

## 変形を考慮した薄肉断面円弧アーチの曲げねじれ座屈

LATERAL-TORTIONAL BUCKLING OF THIN WALLED CIRCULAR  
ARCH ACCOUNTING FOR PREBUCKLING DEFLECTIONS

薄 木 征 三\*

By Seizo USUKI

## 1. ま え が き

薄肉断面部材の有限変位理論に関する研究は、部材の座屈問題に関連して、特に最近著しい発展が見られる。座屈後の変位を支配する微分方程式を誘導する手段としては、座屈した状態での幾何学的考察からつり合いの微分方程式を求める方法、あるいは、座屈後の変位状態に、仮想仕事の原理を適用し、増分理論の概念に基づいて微分方程式を求める方法などがある。西野<sup>1)</sup>らは、これらの方法において、応力場と変位場をはじめから線形化して与えている点を問題であるとして、薄肉直線材を対象とし、三次元弾性体の有限変位の場合のひずみ-変位関係式(非線形項の一部は無視)を基礎として、棒理論で用いられる横断面形不変とせん断ひずみに関するオイラー・ベルヌーイの仮定を適用して変位場を求めた。ついで、この変位場を用いて仮想仕事の原理から一般的な荷重を受ける場合の座屈支配方程式と境界条件を導いた。得られた方程式に対して、二軸対称断面をもつ両端単純支持ばりの純曲げによる横倒れ座屈問題を取り上げ、座屈前の変位を考慮することにより、弱軸まわりに曲げを作用させた場合は座屈しないことを理論的に説明している。この事実は、結果の式には若干の差が見られるが、ほかの研究者によっても相前後して認められつつあるように思われる<sup>2)~4)</sup>。同じく西野<sup>5)</sup>らは正確なひずみ-変位関係式を基に、一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論を展開し、古典的なエラスティカ(Elastica)の問題を含む精密な研究を行って、はり-柱の理論をはじめ、従来有限変位理論といわれてきた種々の理論の相互関係を体系的に整理している。

これら最近の研究は、座屈支配方程式を力のつり合い、もしくはエネルギー原理から求める場合、および座屈問題に限らず一般的な有限変位問題を扱う場合は、ひ

ずみ-変位関係式も含めた変位場の仮定が重要であることを指摘している。

以上は直線材の場合であるが、薄肉断面の曲線材については、直線材の場合に対応する有限変位理論はいまだ十分議論されるに至っていないようである。遠田<sup>6)</sup>は曲線材の二次の応力問題を解析しているが、ねじれ率の表式に微小変位理論と同じものを用いている点で不十分のように思われる。曲線材の座屈問題を扱った Vlasov<sup>7)</sup>、空間で任意の曲率をもつ棒の二次理論を扱った波田<sup>8)</sup>などの報告では、幾何学的な考察に基づいて得られた部材軸線の曲率とねじれ率の変化には変位の二次項まで考慮されているが、部材横断面内の任意点の変位は、変位を論じる軸線の変位の一次式で表わされている点で統一性に欠けるように思われる。

ここでは、部材軸方向に曲率一定な薄肉曲線材を対象として、薄肉回転シェルの有限変位のひずみ-変位関係を基に、直線材に用いられるのと同様の仮定を適用した場合の変位場の決定を試みる。薄肉曲線材は一般に、薄肉中心面が部材の横断面内と部材軸方向の2方向に曲率をもっていることが特徴的であるが、ここでは、従来の直線材に用いられる仮定に、部材軸線の曲率に関して仮定を加え、さらに軸方向変位の微係数が小さいとする従来の仮定を曲線材の場合に拡張して解析を行った。用いられる仮定は次のようである。

- (i) 断面寸法にくらべて部材長と部材軸線の曲率半径は十分に長く、部材軸方向の変位の部材軸に直交方向の微係数は小さく、部材軸方向ひずみも小さい。
- (ii) 断面は変形しない。
- (iii) 薄肉中心面に垂直で、部材軸線に平行な面内のせん断ひずみは無視しうる。
- (iv) 薄肉中心面のせん断ひずみのうち、直応力や荷重とつり合い状態にあるせん断応力によるせん断ひずみは小さく無視しうる(オイラー・ベルヌー

\* 正会員 秋田大学助教授 鉱山学部土木工学科

イの仮定).

仮定 (i) は, 曲線材断面の最大寸法と部材長および部材軸線の曲率半径の比が 1/10 以下程度であることを想定している. また, 微係数が小さいとは, 微係数のオーダーがひずみのオーダー以下であることを意味する. このほかに単軸応力状態の直ひずみ-直応力関係を仮定する. さらに, 曲線材を構成する材料として鋼やコンクリートを想定し, ひずみのオーダーが  $10^{-4} \sim 10^{-3}$  程度の微小ひずみの有限変位を前提とする.

以上の仮定と前提を基に, 薄肉曲線材の座屈問題を扱うための基礎としての変位場を誘導し, 最後に解析例として, 座屈直前の変形を考慮した軸対称断面アーチの純曲げによる横倒れ座屈荷重を求める.

### 2. ひずみ-変位関係式

薄肉曲線材の部材全体の様子を 図-1(a) に, その断面形を 図-1(b) に示す. 図-1(b) で,  $(x, y, z)$  は, 適当に選ばれた点  $O$  を原点とする右手系直角座標であり,  $(s, n, \theta)$  は, 板厚中心線上の任意点を原点とする直交曲線座標である. いずれの座標系とも, 断面上に固定されている.  $R_1^*$  と  $R_2^*$  はそれぞれ, 薄肉中心面の断面内, すなわち,  $(s, n)$  面内と, それに直交する  $(n, \theta)$  面内の曲率半径である.  $\rho^*$  は, 薄肉中央面の, 断面の回転軸 ( $z$  軸) まわりの曲率半径である.  $R_1^*$  と  $R_2^*$

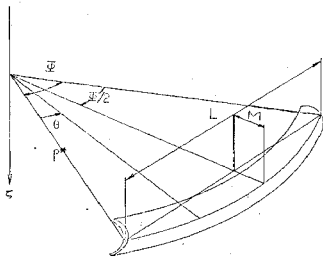


図-1(a)

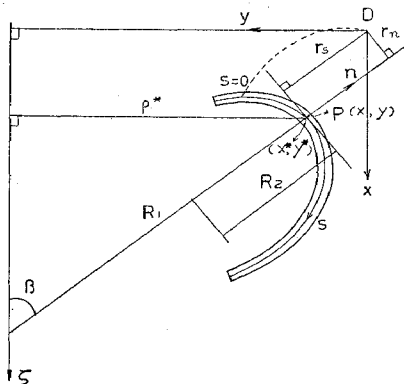


図-1(b)

は,  $n$  の負の側に中心があるときは正,  $\rho^*$  は断面が  $z$  軸を横切らないとすると常に正である.

薄肉曲線材を, 薄肉回転シェルと見なすとき, ラグランジュ表示のひずみ-変位関係式は次のようである<sup>9), 10)</sup>.

$$\epsilon_s = \frac{1}{1+n/R_1^*} \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1^*} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+n/R_1^*)^2} \times \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots(1.a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\xi}{\rho^*} m + \frac{\eta}{\rho^*} l \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+n/R_2^*)^2} \times \left\{ \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{w}{\rho^*} m \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho^*} l \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\xi}{\rho^*} m + \frac{\eta}{\rho^*} l \right)^2 \right\} \dots\dots\dots(1.b)$$

$$\epsilon_n = \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots(1.c)$$

$$\tau_{s\theta} = \frac{1}{1+n/R_1^*} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{\rho^*} m \right) + \frac{1}{(1+n/R_1^*)(1+n/R_2^*)} \times \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1^*} \right) \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{\rho^*} m \right) + \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1^*} \right) \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho^*} l \right) + \frac{\partial w}{\partial s} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\xi}{\rho^*} m + \frac{\eta}{\rho^*} l \right) \right\} \dots\dots(1.d)$$

$$\tau_{\theta n} = \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho^*} l \right) + \frac{1}{1+n/R_2^*} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial n} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{\rho^*} m \right) + \frac{\partial \eta}{\partial n} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho^*} l \right) + \frac{\partial w}{\partial n} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\xi}{\rho^*} m + \frac{\eta}{\rho^*} l \right) \right\} \dots\dots(1.e)$$

$$\tau_{ns} = \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{1}{1+n/R_1^*} \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1^*} \right) + \frac{1}{1+n/R_1^*} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial n} \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1^*} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial n} \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1^*} \right) + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial n} \right\} \dots\dots(1.f)$$

ここで,  $\xi, \eta$  および  $w$  はそれぞれ, 基準状態 (変形前) での薄肉シェルの任意点  $P$  の,  $s, n$  および  $\theta$  方向への変位である.  $l$  と  $m$  は, 薄肉中心線の方向余弦であり, 次のように定義される.

