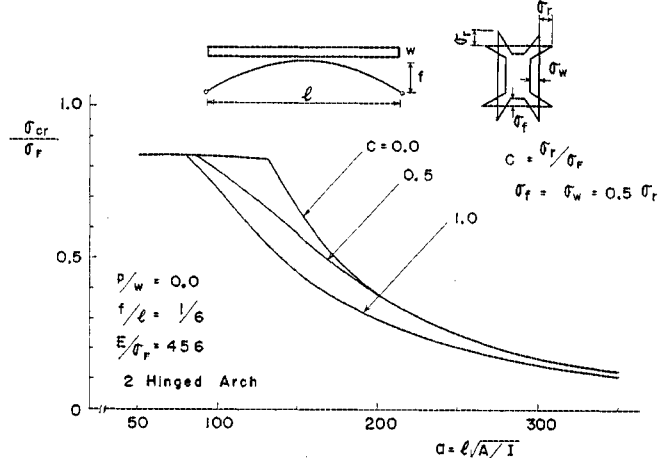
図-10 初期変形がアーチの耐力に及ぼす影響

はそれほど大きくないことがわかる。また 図-10 より、荷重比  $p/w$  が大きくなるにつれて初期変形の影響は小さくなっていくことがよみとれる。

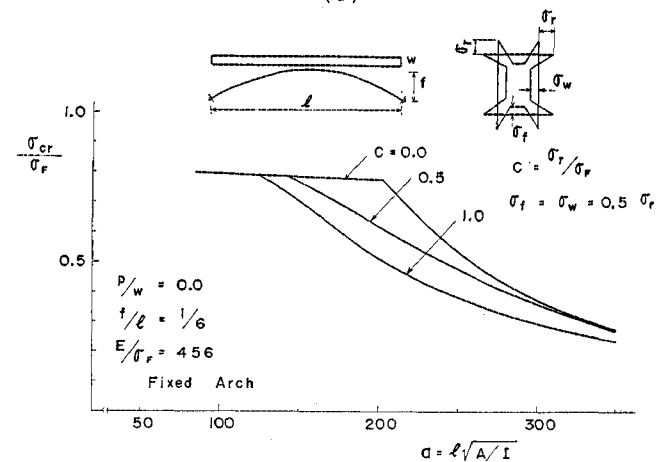
(4) アーチの面内耐力に及ぼす残留応力の影響

3. (1) に示したものと同様の箱形断面について、残留応力の大きさ、アーチの細長比、荷重比をパラメーターにとり耐力を計算し、結果を図-11, 12, 13 に示した。図-11, 12 はそれぞれ等分布荷重満載、非対称載荷 ( $p/w=0.2$ ) の場合の計算結果を column curve の形にまとめたものである。また、図-13 は、細長比を一定 ( $a=185$ ) とし、荷重比  $p/w$  を変化させたときの結果を示したものである。

図-11 より、初期変形の場合と同様、等分布荷重満載の場合は、弾性座屈と非弾性座屈の境界付近となる細長比のとき、残留応力の影響はもっとも大きくなっており、柱の耐力の場合と同様の傾向を示している。一方、 $p/w=0.2$  の非対称載荷の場合には、図-12 より図中のすべての領域の細長比に対し、残留応力の影響は同じ程度であり、2 ヒンジアーチでは  $\sigma_r/\sigma_F=0.5$  の場合で 9% 程度、 $\sigma_r/\sigma_F=1$  の場合で 16% 程度、固定アーチでは  $\sigma_r/\sigma_F=0.5$  の場合で 5% 程度、 $\sigma_r/\sigma_F=1.0$  の場合で 10% 程度残留応力の存在により耐力が減少している。また、図-13 より荷重比  $p/w$  の大きさにはあまり



(a)



(b)

図-11 残留応力がアーチの耐力に及ぼす影響

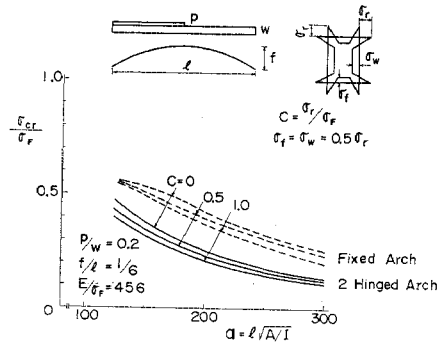
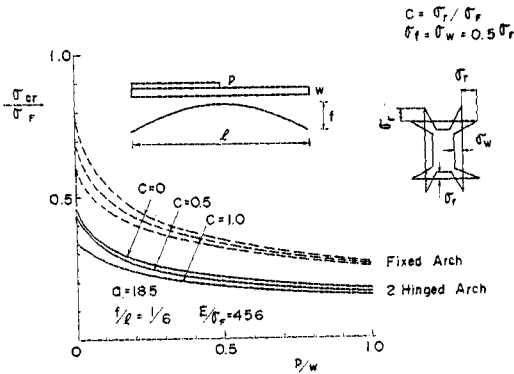