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos(s, x) = \sin \beta \\ m &= \cos(s, y) = -\cos \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

図-1(b) で, 薄肉中心線上の点の座標を  $(x^*, y^*)$  とすると,  $(x^*, y^*)$  を通る,  $n$  軸上の  $P$  点の座標  $(x, y)$

との関係は,

$$x = x^* + mn, \quad y = y^* - ln \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。また、 $O$  点を通る、部材軸線に平行な軸の  $z$  軸まわりの曲率半径を  $R_0$  とすると、曲率半径  $\rho^*$  と

$$\rho^* = R_2^* l = R_0 - y^* \quad \dots\dots\dots (4)$$

の関係がある。

仮定 (i) から式 (1) の変位の 2 次項の最後の項を無視する。曲線材を構成する材料として鋼やコンクリートを想定し、微小ひずみを前提としているから、式 (1) のひずみは 1 に比べて十分小さい。実用上は  $10^{-4} \sim 10^{-3}$  程度のオーダーである。しかもこの値は式 (1) の右辺の変位の線形項のオーダーと考えられる。したがって仮定 (i) で直ひずみ  $\epsilon_\theta$  が小さいと仮定することは、 $\epsilon_\theta$  の式 (1・b) の変位の線形項を  $\epsilon_\theta^l$  としたとき、

$$\epsilon_\theta^l = \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\xi}{\rho^*} m + \frac{\eta}{\rho^*} l \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

を小さいと仮定するに等しい。それゆえ、式 (1) で  $\epsilon_\theta^l$  の 2 乗項および  $\epsilon_\theta^l$  と  $\partial w / \partial s$  または  $\partial w / \partial n$  の積の項を無視したのである。またこのことは、従来の薄肉矩形断面アーチの、部材軸線の曲率面内の座屈解析での  $\epsilon_\theta$  と変位の関係式における仮定を拡張したものである。すなわちこの場合は、図-1(b) で

$$l=1, \quad m=0, \quad \xi=0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

であるから式 (5) は

$$\epsilon_\theta^l = \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\eta}{\rho^*} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

となり、式 (7) の 2 乗項を無視していた<sup>11), 12)</sup>。したがって式 (5) の 2 乗項を無視することは、従来の仮定を部材軸線の曲率面内および面外の座屈解析へ拡張したことを意味する。

微係数  $\partial w / \partial s$  と  $\partial w / \partial n$  は、それぞれ薄肉断面上の任意点の  $n$  軸と  $s$  軸まわりの接線回転角を表わすから、これらの微係数が小さいとすることは、曲線材が大きな曲げ変形を受けないことを意味する。

以上より式 (1) のひずみ-変位関係は、次のようになる。

$$\epsilon_s = \frac{1}{1+n/R_1^*} \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1^*} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+n/R_2^*)^2} \times \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1^*} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\xi}{\rho^*} m + \frac{\eta}{\rho^*} l \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+n/R_2^*)^2} \left\{ \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{\rho^*} m \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho^*} l \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

$$\epsilon_n = \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial n} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot c)$$

$$r_{s\theta} = \frac{1}{1+n/R_1^*} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{\rho^*} m \right) \times \frac{1}{(1+n/R_1^*)(1+n/R_2^*)} \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1^*} \right) \times \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{\rho^*} m \right) + \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1^*} \right) + \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho^*} l \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot d)$$

$$r_{\theta n} = \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho^*} l \right) + \frac{1}{1+n/R_2^*} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial n} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{\rho^*} m \right) + \frac{\partial \eta}{\partial n} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho^*} l \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot e)$$

$$r_{ns} = \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{1}{1+n/R_1^*} \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1^*} \right) + \frac{1}{1+n/R_1^*} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial n} \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1^*} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial n} \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1^*} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot f)$$

### 3. 変位場の決定

#### (1) 部材軸に直角方向の変位

基準状態からの断面上の任意点  $P(x, y)$  の  $x, y$  軸方向への変位を  $u, v$  とすると、 $s, n$  軸方向への変位  $\xi, \eta$  との関係は

$$\xi = lu + mv, \quad \eta = mu - lv \quad \dots\dots\dots (9)$$

仮定 (ii) をひずみで表わすと

$$\epsilon_s = \epsilon_n = r_{sn} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。原点  $O$  と  $s$  座標の始点 ( $s=0$ ) を図-1(b) に示すように、板厚  $t=0$  の仮定の薄板で結ぶ。これは西野<sup>11)</sup> らによって導入された概念であり、これによって原点  $O$  の変位が定義できる。当然のことながら、この仮定の薄板部分も仮定 (ii) に従うものとする ( $t=0$  であるから式 (10) で要求されるのは  $\epsilon_s=0$  のみ)。原点  $O$  の  $x, y$  軸方向への変位を  $u_0, v_0$  とし、 $z$  軸まわりの断面回転角を  $\varphi$  とすると、任意点  $P(x, y)$  の変位として

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi) \\ v &= v_0 + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

と与え、これを式 (9) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + r_s \sin \varphi + r_n(1 - \cos \varphi) \\ \eta &= \eta_0 + r_n \sin \varphi - r_s(1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。ここで、

$$\xi_0 = lu_0 + mv_0, \quad \eta_0 = mu_0 - lv_0 \quad \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

$$r_s = mx - ly, \quad r_n = -lx - my \quad \dots\dots\dots (13 \cdot b)$$

であり、 $\xi_0, \eta_0$  は、原点  $O$  の  $s, n$  軸方向への変位であ

る。式 (12) を、式 (8・a), (8・c) および (8・f) に代入して計算すると式 (10) を満たす。

(2) 部材軸方向の変位

部材軸方向変位  $w$  は主として仮定 (iii) と (iv) によって定まる。仮定 (iii) と (iv) はせん断ひずみに関する仮定であるが、式 (8・d), (8・e) のせん断ひずみ-変位関係式に以下の近似を行う。

はじめに座標原点  $O$  は断面内のまったく任意な点ではなく、仮定の薄板を断面形不変の仮定に従う断面の一部 (前述のようにこの部分では  $\epsilon_s=0$ ) と考えていること、および部材軸線の曲率が小さいことを仮定しているから注1)

$$\frac{|x|}{R_0} < \frac{1}{10}, \quad \frac{|y|}{R_0} < \frac{1}{10} \quad \dots\dots\dots(14)$$

を満たすように選ばれているものとする注2)。

次に仮定 (i) では、部材長さに比べて断面寸法は十分小さいとしているから、軸方向変位  $w$  を原点  $O$  を中心とするテーラー展開で表わすと

$$w = w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \dots\dots\dots(15)$$

ここで指標  $\cdot_0$  は原点  $O(x=y=0)$  での値である。上式の右辺第2項以下を  $\tilde{w}(x, y, \theta)$  とおき、両辺を曲率半径  $\rho^*$  で除すと

$$\frac{w}{\rho^*} = \frac{w_0}{\rho^*} + \frac{\tilde{w}}{\rho^*} \quad \dots\dots\dots(16 \cdot a)$$

$$\frac{\tilde{w}}{\rho^*} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \frac{x}{\rho^*} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \frac{y}{\rho^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \frac{x^2}{\rho^*} + \dots\dots\dots(16 \cdot b)$$

式 (16・a) の左辺  $w/\rho^*$  はせん断ひずみ  $r_{s\theta}$  と  $r_{\theta n}$  の線形項と非線形項 (2次項) の成分である。この式の右辺第1項は、原点  $O$  の変位  $w_0$  が未知であるからその大きさは未定である。これに対して右辺第2項は式 (14) と式 (16・b) より

$$\left| \frac{\tilde{w}}{\rho^*} \right| = \left| \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \frac{x}{\rho^*} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \frac{y}{\rho^*} + \dots \right| < \left| \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \right| \frac{1}{10} + \left| \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \right| \frac{1}{10} + \dots\dots\dots(17)$$