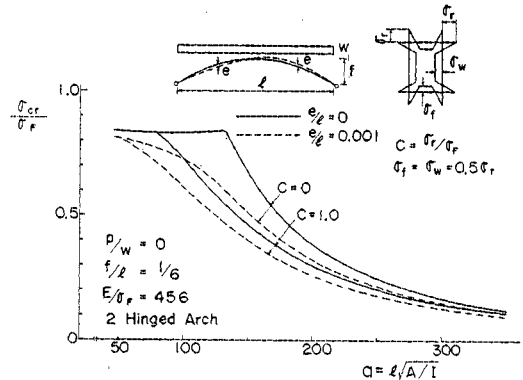
図-12 残留応力がアーチの耐力に及ぼす影響

関係なく、ほぼ一率に耐力は減少していることがわかる。このように、残留応力は、アーチの耐力をかなり減少させ、初期変形の存在以上に重要な意味をもつものと考えられる。

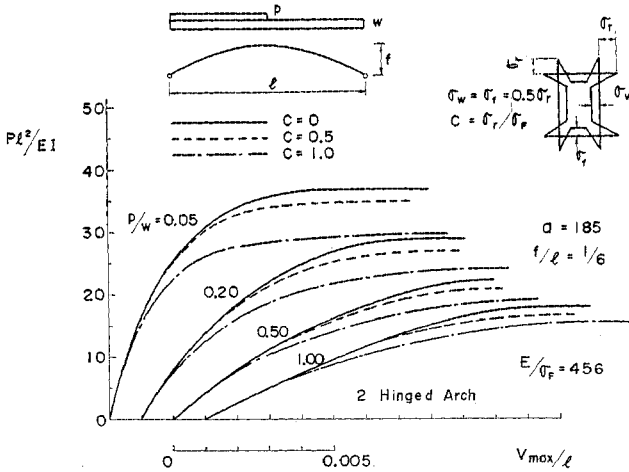
図-14 と 図-15 にはそれぞれ残留応力の存在する 2 ヒンジアーチ、固定アーチの荷重と最大鉛直変位との関係を示した。これらの図より、残留応力が存在する場



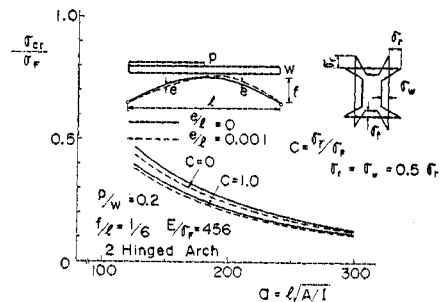
図一13 残留応力がアーチの耐荷力に及ぼす影響



図一16 アーチの耐荷力に及ぼす初期変形と残留応力の相乗効果（等分布荷重満載）



図一14 残留応力を有する2ヒンジャーチの荷重・最大鉛直変位図



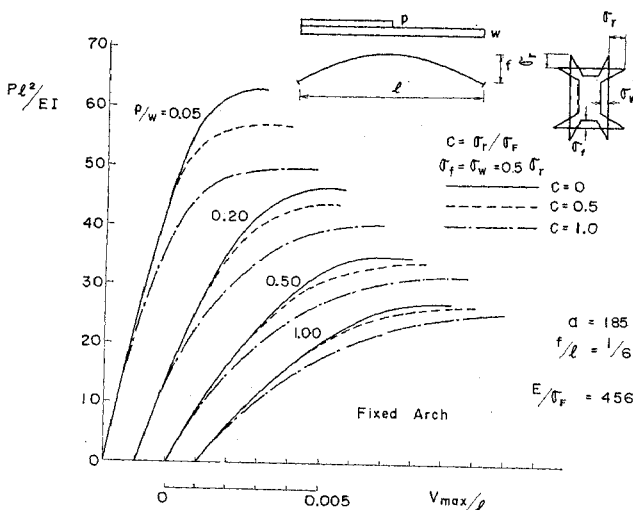
図一17 アーチの耐荷力に及ぼす初期変形と残留応力の相乗効果（非対称荷重）

(5) アーチの耐荷力に及ぼす初期変形と残留応力の相乗効果

ここでは、残留応力および軸線の初期変形をとともに有するアーチの耐荷力を計算し、結果を図一16, 17 に示した。図一16 は、等分布荷重満載の場合、図一17 は、非対称荷重 ( $p/w=0.2$ ) の場合の耐荷力曲線を示している。図一16 より、等分布荷重満載の場合には、初期変形と残留応力の相乗効果が、かなり顕著にあらわれていることがわかる。一方、図一17 より、非対称荷重の場合には、初期変形と残留応力の相乗効果はそれほどみられず、耐荷力におよぼす影響は、残留応力によるものが支配的で、初期変形の影響は小さいと考えられる。

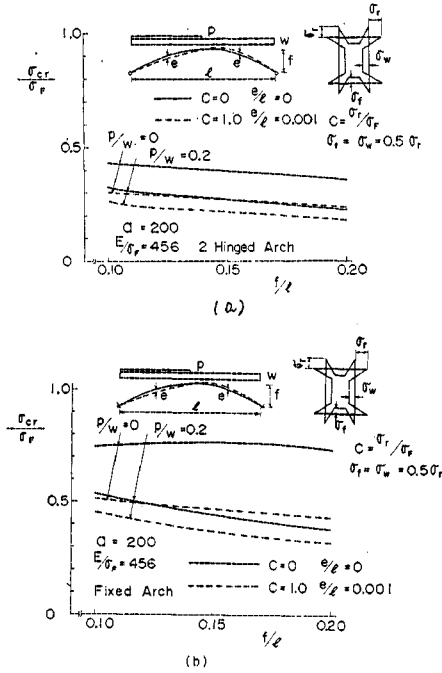
(6)  $f/l, E/\sigma_F$  と耐荷力の関係

以上の計算では、アーチのライズ・スパン比  $f/l$  は  $1/6$ 、材料の弾性係数と降伏応力度の比  $E/\sigma_F$  は  $456$  (SM 58 相当) として、初期変形や残留応力がアーチの耐荷力におよぼす影響を検討した。ここでは初期変形や残留応力を有する場合に  $f/l, E/\sigma_F$  の値と耐荷力との関係を検討する。