注1) ライズ比が1/5程度以下。式 (32) 参照  
 注2) 板厚  $t=0$  であるから棒部材に力学的な影響を与えないのは西野らの指摘のとおりであるが、原点  $O$  を含んでこの薄板上の点の軸方向変位も問題としているから、すなわちこの意味では棒部材の一部と考えているから原点  $O$  は任意点であり得ない。また Vlasov<sup>2)</sup> によれば、曲率小さな曲線材とは断面の最大寸法を  $B$ , 断面の図心の曲率半径を  $R_0$  として  $B/R_0 < 1/10$  を満たすものとしている。以上より式 (14) を設定することは妥当と考えられる。

すなわち、 $\tilde{w}/\rho^*$  の絶対値は変位  $w$  の微係数の絶対値よりさらに1桁以上オーダーが高い注3)。

以上の議論から、せん断ひずみ  $r_{s\theta}$  と  $r_{\theta n}$  の非線形項において

$$\frac{w}{\rho^*} \approx \frac{w_0}{\rho^*} \quad \dots\dots\dots(18)$$

と近似し得る。よって式 (8・d) と式 (8・e) は

$$r_{\theta n} = \frac{\partial(w_0 + \tilde{w})}{\partial n} + \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w_0 + \tilde{w}}{\rho^*} l \right) + \frac{1}{1+n/R_2^*} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial n} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w_0}{\rho^*} m \right) + \frac{\partial \eta}{\partial n} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w_0}{\rho^*} l \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$r_{s\theta} = \frac{1}{1+n/R_1^*} \frac{\partial(w_0 + \tilde{w})}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_2^*} \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w_0 + \tilde{w}}{\rho^*} m \right) + \frac{1}{(1+n/R_1^*)(1+n/R_2^*)} \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1^*} \right) \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w_0}{\rho^*} m \right) + \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1^*} \right) \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w_0}{\rho^*} l \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

となる。以下では上式をせん断ひずみ-変位関係式として用いる。

直ひずみ  $\epsilon_\theta$  のひずみ-変位関係式 (8・b) の2次項にも  $w/\rho^*$  が含まれているが、これはこのままにしておく。その理由は、仮定 (i) で  $\epsilon_\theta$  が小さいこと、したがって前述のように  $\epsilon_\theta$  の線形項の  $\epsilon_\theta'$  が小さいことを仮定しているから、式 (16・a) の  $w/\rho^*$  を  $\epsilon_\theta$  の2次項に代入したとき、 $\tilde{w}/\rho^*$  は相対的にオーダーが下がり、無視できないと考えられるからである。

式 (12) の  $\xi, \eta$  を式 (19) と式 (20) に代入すると

$$r_{\theta n} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} - \frac{1}{1+n/R_2^*} \frac{\tilde{w}}{\rho^*} l + \frac{1}{1+n/R_2^*} \frac{R_0}{\rho^*} + \left[ \left\{ m \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) + l u_0' \right\} \sin \varphi + \left\{ m u_0' - l \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) \right\} \cos \varphi + r_n \varphi' \right] \dots\dots\dots(21)$$

$$r_{s\theta} = \frac{1}{1+n/R_1^*} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_2^*} \frac{\tilde{w}}{\rho^*} m + \frac{1}{1+n/R_2^*} \frac{R_0}{\rho^*} \left[ \left\{ m \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) + l u_0' \right\} \cos \varphi + \left\{ l \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) - m u_0' \right\} \sin \varphi + (r_s^* + n) \varphi' \right] \dots\dots\dots(22)$$

を得る。ここで  $'$  は  $R_0\theta$  に関する微分であり、 $r_s^*$  は  $n=0$  での  $r_s$  の値であり、 $r_n$  の  $n=0$  での値も  $r_n^*$  と

注3) 座標  $(x, y)$  と座標  $(s, n)$  はともに直交座標であるから、両座標に関する微係数はともに同程度のオーダーである。数学的にはたとえば  $n=0$  で  $\frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial s} l + \frac{\partial}{\partial n} m$ ,  $\frac{\partial}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial s} m - \frac{\partial}{\partial n} l$  である。

書くと、式 (3) と (13・b) より、

$$r_s = r_s^* + n, \quad r_n = r_n^* \dots\dots\dots (23)$$

である。式 (21) と (22) の誘導にあたっては、幾何学的な関係式

$$\frac{\partial y}{\partial n} = -l, \quad \frac{\partial x}{\partial n} = m, \quad \frac{\partial l}{\partial n} = \frac{\partial m}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (24 \cdot a \sim c)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial s} &= \left(1 + \frac{n}{R_1^*}\right)m, & \frac{\partial x}{\partial s} &= \left(1 + \frac{n}{R_1^*}\right)l \\ \frac{\partial m}{\partial s} &= \frac{l}{R_1^*}, & \frac{\partial l}{\partial s} &= -\frac{m}{R_1^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24 \cdot d \sim g)$$

が用いられている。

次に、仮定 (iii) をひずみで表わすと

$$r_{\theta n} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

式 (21) を式 (25) の条件の基に、 $\tilde{w}$  について解くと

$$\begin{aligned} \tilde{w}(s, n, \theta) &= \tilde{w}^* \left(1 + \frac{n}{\rho^*} l\right) - \frac{R_0}{\rho^*} \left[ m \left(v_0' + \frac{w_0}{R_0}\right) \right. \\ &\quad \left. + lu_0' \right] \sin \varphi + \left\{ mu_0' - l \left(v_0' + \frac{w_0}{R_0}\right) \right\} \\ &\quad \times \cos \varphi + r_n \varphi' \cdot n \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

を得る。 $\tilde{w}^*$  は  $n=0$  での  $\tilde{w}$  の値である。式 (26) より、 $\tilde{w}$  は板厚方向へ直線的に変化する。式 (26) を式 (22) に代入する。このとき、薄肉部材であることと、仮定 (i) から部材軸線の曲率が小さいことを考慮すると、

$$\frac{n}{R_1^*} \ll 1, \quad \frac{n}{R_2^*} \ll 1 \dots\dots\dots (27)$$

であるから、2項定理によって

$$\frac{1}{1+n/R_1^*} \approx 1 - \frac{n}{R_1^*}, \quad \frac{1}{1+n/R_2^*} \approx 1 - \frac{n}{R_2^*} \dots\dots\dots (28)$$

として、式 (22) の右辺を  $n$  の1次まで展開すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} r_{s\theta} &= \left(1 + \frac{n}{R_2^*} - \frac{n}{R_1^*}\right) \rho^* \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tilde{w}^*}{\rho^*}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{n}{R_2^*} - \frac{n}{R_1^*}\right) \frac{R_0}{\rho^*} \\ &\quad \times \left[ \left\{ m \left(v_0' + \frac{w_0}{R_0}\right) + lu_0' \right\} \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left\{ l \left(v_0' + \frac{w_0}{R_0}\right) - mu_0' \right\} \sin \varphi + r_s \varphi' \right] \\ &\quad - \frac{R_0}{\rho^*} \cdot \frac{2n}{\rho^*} \left[ m \left\{ m \left(v_0' + \frac{w_0}{R_0}\right) + lu_0' \right\} \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. + m \left\{ mu_0' - l \left(v_0' + \frac{w_0}{R_0}\right) \right\} \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + (r_n m - \rho^*) \varphi' \right] \equiv r_s \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

次に、図-2 に示す微小な薄肉回転シェル要素の、変位後の  $\theta$  方向のつり合いを考える。微小ひずみを前提

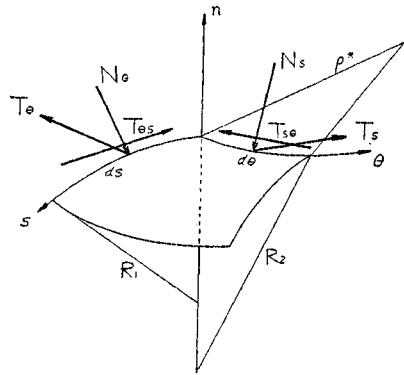


図 2

としているから、要素が基準状態から変位した後も座標  $(s, n, \theta)$  は直交していると見なすことができ、要素の  $(s, n)$  面内の曲率  $1/R_1^*$  は断面不変の仮定 (仮定 (ii)) から当然のこととして、 $(n, \theta)$  面内の曲率  $1/R_2^*$  の変化、および曲面  $(s, \theta)$  のねじれ変形は十分小さく無視し得ると考えられる (これにより、図-2 で板厚方向のせん断力  $N_s$  の  $\theta$  方向への成分は無視される)。加えるに、仮定 (i) で部材軸線の曲率  $1/\rho^*$  は小さいこと、したがって曲率  $1/R_2^*$  も小さいとしているから (これにより 図-2 のせん断力  $N_\theta$  の  $\theta$  方向への成分は無視される)、結果として薄肉偏平回転シェルの有限変位の場合のつり合い式<sup>13)</sup>を用いることができる。これは次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1^*} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (R_1^* T_\theta) + \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial s} (\rho^* T_{s\theta}) \\ + \frac{T_{\theta s}}{\rho^*} \cdot \frac{\partial \rho^*}{\partial s} + X_\theta = 0 \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ここで、\* を  $n=0$  での値として

$$\begin{aligned} T_\theta &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\theta dn, \quad T_{s\theta} = T_{\theta s} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\theta} dn \\ X_\theta &= \int_{-t/2}^{t/2} p_s dn \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial \theta} + \frac{w^*}{\rho^*} m \right) \\ &\quad + \int_{-t/2}^{t/2} p_n dn \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial \theta} - \frac{w^*}{\rho^*} l \right) \\ &\quad + \int_{-t/2}^{t/2} p_\theta dn \left( 1 + \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} - \frac{\xi^*}{\rho^*} m + \frac{\eta^*}{\rho^*} l \right) \\ &\quad \dots\dots\dots (31 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

である。 $p_s, p_n$  および  $p_\theta$  は、基準状態の  $s, n$ , および  $\theta$  方向へ作用している単位体積あたりの物体力である\*。つり合い式 (30) は、薄肉直線材に対するのと同程度の微小ひずみの前提 (文献 1) では変位した後の薄肉要素に

\* 図-2 でつり合い式 (30) に入っていない  $N_\theta, N_s$  および  $T_s$  は

$$N_\theta = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{n\theta} dn, \quad N_s = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{sn} dn, \quad T_s = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_s dn$$

と定義される。 $\tau_{n\theta}$  は、 $\tau_s$  と  $\sigma_\theta$  がわかると、微小要素  $dndsd\theta$  のつり合いから求まることは直線材の場合と同様である。

ついて、“変位後も直方体と見なせるから”と表現している)のうに、部材軸線の曲率が小さいとする仮定を加えて得られたものである。したがって部材軸線の曲率に関してだけ偏平シェルであることが要求されている。シェル理論によれば、図-1(a)において、弦長に対する中央縦距の比が

$$\frac{M}{L} < \frac{1}{5} \dots\dots\dots (32)$$

程度のもを偏平シェルとして扱えるとしている<sup>14)</sup>。通常用いられるアーチや曲線桁では不等式(32)は満たされていると考えられる。

式(30)および、 $G$ をせん断弾性係数とすると

$$\tau_{s\theta} \equiv \tau_s = Gr_s \dots\dots\dots (33)$$

により、 $\tau_s$ は板厚方向へ直線的に変化するから、 $n=0$ での $\tau_s$ を $\tau_s^*$ とすると

$$\int_{-t/2}^{t/2} \tau_s dn = \tau_s^* t \dots\dots\dots (34)$$

上式を用いると、つり合い式(30)は、

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial s} (\rho^* \tau_s^* t) + \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\theta dn \right) + \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_\theta dn = 0 \dots\dots\dots (35)$$

ここに

$$\bar{p}_\theta = \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial \theta} + \frac{w^*}{\rho^*} m \right) p_s + \left( \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial \theta} - \frac{w^*}{\rho^*} l \right) p_n + \left( 1 + \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} - \frac{\xi^*}{\rho^*} m + \frac{\eta^*}{\rho^*} l \right) p_\theta \dots\dots\dots (36)$$

である。仮定(iv)から、式(35)の左辺第2項以下を無視すると、断面内で

$$\rho^* \tau_s^* t = \text{一定} \equiv R_0^2 q \dots\dots\dots (37)$$

となる。したがって、 $n=0$ でのせん断ひずみ $r_s$ を $r_s^*$ とおくと、

$$r_s^* = \frac{R_0^2 q}{G \rho^* t} \dots\dots\dots (38)$$

である。いわゆる開区間では自由縁の条件から

$$q = 0 \dots\dots\dots (39)$$

である。式(24)で $n=0$ とおき、式(38)に等置すると

$$\rho^* \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\bar{w}^*}{\rho^*} \right) + \frac{R_0}{\rho^*} \left[ \left\{ m \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) + l u_0' \right\} \cos \varphi + \left\{ l \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) - m u_0' \right\} \sin \varphi + r_s^* \varphi' \right] - \frac{R_0^2 q}{G \rho^* t} = 0 \dots\dots\dots (40)$$

を得る。式(2)の方向余弦 $l, m$ は、式(3),(4)および(24・d~g)を用いて

$$m = \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\rho^*}{R_0} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{y^*}{\rho^*} \right) \dots\dots\dots (41 \cdot a)$$

$$l = \frac{\partial x^*}{\partial s} = \frac{\rho^*}{R_0} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{x^*}{\rho^*} \right) - \frac{r_s^*}{R_0} \dots\dots\dots (41 \cdot b)$$

とも表わされるから、式(41)を式(40)に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\bar{w}^*}{\rho^*} \right) + \phi_x \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{y^*}{\rho^*} \right) + \phi_y \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{x^*}{\rho^*} \right) + \frac{R_0 r_s^*}{\rho^* t} \psi_z - \frac{R_0^2 q}{G \rho^* t} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

ここで

$$\phi_x = \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) \cos \varphi - u_0' \sin \varphi \dots\dots\dots (43 \cdot a)$$

$$\phi_y = u_0' \cos \varphi + \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) \sin \varphi \dots\dots\dots (43 \cdot b)$$

$$\psi_z = \varphi' - \frac{\phi_y}{R_0} \dots\dots\dots (43 \cdot c)$$

である。 $\phi_x, \phi_y$ はそれぞれ、基準状態から変位した後の $x, y$ 軸まわりの接線回転角、 $\psi_z$ は $z$ 軸まわりのねじれ率である。

式(37)の定数 $q$ は、閉区間に対する変位 $\bar{w}^*(=w^*-w_0)$ の連続の条件

$$\oint \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\bar{w}^*}{\rho^*} \right) ds = 0 \dots\dots\dots (44)$$

から定まり次のようである。

$$q = G \bar{q} \psi_z \dots\dots\dots (45 \cdot a)$$

$$\bar{q} = \frac{\oint \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^2 r_s^* ds}{\oint \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^3 \frac{1}{t} ds} \dots\dots\dots (45 \cdot b)$$

式(45・a)を式(42)に代入し、 $s$ について積分すると

$$\frac{R_0}{\rho^*} \bar{w}^* = - \frac{R_0}{\rho^*} (y^* \phi_x + x^* \phi_y) - \left( \int_0^s \frac{R_0^2}{\rho^* t} r_s^* ds - \bar{q} \int_0^s \frac{R_0^3}{\rho^* t} ds \right) \psi_z + C(\theta) \dots\dots\dots (46)$$

ここで $C(\theta)$ は積分定数である。式(46)を式(26)に代入し、さらに式(16・a)に代入すると、断面内の任意点 $P$ の変位 $w$ として

$$w = w_0 - y \phi_x - x \phi_y - \left\{ \frac{\rho^*}{R_0} \left( \int_0^s \frac{R_0^2}{\rho^* t} r_s^* ds - \bar{q} \int_0^s \frac{R_0^3}{\rho^* t} ds \right) \left( 1 + \frac{n}{R_2} \right) + \frac{R_0}{\rho^*} r_n \cdot n \right\} \psi_z + \frac{\rho^*}{R_0} \left( 1 + \frac{n}{R_2^*} \right) C(\theta) \dots\dots\dots (47)$$

を得る。

上式には積分定数 $C(\theta)$ が含まれているが、これは仮定の薄板上にある原点 $O$ 、すなわち

$$x = y = n = 0, \rho^* = R_0 \dots\dots\dots (48)$$

での変位 $w$ が $w_0$ であったから、式(47)と(48)より

$$C(\theta) = \int_0^{s_0} \frac{R_0^2}{\rho^* t} r_s^* ds \cdot \psi_z \dots\dots\dots (49)$$