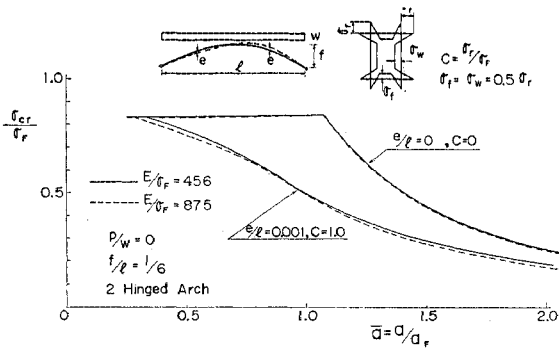


図一15 残留応力を有する固定アーチの荷重・最大鉛直変位図

合、荷重が比較的小さいときから変形が大きく進行していることが注目される。



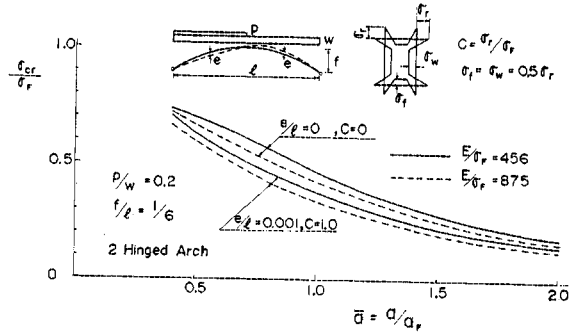
図一18 ライズ・スパン比  $f/l$  の影響



図一19 相関細長比を用いた耐荷力曲線 (2ヒンジアーチ, 等分布荷重満載)

図一18 は、 $f/l$  を 0.1~0.2 の間で変化させたとき、 $\sigma_{cr}/\sigma_F$  と  $f/l$  との関係を示したものである。図一18 よりわかるように、固定アーチで初期不整のない等分布荷重満載の場合を除けば、 $\sigma_{cr}/\sigma_F$  の値は、 $f/l$  が大きくなるにつれてほぼ一様に減少しており、 $\sigma_{cr}/\sigma_F$  と  $f/l$  の関係は、直線近似できるようである。

次に、 $E/\sigma_F=875$  (SS 41 相当) と 456 の 2 通りの値について耐荷力を求め、図一19~22 に示す。図一19, 20 は 2 ヒンジアーチ, 図一21, 22 は固定アーチの場合である。これらの図では耐荷力を、column curve でよく用いられる相関細長比の概念を用いて表示した。すなわち、等分布荷重が満載するときの座屈応力 (式 (14) の  $\sigma_{cr}$ ) が降伏応力度に達するときのアーチの細長比を  $a_F$  とし、細長比  $a$  を  $a_F$  で除したものを相関細長比  $\bar{a}$



図一20 相関細長比を用いた耐荷力曲線 (2ヒンジアーチの非対称載荷)

として、横軸に  $\bar{a}$  をとり、耐荷力曲線を表示した。このとき、 $a_F$  は式 (14) の左辺を 1 とおいて次式で与えられる。

$$a_F = \sqrt{\frac{E}{\sigma_F} (\lambda_{cr})_{p/w=0}^{elastic} \left(\frac{l}{8f}\right)} \dots\dots\dots (15)$$

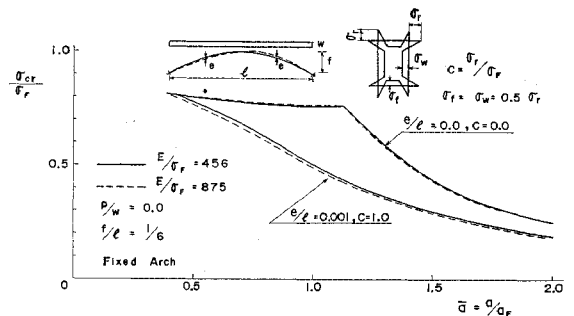
ここに  $(\lambda_{cr})_{p/w=0}^{elastic}$  は、等分布荷重満載の場合の弾性座屈係数、 $\lambda_{cr} = w_{cr} l^3 / EI$  である。

図一19, 21 より、等分布荷重満載の場合には、 $\bar{a}$  が特に小さい領域をのぞけば、初期不整の有無にかかわらず、上記の 2 種の鋼材に対する耐荷力曲線は、ほとんど差がない。また、図一20, 22 より非対称載荷の場合には、初期不整のある場合ない場合ともに、また 2 ヒンジアーチ、固定アーチともに、SS 41 に対する値が 10~15% 程度 SM 58 に対する値より下まわっている。

一方、図一19, 20 と 図一21, 22 を比較してみると、2 ヒンジアーチと固定アーチ両者の耐荷力曲線には、相異はあまりみられず、特に実橋に用いられることの多い  $\bar{a}=0.7\sim 2.0$  の範囲で、初期不整を考慮した場合、両者は非常に近似している。