となる。 $s_0$ は、原点 $O$ の $s$ 座標の値である。

上式を式(47)に代入すると、変位 $w$ として最終的に

$$w = w_0 - y \phi_x - x \phi_y - \omega \psi_z \dots\dots\dots (50)$$

を得る。ここに $\omega(s, n)$ はそり関数であり、次のよう

ある。

$$\left. \begin{aligned} \omega(s, n) &= \frac{\rho^*}{R_0} \left( 1 + \frac{n}{R_2^*} \right) \left( \int_0^s \frac{R_0^2}{\rho^{*2}} r_s^* ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{s_0} \frac{R_0^2}{\rho^{*2}} r_s^* ds - \bar{q} \int_0^s \frac{R_0^3}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds \right) \\ &\quad + \frac{R_0}{\rho^*} r_n \cdot n \dots\dots\dots \text{閉区間} \\ \omega(s, n) &= \frac{\rho^*}{R_0} \left( 1 + \frac{n}{R_2^*} \right) \left( \int_0^s \frac{R_0^2}{\rho^{*2}} r_s^* ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{s_0} \frac{R_0^2}{\rho^{*2}} r_s^* ds \right) + \frac{R_0}{\rho^*} r_n \cdot n \\ &\quad \dots\dots\dots \text{開区間} \\ &\quad \dots\dots\dots (51 \cdot a, b) \end{aligned} \right\}$$

#### 4. 応力場

式 (40) の左辺の第 2 項以下を右辺へ移行したものを、式 (29) の第 1 項、すなわち  $\rho^* \partial(\tilde{w}^*/\rho^*)/\partial s$  に代入する。するとせん断ひずみとして

$$\left. \begin{aligned} r_s &= \frac{R_0^2}{\rho^{*2}} \left\{ 2n + \left( 1 + \frac{n}{R_2^*} - \frac{n}{R_1^*} \right) \frac{\bar{q}}{t} \right\} \psi_z \\ &\quad \dots\dots\dots \text{閉区間} \\ r_s &= \frac{R_0^2}{\rho^{*2}} 2n \psi_z \dots\dots\dots \text{開区間} \\ &\quad \dots\dots\dots (52 \cdot a, b) \end{aligned} \right\}$$

を得る。

式 (12) と式 (50) で与えられた変位場  $\xi, \eta$  および  $w$  を、直ひずみ-変位関係式 (8・b) に代入する。その結果、次式を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{R_0}{\rho} \left\{ \left( w_0' - \frac{v_0}{R_0} \right) - y \left( \phi_x' - \frac{1 - \cos \varphi}{R_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - x \left( \phi_y' + \frac{\sin \varphi}{R_0} \right) - \omega \cdot \psi_z' \right\} \\ &\quad + \frac{R_0^2}{\rho^2} \left[ (u_0' - x\phi' \sin \varphi - y\phi' \cos \varphi)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) + x \left( \phi' \cos \varphi - \frac{\phi_y}{R_0} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - y \left( \phi' \sin \varphi + \frac{\phi_x}{R_0} \right) - \frac{\omega}{R_0} \psi_z \right\}^2 \right] \dots\dots (53) \end{aligned}$$

ここで

$$\rho = \rho^* \left( 1 + \frac{n}{R_2^*} \right) = R_0 - y \dots\dots\dots (54)$$

は、断面上の任意点  $P(x, y)$  を通る母線の曲率半径である。せん断応力と直応力は

$$\tau_s = G r_s, \quad \sigma_\theta = E \epsilon_\theta \dots\dots\dots (55)$$

で与えられる。

以上で得られた  $\tau_s$  と  $\sigma_\theta$  は、 $\theta$  軸方向のつり合い式 (35) を一般には満足しない。ここでは直線材の場合に準じて上で得られた直応力  $\sigma_\theta$  に見合うようにせん断応力を補正する。補正されたせん断応力を  $\tau_\sigma$  とし、 $n=0$

での  $\tau_\sigma$  を  $\tau_\sigma^*$  とする。式 (29) から  $\tau_\sigma$  も  $n$  の一次式であるから、つり合い式 (35) は  $\tau_s^*$  を  $\tau_\sigma^*$  に置き換えるとそのまま成立する。また、薄肉であることから直応力  $\sigma_\theta$  と荷重  $\bar{p}_\theta$  は板厚方向へ直線的に変化すると見なせる。すなわち、

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\theta' dn = (\sigma_\theta^*)' t, \quad \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_\theta dn = \bar{p}_\theta^* t \dots (56)$$

ここで、 $\sigma_\theta^*$  と  $\bar{p}_\theta^*$  は  $n=0$  での値である。式 (35) の両辺に  $\rho^{*2}$  を乗じて  $s$  について積分すると

$$\begin{aligned} \tau_\sigma^* t &= - \frac{R_0^2}{\rho^{*2}} \int_0^s \frac{\rho^*}{R_0} (\sigma_\theta^*)' t ds \\ &\quad - \frac{1}{\rho^{*2}} \int_0^s \rho^{*2} \bar{p}_\theta^* t ds + \frac{R_0^2}{\rho^{*2}} q_0 \dots\dots (57) \end{aligned}$$

ここで

$$R_0^2 q_0 = (\rho^{*2} \tau_\sigma^* t)_{s=0} \dots\dots\dots (58)$$

は積分定数であり、開区間では  $s=0$  を自由縁にとると  $q_0=0$  である。式 (57) の  $\sigma_\theta^*$  に、式 (53), (55) で  $n=0$  としたものを代入すると

$$\tau_\sigma^* t = \frac{R_0^2}{\rho^{*2}} (q_\sigma^* + q_0) \dots\dots\dots (59)$$

ここに

$$\begin{aligned} q_\sigma^* &= - \left[ g \left( w_0' - \frac{v_0}{R_0} \right) - g_x \left( \phi_x' - \frac{1 - \cos \varphi}{R_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - g_y \left( \phi_y' + \frac{\sin \varphi}{R_0} \right) - g_\omega \psi_z' \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_0}{2} \left\{ u_0'^2 + \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right)^2 \right\} - g_{x0} \left\{ u_0' \phi' \cos \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) \left( \phi' \sin \varphi + \frac{\phi_x}{R_0} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - g_{y0} \left\{ u_0' \phi' \sin \varphi - \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( \phi' \cos \varphi - \frac{\phi_y}{R_0} \right) \right\} - g_{\omega 0} \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) \frac{\psi_z}{R_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_{xx}}{2} \left\{ (\phi' \cos \varphi)^2 + \left( \phi' \sin \varphi + \frac{\phi_x}{R_0} \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_{yy}}{2} \left\{ (\phi' \sin \varphi)^2 + \left( \phi' \cos \varphi - \frac{\phi_y}{R_0} \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_{\omega\omega}}{2} \left( \frac{\psi_z}{R_0} \right)^2 + g_{xy} \left\{ \phi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \phi' \cos \varphi - \frac{\phi_y}{R_0} \right) \times \left( \phi' \sin \varphi + \frac{\phi_x}{R_0} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + g_{\omega x} \left( \phi' \sin \varphi + \frac{\phi_x}{R_0} \right) \frac{\psi_z}{R_0} - g_{\omega y} \left( \phi' \cos \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\phi_y}{R_0} \right) \frac{\psi_z}{R_0} \right] + \int_0^s \frac{\rho^{*2}}{R_0^2} \bar{p}_\theta^* t dn ds \dots\dots (60) \end{aligned}$$

であり、係数  $g, g_x, g_y, \dots$  は以下のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \int_0^s y^* t ds, & g_y &= \int_0^s x^* t ds \\ g_0 &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} t ds, & g_{x0} &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} y^* t ds \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{y_0} &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} x^* t ds, & g_{\omega} &= \int_0^s \omega^* t ds \\ g_{\omega_0} &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} \omega^* t ds, & g_{x x} &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} y^{*2} t ds \\ g_{y y} &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} x^{*2} t ds, & g_{\omega \omega} &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} \omega^{*2} t ds \\ g_{x y} &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} x^* y^* t ds, & g_{\omega x} &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} \omega^* y^* t ds \\ g_{\omega y} &= \int_0^s \frac{R_0}{\rho^*} \omega^* x^* t ds, & g &= \int_0^s t ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(61 \cdot a \sim n)$$

式 (59) の両辺を  $G$  で除して

$$\frac{\tau_o^*}{G} = \frac{1}{Gt} \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^2 (q_o^* + q_0) \equiv r_o^* \dots\dots\dots(62)$$

式 (29) で  $r_s$  を  $r_o$  で置き換えて、再び  $n=0$  とおいて式 (62) と等置すると

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\tilde{w}^*}{\rho^*} \right) + \frac{R_0}{\rho^*} \left[ \left\{ m \left( v_o' + \frac{w_o}{R_0} \right) + l u_o' \right\} \cos \varphi \right. \\ \left. + \left\{ l \left( v_o' + \frac{w_o}{R_0} \right) - m u_o' \right\} \sin \varphi + r_s^* \varphi' \right] \\ - \frac{R_0^2}{G \rho^{*2} t} (q_o^* + q_0) = 0 \dots\dots\dots(63) \end{aligned}$$