#### 4. 模型実験

ここでは、本文の理論の妥当性を検証するために行った一連の模型実験について述べる。本文で対象としてい



図一21 相関細長比を用いた耐荷力曲線 (固定アーチ, 等分布荷重満載)



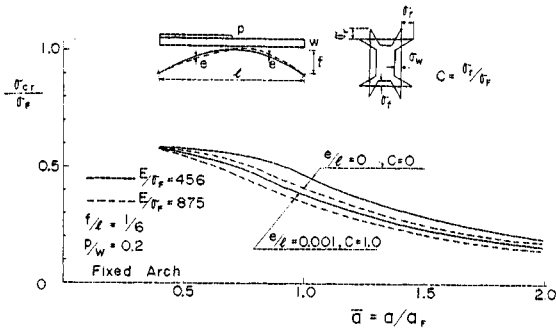


図-22 相関細長比を用いた耐荷力曲線 (固定アーチ, 非対称載荷)

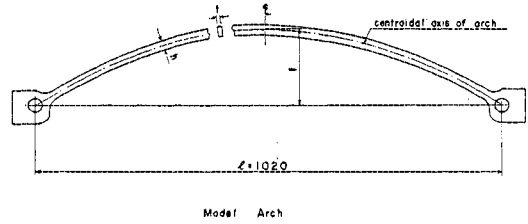


図-23 試験体寸法

また断面の高さ  $h$  は、アーチの細長比  $a=300, 200, 140$  に対応して、12 mm, 18 mm, 25 mm とした。表-2 に各実験系列の使用鋼材の材料試験結果を示す。それぞれの実験系列の使用鋼材より製作した JIS 1 号試験片 3 本の引張試験結果の平均値である。

表-2 使用鋼材の材料試験結果

Test Series	Plate Thickness nominal (measured) m.m.	Yield Stress $\sigma_F$ kg/cm <sup>2</sup>	Young's Modulus $E$ kg/cm <sup>2</sup>	$E/\sigma_F$	$k_{\theta}$	Tensile Strength $\sigma_B$ kg/cm <sup>2</sup>
I	10 (9.90)	2 940	$2.08 \times 10^6$	707	12	4 560
II	10 (9.63)	2 395	$2.06 \times 10^6$	860	9	3 630
III	6 (5.91)	2 940	$2.06 \times 10^6$	700	12	4 030

るアーチの面内座屈および耐荷力の問題では、アーチ中心軸の幾何学的寸法 ( $f/l$ )、アーチの細長比 ( $a=l\sqrt{A/I}$ )、材料の弾性係数と降伏応力度の比 ( $E/\sigma_F$ )、無次元荷重 ( $Pl^2/EI$ ) および荷重比 ( $p/w$ ) が重要な無次元量となる。本実験では、アーチの軸線形状は放物線とし、製作の容易さや局部座屈をさけるなどの観点から、アーチの断面を長方形断面とし、上記の無次元パラメータを実際のアーチ橋で考えられる程度の範囲にとって実験を行った。

(1) 実験系列

実験系列を表-1に示す。実験系列 I (表-1 Series I) では、基本的パラメータである  $f/l, a=l\sqrt{A/I}$ ,

表-1 実験系列

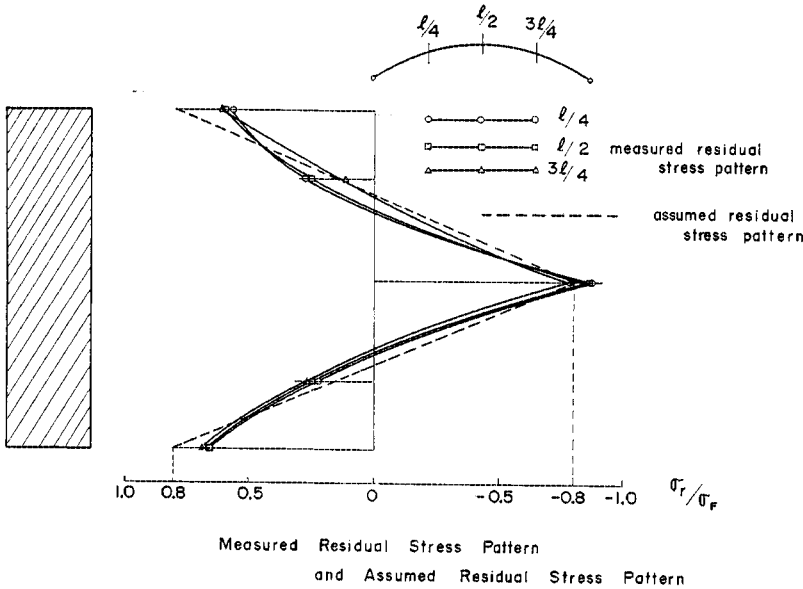
Series	$E/\sigma_F$	$f/l$	$a = l\sqrt{A/I}$	$p/w$	$\theta/l$	$C, \sigma_F/\sigma_B$
I*	707	1/6	140	0.2	0	0
			200	0.02		
			200	0.2		
		1/10	200	0.5		
			200	1.0		
			200	1.0		
II*	860	1/6	200	0.05	0	0
III**	700	1/6	140	0.05	0	0
				0.2	0	0.8
				0.5	0	0.8
				1.0	0	0.8

\* Series I, II : 2 Hinged Arch and Fixed Arch  
\*\* Series III : only 2 Hinged Arch