これは、式 (40) で  $q$  を  $(q_o^* + q_0)$  に置き換えたものにほかならない。式 (41) 以下 (44) までの議論は、 $q$  を  $(q_o^* + q_0)$  に置き換えればそのまま成り立つから、閉区間の場合は変位  $\tilde{w}^*$  の連続の条件、式 (44) を用いて定数  $q_0$  は次のようになる。

$$q_0 = G \frac{\int_0^s \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^2 r_s^* ds}{\int_0^s \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^3 \frac{1}{t} ds} \psi_z - \frac{\int_0^s \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^3 \frac{q_o^*}{t} ds}{\int_0^s \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^3 \frac{1}{t} ds} \dots\dots\dots(64)$$

式 (64) の右辺第 1 項は、前節で求めた積分定数  $q$  (式 (45)) と同じものである。せん断応力  $\tau_o$  は、式 (63) の左辺の第 2 項以下を右辺へ移項したものを  $r_o$  の式 (29) の  $\rho^* \partial(\tilde{w}^*/\rho^*)/\partial s$  に代入すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tau_o &= G \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^2 \left\{ 2n + \left( 1 + \frac{n}{R_2^*} - \frac{n}{R_1^*} \right) \frac{\bar{q}}{t} \right\} \psi_z \\ &+ \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^2 \frac{1}{t} \left( 1 + \frac{n}{R_2^*} - \frac{n}{R_1^*} \right) \\ &+ \left( q_o^* - \frac{\int_0^s \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^3 \frac{q_o^*}{t} ds}{\int_0^s \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^3 \frac{1}{t} ds} \right) \dots\dots\dots \text{閉区間} \\ \tau_o &= G \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^2 2n \psi_z + \left( \frac{R_0}{\rho^*} \right)^2 \\ &\times \frac{1}{t} \left( 1 + \frac{n}{R_2^*} - \frac{n}{R_1^*} \right) q_o^* \dots\dots\dots \text{開区間} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(65 \cdot a, b)$$

式 (65) の右辺第 1 項は、前節で求めた式 (52) に等しく、第 2 項が直応力  $\sigma_\theta$  とつり合い状態にある、付加的

せん断応力を表わしている。前述のように、オイラー・ベルヌーイの仮定を保持しているから、前節で得られた変位  $w$  の式 (50) は変更されない。

### 5. ねじれ率 $\psi_z$ の幾何学的解釈

式 (44 \cdot c) で定義されたねじれ率  $\psi_z$  を再記すると、

$$\begin{aligned} \psi_z &= \varphi' - \frac{\phi_y}{R_0} = \varphi' - \frac{1}{R_0} u_o' \cos \varphi \\ &- \frac{1}{R_0} \left( v_o' + \frac{w_o}{R_0} \right) \sin \varphi \dots\dots\dots(44 \cdot c) \end{aligned}$$

である。この幾何学的意味は、曲率の小さい曲線材で  $z$  軸まわりのねじれ角(回転角)が微小である場合<sup>15)</sup>を、ねじれ角が大きい場合に拡張すると次のように説明される。

図-3 (a), (b), (c) において、円弧  $\widehat{OE}$  は微小長さ  $R_0 d\theta$  の部材軸線であり、 $x, y, z$  軸は基準状態での座標とする。 $E$  点での接線と  $z$  軸との交点を  $Q$  とし、軸線  $\widehat{OE}$  を  $z$  軸の回りに  $\varphi$  だけ回転して  $\widehat{OE}'$  に至ったとする。このとき、曲面  $QEE'$  は円錐面を描き、回転前

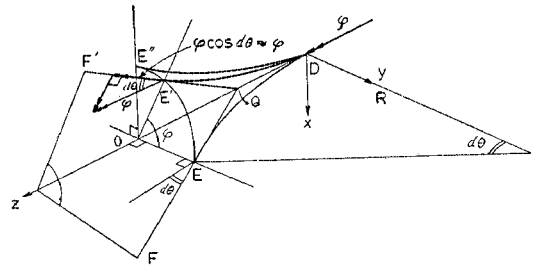


図-3 (a)

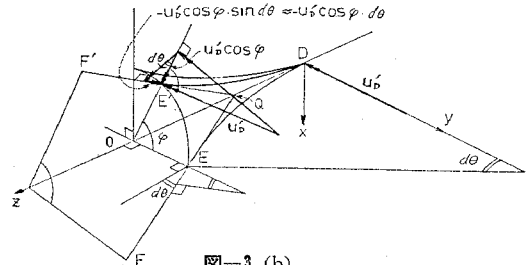


図-3 (b)

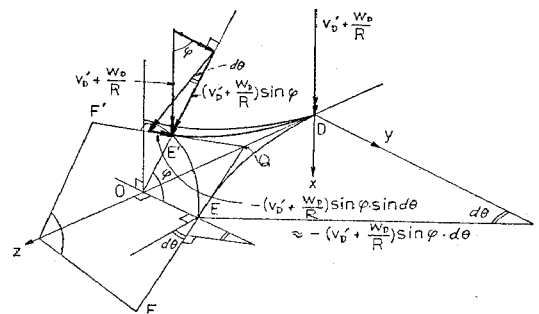


図-3 (c)



の平面  $OzF$  は平面  $OzF'$  へ回転する。  $E'$  は  $\varphi=\pi/2$  のときの  $E$  の位置を示す。

図-3(a) は、 $\varphi$  をベクトルと考えて、 $O$  点で回転角  $\varphi$  を与えたときの、 $R_0 d\theta$  だけ離れた  $E'$  点での軸線回りの、すなわち、軸線  $\widehat{OE'}$  の  $E'$  点での接線  $\widehat{QE'F'}$  への  $\varphi$  の成分を示す。

図-3(b) は、図-3(a) の状態に、 $O$  点で  $y$  軸まわりの接線回転角  $u_0'$  (式 (44.b) で  $\varphi=0$  の場合の  $\phi_y$ ) を与えた状態を示す。すなわち、接線回転角  $u_0'$  をベクトルと考えたときの  $E'$  点での接線  $\widehat{QE'F'}$  への成分を示す。

同様に、図-3(c) は、図-3(a) の状態に、 $O$  点で  $x$  軸まわりの接線回転角  $(v_0'+w_0/R_0)$  (式 (44.a) で  $\varphi=0$  の場合の  $\phi_x$ ) を与えた状態を示しており、接線回転角  $(v_0'+w_0/R_0)$  の  $E'$  点での接線  $\widehat{QE'F'}$  への成分を示す。

結局、 $O$  点で  $z$  軸、 $y$  軸および  $x$  軸まわりの回転角  $\varphi$ 、 $u_0'$  および  $(v_0'+w_0/R_0)$  を与えたときの、微小長さ  $R_0 d\theta$  だけ離れた  $E'$  点での部材軸線の接線まわりの回転角は、図-3(a),(b),(c) を加えて

$$\varphi' - u_0' \cos \varphi d\theta - \left( v_0' + \frac{w_0}{R_0} \right) \sin \varphi d\theta \dots (66)$$

となる。これの部材軸方向の変化がねじれ率であるから上式を  $R_0 d\theta$  で除すと式 (44.c) を得る。

逆に、このような説明が可能な理由は、 $u_0'$  と  $(v_0'+w_0/R_0)$  が 1 に比べて十分小さいとしていることによる。Oran<sup>16)</sup>、前田・林<sup>17)</sup>らは、剛体運動の回転量はベクトルとして扱えないこと、したがって重ね合わせが成立しないことを指摘している。実際原点  $O$  で  $\varphi$ 、 $u_0'$ 、 $(v_0'+w_0/R_0)$  の与え方の順序を変えると  $u_0'^2$ 、 $(v_0'+w_0/R_0)^2$ 、および  $u_0'(v_0'+w_0/R_0)$  の項が出てくる。接線回転角が 1 に比べて十分小さいとしてこれらの項を無視して始めて図-3 の重ね合わせが成り立つ。

### 6. 変位場の近似式

式 (11) の変位  $u$ 、 $v$  および式 (50) の変位  $w$  に含まれる  $\sin \varphi$ 、 $\cos \varphi$  をテーラー展開すると

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 + \frac{1}{120} \varphi^5 - \dots \\ \cos \varphi &= 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{24} \varphi^4 - \dots \end{aligned} \right\} \dots (67)$$

アーチ軸線の変位の 3 次項まで考慮すると式 (11) と式 (50) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) - \frac{x}{2} \varphi^2 \\ v &= v_0 + x \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) - \frac{y}{2} \varphi^2 \end{aligned} \right\} \dots (68)$$

$$\begin{aligned} w &= w_0 - y \left\{ \phi_x \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - \phi_y \varphi \right\} \\ &\quad - x \left\{ \phi_y \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \phi_x \varphi \right\} \\ &\quad - \omega \left( \psi_z + \frac{1}{2R} \phi_y \varphi^2 - \frac{1}{R} \phi_x \varphi \right) \end{aligned}$$

ここで簡単のために

$$\phi_x = v_0' + \frac{w_0}{R_0}, \quad \phi_y = u_0', \quad \psi_z = \varphi' - \frac{u_0'}{R_0} \dots (68)$$

とおいた。すなわち、本節以下では  $\phi_x$ 、 $\phi_y$  および  $\psi_z$  は微小変位理論での  $x$ 、 $y$  軸まわりの接線回転角および  $\theta$  軸まわりのねじれ率を表わすものとする。

式 (52) と式 (53) の  $r_s$  と  $\varepsilon_\theta$  も軸線の変位の 3 次式で表わすと、若干の演算の後

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{R_0}{\rho} \varepsilon_z - \frac{R_0}{\rho} y \varepsilon_x - \frac{R_0}{\rho} x \varepsilon_y - \frac{R_0}{\rho} \omega \varepsilon_\omega \\ &\quad + \varepsilon_n + \frac{R_0^2}{\rho^2} y^2 \varepsilon_{xx} + \frac{R_0^2}{\rho^2} \left( x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 \varepsilon_{yy} \\ &\quad + \frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{\omega y}{R_0} \varepsilon_{\omega x} + \frac{R_0^2}{\rho^2} x y \varepsilon_{xy} \dots (69) \end{aligned}$$

$$r_s = \frac{R_0}{\rho^*} \theta \left( \psi_z - \frac{1}{R_0} \phi_x \varphi + \frac{1}{2R_0} \phi_y \varphi^2 \right) \dots (70)$$

ここで簡単のために

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= w_0'' - \frac{v_0}{R_0}, \quad \varepsilon_x = v_0'' + \frac{w_0'}{R_0} \\ \varepsilon_y &= u_0'' + \frac{\varphi}{R_0}, \quad \varepsilon_\omega = \varphi'' - \frac{u_0''}{R_0} \end{aligned} \right\} \dots (71)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x - (\phi_y \varphi)' - \frac{1}{2R_0} \varphi^2 - \frac{1}{2} (\phi_x \varphi^2)' \\ &\quad + \psi_z (\phi_y + \phi_x \varphi) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y + (\phi_x \varphi)' - \frac{1}{6R_0} \varphi^3 - \frac{1}{2} (\phi_y \varphi^2)' \\ &\quad - \psi_z (\phi_x - \phi_y \varphi) + \frac{1}{R_0} (\phi_x^2 + \phi_y^2) \varphi \\ \varepsilon_\omega &= \varepsilon_\omega - \frac{1}{R_0} (\phi_x \varphi)' + \frac{1}{2R_0} (\phi_y \varphi^2)' \\ &\quad + \frac{1}{R_0} \phi_x \left( \psi_z - \frac{1}{R_0} \phi_x \varphi \right) \\ \varepsilon_{nn} &= \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2), \quad \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \psi_z^2 \\ \varepsilon_{yy} &= \psi_z \left( \frac{1}{2} \psi_z - \frac{1}{R_0} \varphi \phi_x \right), \quad \varepsilon_{\omega x} = \varphi \psi_z^2 \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{R_0} \varphi \phi_y \psi_z \end{aligned} \right\} \dots (72)$$

である。また、式 (70) の  $\theta$  は

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{R_0}{\rho^*} \left\{ 2n + \left( 1 + \frac{n}{R_2^*} - \frac{n}{R_1^*} \right) \frac{\bar{q}}{t} \right\} \dots \text{閉区間} \\ \theta &= \frac{R_0}{\rho^*} 2n \dots \text{開区間} \end{aligned} \right\} \dots (73)$$

式 (71) の  $\varepsilon_z$ 、 $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$  および  $\varepsilon_\omega$  は、それぞれ微小変位

理論での直ひずみ,  $x, y$  軸まわりの曲率および曲げねじれ率である。' は前と同様に  $R_0\theta$  に関する微分を表わす。

7. 増分理論

最初の基準状態はアーチに作用する荷重も変位もすべて零であるとし、段階的にこれらの量を所定の大ききまで増加させてゆくものとし、この各段階でのアーチの状態を  $Q_n$  状態とする。いま、 $Q_n$  状態での解がわかっているものとし、この状態での荷重, 変位, ひずみ, および応力のすべての量に上指標<sup>0</sup>を付す。一方、 $Q_n$  状態と同じ荷重状態で、 $Q_n$  状態とはわずかだけ異なった安定なつり合い状態があるものとし、これを  $Q_{n+1}$  状態とする。上述のすべての量で、指標<sup>0</sup>を付さない量を  $Q_n$  状態から  $Q_{n+1}$  状態への増分量とする。するとこの状態での仮想仕事の原理は<sup>18)</sup>,

$$\int_0^{\theta} \int_F \{(\sigma_\theta^0 + \sigma_\theta) \delta(\varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_\theta) + (\tau_s^0 + \tau_s) \delta(r_s^0 + r_s) - p_x^0 \delta(u^0 + u) - p_y^0 \delta(v^0 + v) - p_\theta^0 \delta(w^0 + w)\} dF d\theta - \left[ \int_F \{\bar{r}_{xz}^0 \delta(u^0 + u) + \bar{r}_{yz}^0 \delta(v^0 + v) + \bar{\sigma}_\theta^0 \delta(w^0 + w)\} dF \right]_0^\theta = 0 \dots\dots\dots (74)$$

式 (31) の  $p_s^0, p_n^0$  と  $p_x^0, p_y^0$  との関係は  $p_x^0 = p_s^0 l + p_n^0 m, p_y^0 = p_s^0 m - p_n^0 l \dots\dots\dots (75)$

式 (65) の  $\bar{r}_s^0$  (アーチ両端断面での  $\tau_s^0$ ) および板厚方向のせん断応力  $\bar{r}_n^0$  と  $\bar{r}_{xz}^0, \bar{r}_{yz}^0$  との関係は  $\bar{r}_{xz}^0 = \bar{r}_s^0 l + \bar{r}_n^0 m, \bar{r}_{yz}^0 = \bar{r}_s^0 m - \bar{r}_n^0 l \dots\dots\dots (76)$

である。アーチ断面の微小面積  $dF$  は  $dF = \left(1 + \frac{n}{R_1^*}\right) ds dn \approx ds dn \dots\dots\dots (77)$

である。式 (74) で、 $(u^0 + u), (v^0 + v), \dots, (r_s^0 + r_s)$  は、式 (68) と式 (71) で、たとえば  $w_0, \phi_y, \kappa_y$  をそれぞれ単に  $(w_0^0 + w_0), (\phi_y^0 + \phi_y), (\kappa_y^0 + \kappa_y)$  に置き換えたものである。しかしながら、いまの場合は、断面形は  $y$  軸に関して対称であり、荷重も  $y$  軸に関して対称に、すなわち  $p_x^0 = 0 \dots\dots\dots (78)$

であるとす。そして、 $Q_n$  状態では部材軸線の曲率面外変位は零の状態であるとす。すなわち  $u_0^0 = \phi_y^0 = \kappa_y^0 = \varphi^0 = \psi_z^0 = \vartheta_w^0 = 0 \dots\dots\dots (79)$

であるとす。すると  $Q_{n+1}$  状態での変位とひずみは  $\left. \begin{aligned} u^0 + u &= u^0 + u^L + u^N \\ v^0 + v &= v^0 + v^L + v^N \\ w^0 + w &= w^0 + w^L + w^N \\ \varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_\theta^L + \varepsilon_\theta^N \\ r_s^0 + r_s &= r_s^0 + r_s^L + r_s^N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (80)$

ここで、変位増分は十分小さく、増分の2次まで考慮すると

$$\left. \begin{aligned} u^L &= u_0 - y\varphi, v^L = v_0 + x\varphi \\ w^L &= w_0 - y\phi_x - x(\phi_y + \phi_x^0\varphi) \\ &\quad - \omega \left( \psi_z - \frac{\phi_x^0\varphi}{R_0} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (81)$$

$$\left. \begin{aligned} u^N &= -\frac{1}{2} x\varphi^2, v^N = -\frac{1}{2} y\varphi^2 \\ w^N &= y\varphi \left( \phi_y + \frac{1}{2} \phi_x^0\varphi \right) - x\phi_x\varphi + \frac{\omega}{R_0} \phi_x\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (82)$$