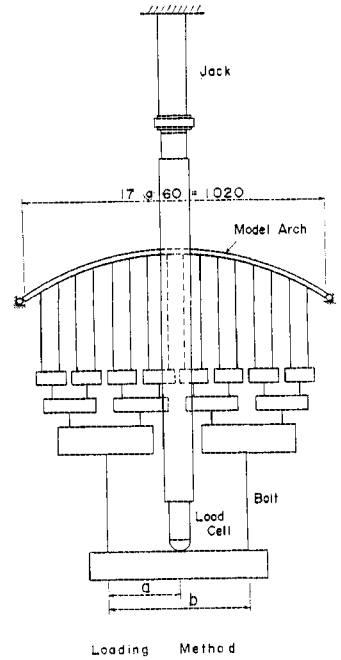
実験系列 I および II については、それぞれ 2 ヒンジアーチおよび固定アーチの両方について実施し、実験系列 III については、2 ヒンジアーチについてのみ実施した。実験系列 II については、3.(3)の計算例で用いたものと同じ初期変形  $y/l = -e/l \sin(2\pi x/l)$  を与えている。また、実験系列 III については、残留応力の影響が顕著にあらわれるように、後述の図-24 に示すような残留応力を与えて実験を行った。試験体の数は実験系列 I, II, III について、それぞれ 20, 6, 9 計 35 体である。図-23 に試験体寸法を示す。断面の厚さ  $t$  は、系列 I, II では 10 mm, III では 6 mm,

(2) 試験体の製作

試験体の製作にあたっては、次のような方法を用いた。実験系列 I および II については、まず試験体と同一寸法のゲージを手仕上げにより正確に製作し、次にこのゲージを用いて自動微いフライス盤により各試験体を製作した。この方法により、残留応力のない試験体をかなりの高精度で製作することができた。実験系列 III については、まず実験系列 I, II と同様の方法により残留応力を有しない試験体を正確に製作した。次にアーチの中心軸部分 10 mm 幅を除く全断面を軸線にそってドライアイスにより冷却する治具を製作し、これを用いて試験体を拘束、冷却しながらアーチの中心軸に沿って 2 mm 径の溶接棒により溶接ビードをおいた。両面の溶接が終了後、グラインダにより試験体表面の溶着金属を削り落した。この方法により全長にわたりほぼ一様な所要の残留応力を導入することができた。また溶接熱による試験体の変形もほとんど生じなかった。図-24 に載荷試験用の試験体とまったく同一の条件で製作した試験体の残留応力測定結果を示す。測定には、抵抗線ひずみ計を用い、機械的切断による応力解放法を採用した。測定箇所はスパンの中央、1/4 点および 3/4 点の 3 箇所であり、1 箇所について 8 枚の抵抗線ひずみゲージを貼付した。図-24 よりわかるように、測定箇所の違いによる測定値のばらつきもほとんどみられず、一様な残留応力が導入されている。図中には、計算に用いた理想化した残留応力分布を破線で示した。



図—24 残留応力測定結果



図—25 トーナメント方式による載荷方法

(3) 実験方法

荷重状態としては、満載等分布荷重  $w$  およびこれに加えてスパン片側に等分布荷重  $p$  が載荷した場合を想定した。載荷方法は、図—25 に示すトーナメント方式によった。できるだけ分布荷重の条件に近づくよう、トーナメントを数多く組み、試験体に 16 点の集中荷重として載荷した。油圧ジャッキの荷重  $P$  の作用位置を変化させることにより、荷重比  $p/w$  の値を操作している。油圧ジャッキの荷重  $P$  は、ロードセルにより測定し、また荷重の偏心比を 図—25 の最下段のボルトに貼付した抵抗線ひずみゲージによって照査した。試験体の周囲には、枠を組んで試験体の横倒れを防止した。この場合、横倒れ防止枠と試験体との間に生じる摩擦抵抗により面内変形が拘束されないように、枠と試験体との間に小さな並列ローラ（フラットゲージ）をあて、さらにこのローラを、変位の方向と一致するようあらかじめ計算で求めた方向に配した。鉛直変位およびアーチクラウンの水平変位、回転角等を、差動型変位計により測定した。また、すべての試験体について支間  $1/4$  点付近に、またいくつかの試験体については、アーチ軸方向に沿って数箇所ひずみゲージを貼付して、各荷重時のひずみを測定した。写真—1 に実験状況を示す。

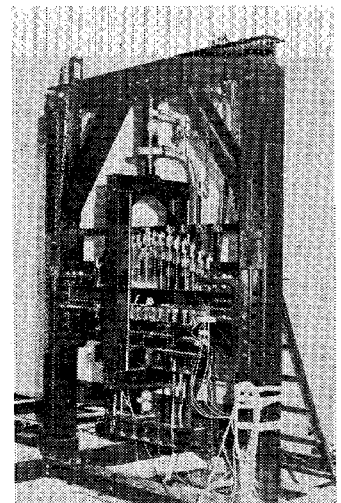
両端の支持装置として、2 ヒンジアーチについては、図—23 に示す試験体端部の孔に直径 30 mm の軸を通し、この軸を 1 端につき 2 個のピロー型ブロックで支持した。また固定アーチについては、固定治具に試験体端部をはさみつけ高力ボルトにより締付けて固定した。この装置により十分回転自由および固定の支持条件を満足

することができた。

(4) 実験結果

a) 極限状態までの変形過程

実験系列 I の代表例として  $f/l=1/6$ 、細長比  $a=200$  近傍の試験体の変形について述べる。図—26 は断面応力がまだ弾性範囲にあるとき ( $P^2/EI=10$ ) のたわみ曲線を示す。ここに荷重  $P$  は全荷重  $P=(w+0.5 p)l$  である。図—27 および 図—28 は 2 ヒンジアーチ、固定ア



写真—1 載荷試験状況

ーチに対する全荷重  $P$  と最大鉛直変位  $v_{max}$  の関係を示している。また、図—29 は、上記実験の中から  $p/w=0.2$  の場合の極限状態近傍における非弾性域のひろがりを示したものである。これらの図における実験値と計算値との比較により、本理論は 2 ヒンジアーチ、固定アーチともにアーチの極限状態にいたる変形の過程を十分な精度で追跡しえるものであるといえよう。初期変形を有するアーチに対する実験系列 II についても同様の変形過程が追跡されているが、初期変形のために曲げモーメントが大きくなり、極限荷重は小さくなるが、変形過程

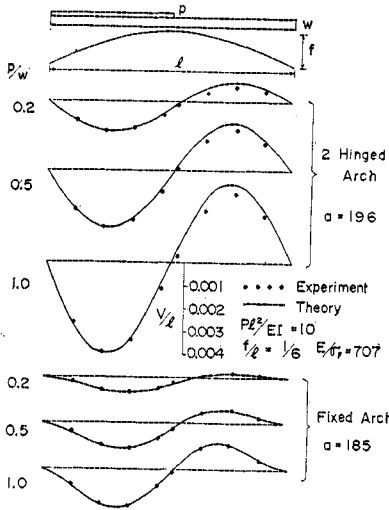


図-26 非対称載荷時のたわみ曲線 (Series I)

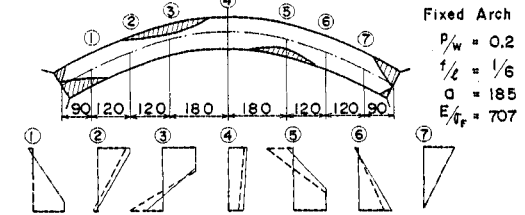
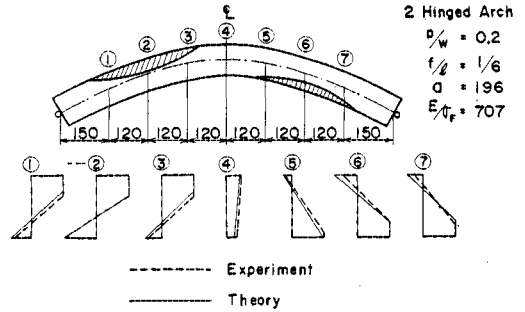


図-29 極限状態直前の応力分布 (Series I  $p/w=0.2$ )

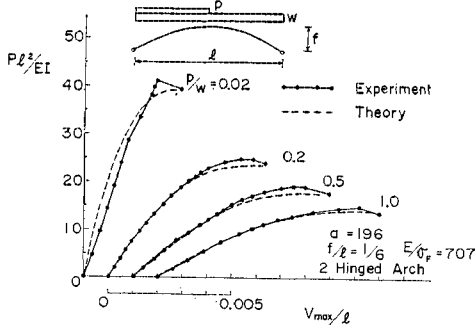


図-27 荷重・最大鉛直変位図 (Series I 2ヒンジアーチ)

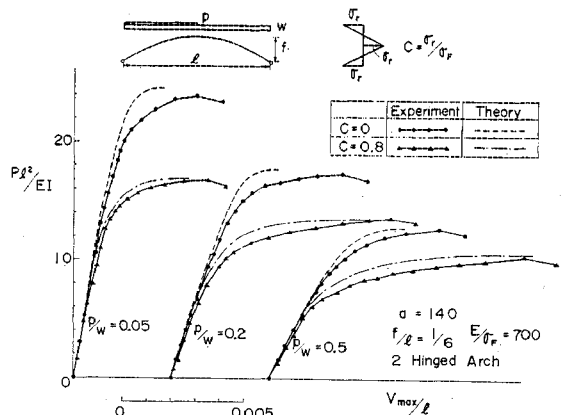


図-30 荷重・最大鉛直変位図 (Series III)

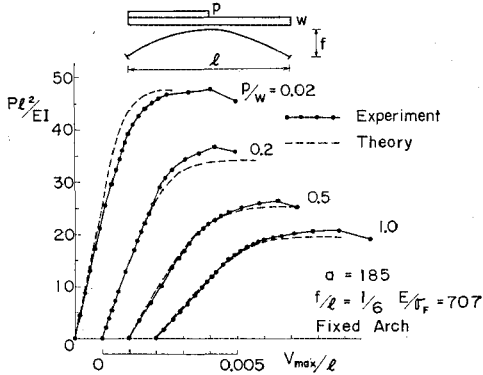


図-28 荷重・最大鉛直変位図 (Series I 固定アーチ)

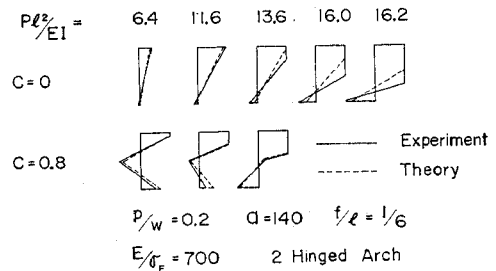


図-31 支間  $l/4$  点における応力分布 (Series III)

は定性的に実験系列Iのものと同大差ない。図-30に、実験系列IIIに関する、荷重と最大鉛直変位との関係を示す。また  $p/w=0.2$  の場合について支間  $l/4$  点の断面における各荷重段階の断面の塑性化の状態を図-31に示す。これらの図より、残留応力があると荷重-変位曲線は、荷重のかなり小さい状態から非線形になるがそれ

ほど著しいものではなく、荷重がある値に達すると急に断面内の非弾性域が進展し、このため剛性の低下によって変位が急増することが認められる。これらの図における実験値と計算値の比較から、残留応力のある場合についても、本理論はよく変形過程を追跡しえることが検証された。

b) 耐荷力曲線

耐荷力に関する実験値と計算値を図—32~36に示す。

図—32は、 $p/w=0.2$ としアーチの細長比を変化させたときの  $\sigma_{cr}/\sigma_F$  を示したものである。図よりアーチの細長比は耐荷力に大きな影響を及ぼすことが実験結果からも明らかである。図よりわかるように、 $a \cong 300$ を除いて実験値は計算値と良好な一致を示している。 $a \cong 300$ の場合は断面が小さく従って極限荷重も小さいので横倒れ防止用のローラが若干試験体の面内変形を拘束し、やや大きい耐荷力が得られたものではないかと思われる。

図—33および図—34は、それぞれ  $f/l=1/6, 1/10$  で  $a \cong 200$  のアーチの  $\sigma_{cr}/\sigma_F$  と  $p/w$  の関係を示したものである。明らかに  $p/w$  が耐荷力に影響していること、また両図の比較により  $f/l$  も耐荷力に影響を与えていることが読みとれる。

図—35は、アーチ軸線の初期変形の影響を調べるために行った実験系列IIの結果を示す。 $p/w=0.05$ の場合については本実験では2ヒンジアーチ、固定アーチとも初期変形が耐荷力にかなりの影響を与えている。

図—36は、残留応力に関する実験系列IIIの結果である。図から明らかなように、残留応力は耐荷力に影響を与えること、また  $p/w$  が小さいほどその影響が大きいことがわかる。

5. 結 言

本文では、材料のひずみ硬化、断面の残留応力および軸線の初期変形を考慮したアーチの耐荷力解析を行い、種々の数値計算により、これらがアーチの耐荷力におよぼす影響について論ずるとともに、本文の計算手法の妥当性を検証するために行った模型実験について報告した。得られた主な結果を要約すると次のとおりである。

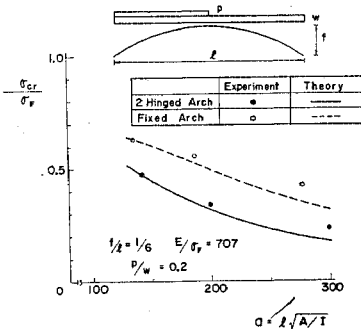
(1) 材料のひずみ硬化は、2ヒンジアーチの耐荷力にはほとんど影響をおよぼさない。この点は、すでに文献4)においても同様の結論が得られている。固定アーチで、特に細長比が小さい場合には、かなりの影響がみられる。しかし、一般には、ひずみ硬化の影響は小さいと考えられる。

(2) 溶接により断面に生じる残留応力は、アーチの耐荷力をかなり低下させ、特に等分布荷重満載でかつアーチの細長比が弾性座屈と非弾性座屈の境界付近のとき、その低下が著しい。

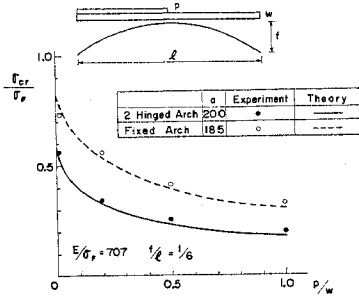
(3) 支間を一波長とする正弦形のアーチ軸線初期変形を考えたとき、軸線初期変形がアーチの耐荷力におよぼす影響は、残留応力のそれとほぼ同様の傾向を有する。しかし、耐荷力の低下の割合は、残留応力によるものに比べて小さい。

(4) 等分布荷重満載のとき、残留応力と軸線初期変形がアーチの耐荷力低下におよぼす相乗効果はかなり顕著にみられる。一方非対称載荷の場合には、相乗効果はそれほど大きくなく、耐荷力におよぼす影響は残留応力によるものが支配的になると考えられる。

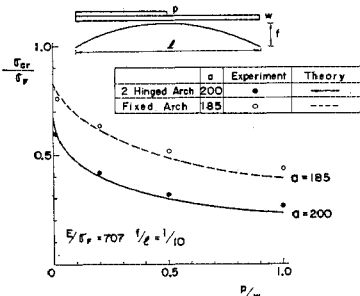
(5)  $\sigma_{cr}/\sigma_F$  の値は、ライズ・スパン比  $f/l$  が、0.1~0.2の範囲において、 $f/l$  が大となるにつれてほぼ一様に減少する。



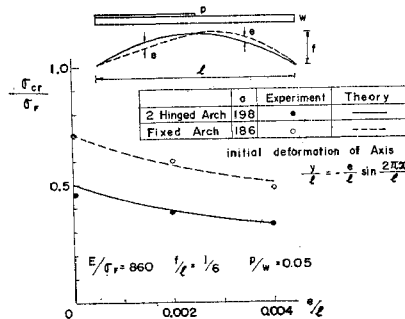
図—32 耐荷力に関する実験値と計算値の比較 (細長比の影響)



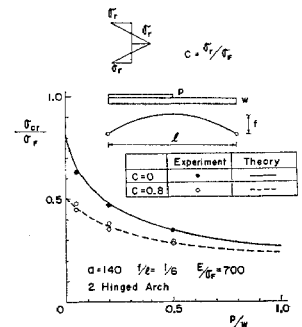
図—33 耐荷力に関する実験値と計算値の比較 (荷重比の影響  $f/l=1/6$ )



図—34 耐荷力に関する実験値と計算値の比較 (荷重比の影響  $f/l=1/10$ )



図—35 耐荷力に関する実験値と計算値の比較 (初期変形の影響)



図—36 耐荷力に関する実験値と計算値の比較 (残留応力の影響)

(6) 本計算結果を、柱の耐荷力における場合と同様の相関細長比  $\bar{a}$  を用いて整理すれば、耐荷力曲線は、SS 41 と SM 58 の 2 種の鋼種間でほとんど同一の曲線となった。

(7) アーチの細長比  $a = l\sqrt{A/I}$ 、ライズ・スパン比  $f/l$ 、荷重比  $p/w$ 、軸線の初期変形  $e/l$ 、断面の残留応力分布等をパラメーターに選んだ一連の模型実験の結果は、2 ヒンジアーチ、固定アーチのいずれに対しても、極限状態にいたるまでの変形過程および終局耐荷力ともに、計算値と良好な一致を示し、本理論の妥当性を検証することができた。

今後に残された問題として、本文では取扱わなかった断面形状の影響、断面変化の影響についても検討を加え、耐荷力に基づく実用的な設計公式を確立することが望まれる。数値計算は、(株)神戸製鋼所、コンピューターセンターの IBM S/370-158 によった。

記号

$v, w$  : 変形前のアーチ軸に関し法線方向および接線方向の変位成分

$\psi$  : たわみ角

$M, Q, N$  : 断面の曲げモーメント、せん断力および軸力

$\sigma_F, \epsilon_F$  : 降伏応力度および降伏ひずみ

$\alpha_e, k_e$  : ひずみ硬化曲線の勾配およびひずみ硬化開始時のひずみ比  $e = \epsilon/\epsilon_F$

$M_F = \sigma_F W$  : 純曲げによる降伏曲げモーメント ( $W$  は断面係数)

$N_F = \sigma_F A$  : 軸力のみによる全断面降伏力 ( $A$  は断面積)

$\phi_F$  : 純曲げにより降伏に達したときの曲率変化

$m = |M|/M_F$  : 無次元化した曲げモーメント

$S = |N|/N_F$  : 無次元化した軸力

$\alpha$  : 曲げ剛性の減少率

$\beta$  : 伸び剛性の減少率

$c = \sigma_r/\sigma_F$  : 無次元化した最大残留応力

$a = l\sqrt{A/I}$  : アーチの細長比

$\sigma_{cr}$  : 極限荷重時の水平反力をアーチの断面積で除したもの

$a_F$  : 等分布荷重が満載したときの  $\sigma_{cr}$  が降伏応力度に達するときのアーチの細長比

$\bar{a} = a/a_F$  : アーチの相関細長比

参考文献

- 1) 新家 徹・頭井 洋・波田凱夫 : アーチの面内非弾性座屈および終局耐荷力の解析, 土木学会論文報告集, No. 244, pp. 57~69, 1975-12.
- 2) 波田凱夫・新家 徹・頭井 洋 : 伝達マトリックス法によるアーチの面内弾性座屈および 2 次の応力問題の解析, 土木学会論文報告集, No. 224, pp. 1~11, 1974-4.
- 3) Namita, Y. : Die Theorie II. Ordnung von Krummen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, Proc. of JSCE, No. 155, pp. 32~41, 1968.
- 4) Kuranishi, S. and Le-Wu Lu : Load carrying capacity of two-hinged steel arches, Proc. of JSCE, No. 204, 1972.
- 5) Kuranishi, S. : Allowable stress for two-hinged arch, Proc. of JSCE, No. 213, pp. 71~75, 1973.
- 6) Komatsu, S. and T. Sakimoto : Nonlinear analysis of spatial frames consisting of members with closed cross-sections, Proc. of J.S.C.E., No. 252, 1976.
- 7) 前田幸雄・林 正・森川孝義 : 変形を考慮したアーチ橋の弾塑性立体解析, 土木学会関西支部 年次 学術講演会講演概要, I-8, 1975.4.
- 8) 前田幸雄・藤本一男 : 2 ヒンジアーチの塑性崩壊荷重の算定について, 土木学会論文報告集, No. 174, pp. 25~40, 1970-2.
- 9) Deutsch, E. : Das Knicken von Bogenträgern bei unsymmetrischer Belastung, Bauingenieur, 1940-12.
- 10) 五十嵐定義・松井千秋ほか : 繰返し組合せ応力を受ける鋼構造部材断面の弾塑性性状について, 建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1057~1060, 1969-8.
- 11) 吉田 博・西田 進 : 変断面 H 型鋼柱の強度と変形, 土木学会論文報告集, No. 220, pp. 17~27, 1973-12.
- 12) Pestel and Leckie : Matrix Methods in Elasto-mechanics, McGraw-Hill, 1963.

(1976.8.20 受付)