であり、 $\varepsilon_\theta^L$  と  $\varepsilon_\theta^N$  は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta^L &= \frac{R_0}{\rho} (\varepsilon_x^L - y\varepsilon_x^L - x\varepsilon_y^L - \omega\varepsilon_w^L) + \varepsilon_{nn}^L \\ \varepsilon_\theta^N &= -\frac{R_0}{\rho} (y\varepsilon_x^N + x\varepsilon_y^N + \omega\varepsilon_w^N) + \varepsilon_{nn}^N \\ &\quad + \frac{R_0^2}{\rho^2} y^2 \varepsilon_{xx}^N + \frac{R_0^2}{\rho^2} \left(x - \frac{\omega}{R_0}\right)^2 \varepsilon_{yy}^N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (83)$$

と表わすとき、増分量の2次まで考慮すると

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^L &= \kappa_x \\ \varepsilon_y^L &= \kappa_y + \kappa_x^0\varphi + \frac{1}{R_0} \phi_x^0 (\phi_y + \phi_x^0\varphi) \\ \varepsilon_w^L &= \vartheta_w - \frac{1}{R_0} \kappa_x^0\varphi - \frac{1}{R_0^2} \phi_x^0 (\phi_y + \phi_x^0\varphi) \\ \varepsilon_{nn}^L &= \phi_x^0\phi_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (84)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^N &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_0} + \kappa_x^0 \right) \varphi^2 - \phi_y'\varphi \\ &\quad - \frac{1}{R_0} (\phi_x^0\phi_y\varphi + \phi_y^2) \\ \varepsilon_y^N &= \kappa_x\varphi + \frac{1}{R_0} (\phi_x\phi_y + 2\phi_x^0\phi_x\varphi) \\ \varepsilon_w^N &= -\frac{1}{R_0} \varepsilon_y^N, \varepsilon_{nn}^N = \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2) \\ \varepsilon_{xx}^N &= \frac{1}{2} \psi_z^2, \varepsilon_{yy}^N = -\psi_z \left( \frac{1}{R_0} \phi_x^0\varphi - \frac{1}{2} \psi_z \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (85)$$

である。 $r_s^L$  と  $r_s^N$  も同様に

$$\left. \begin{aligned} r_s^L &= \frac{R_0}{\rho^*} \theta \left( \psi_z - \frac{1}{R_0} \phi_x^0\varphi \right) \\ r_s^N &= -\frac{R_0}{\rho^*} \frac{\theta}{R_0} \phi_x\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (86)$$

以上より、指標  $L$  のついた量は変位増分について1次、指標  $N$  のついた量は変位増分の2次式となっている。また、式 (80) の  $u^0, v^0, w^0, \varepsilon_\theta^0, r_s^0$  は、すべての変位に (式 (79) を考慮して) 指標<sup>0</sup>を付したもの、すなわち、 $Q_n$  状態での量である。

式 (80) を式 (74) に代入し応力と変位増分の2次まで考慮すると

$$\int_0^\theta \int_F (\sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta^L + \tau_s \delta r_s^L + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta^N + \tau_s \delta r_s^N - p_y^0 \delta v^N - p_\theta^0 \delta w^N) dF \rho d\theta - \left[ \int_F (\bar{\tau}_{xz}^0 \delta u^N + \bar{\tau}_{yz}^0 \delta v^N + \bar{\sigma}_\theta^0 \delta w^N) dF \right]_0^\theta = - \int_0^\theta \int_F (\sigma_\theta^0 \delta \varepsilon_\theta^L + \tau_s^0 \delta r_s^L - p_y^0 \delta v^L - p_\theta^0 \delta w^L) dF \rho d\theta + \left[ \int_F (\bar{\tau}_{xz}^0 \delta u^L + \bar{\tau}_{yz}^0 \delta v^L + \bar{\sigma}_\theta^0 \delta w^L) dF \right]_0^\theta \dots (87)$$

この式の右辺は、 $Q_n$  状態での仮想仕事 そのものであるから零となるべきである。

$Q_n$  状態での応力とひずみの関係は

$$\sigma_\theta^0 = E \varepsilon_\theta^0, \tau_s^0 = G r_s^0 \dots (88)$$

$Q_{n+1}$  状態でのそれは

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta &= E(\varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_\theta) = E(\varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_\theta^L + \varepsilon_\theta^N) \\ \tau_s^0 + \tau_s &= G(r_s^0 + r_s) = G(r_s^0 + r_s^L + r_s^N) \end{aligned} \right\} \dots (89)$$

式 (88) と式 (89) の両辺を互いに引くと

$$\sigma_\theta = E(\varepsilon_\theta^L + \varepsilon_\theta^N), \tau_s = G(r_s^L + r_s^N) \dots (90)$$

変位増分は  $Q_n$  状態の変位に比べて十分に小さいとして、変位増分について上式を線形化すると

$$\sigma_\theta \approx E \varepsilon_\theta^L, \tau_s \approx G r_s^L \dots (91)$$

### 8. 曲げによるアーチの横倒れ座屈

式 (87) の両辺に、式 (81) から式 (86) までと、式 (91) を代入して断面内部で積分する。このときアーチに作用する荷重は両端モーメントだけであり、断面は 2 軸対称であるとする。(x, y) 座標の原点 O を、

$$Z_x = \int_F \frac{R_0}{\rho} y dF = 0, Z_y = \int_F \frac{R_0}{\rho} x dF = 0 \dots (92)$$

すなわち、重心軸に選ぶ。すると断面の対称性から

$$Z_{y0} = \int_F y dF = 0, J_{xy} = \int_F \frac{R_0}{\rho} xy dF = 0 \dots (93)$$

また、図-1(b) で、原点 O と  $s=0$  の点を結ぶ仮想薄板の結び方を

$$Z_\omega = \int_F \frac{R_0}{\rho} \omega dF = 0 \dots (94)$$

を満たすように選ぶことができる<sup>1)</sup>。すると、そり関数  $\omega$  は y 軸に関して逆対称となり自動的に

$$C_x = \int_F \frac{R_0}{\rho} \omega y dF = 0 \dots (95)$$

したがって  $\rho = R_0 - y$  の関係を用いると

$$Z_{\omega 0} = \int_F \omega dF = Z_\omega - \frac{C_x}{R_0} = 0 \dots (96)$$

また、2 軸対称断面であり、部材軸線の曲率は小さいとしているから、

$$C_y = \int_F \frac{R_0}{\rho} \omega x dF = 0 \dots (97)$$

から定まるせん断中心と式 (92) から定まる重心とはほぼ一致すると見なせる。

座屈前の状態 ( $Q_n$  状態) ではアーチ両端に曲げモーメントしか作用していないから式 (87) において、

$$\bar{\tau}_{xz}^0 = \bar{\tau}_{yz}^0 = 0, \bar{\sigma}_\theta^0 \approx 0 \dots (98)$$

この結果、アーチ内部にも曲げモーメントだけが生じ (後節 (1) 参照)、

$$\left. \begin{aligned} N^0 &= \int_F \sigma_\theta^0 dF = 0, M_y^0 = \int_F \sigma_\theta^0 x dF = 0 \\ M_\omega^0 &= \int_F \sigma_\theta^0 \omega dF = 0, T_{zs}^0 = \int_F \frac{\rho}{\rho^*} \tau_s^0 \theta dF = 0 \end{aligned} \right\} \dots (99 \cdot a \sim d)$$

式 (92) から式 (98) までと式 (99 \cdot a) を用いると、式 (87) の右辺は、

$$\int_0^\theta E \left\{ F(\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0) \delta(\varepsilon_z + \varepsilon_{nn}^L) + J_x \left( \varepsilon_x^0 + \frac{\varepsilon_{nn}^0}{R_0} \right) \times \delta \left( \varepsilon_n^L + \frac{\varepsilon_{nn}^L}{R_0} \right) + [\bar{M}_x^0 \delta \phi_n]_0^\theta \right\} = 0 \dots (100)$$

式 (92) から式 (98) と、式 (99 \cdot b \sim d) を用いると式 (87) の左辺は、

$$\int_0^\theta \left\{ EF(\varepsilon_z + \varepsilon_{nn}^L) \delta(\varepsilon_z + \varepsilon_{nn}^L) + EJ_x \left( \varepsilon_x^L + \frac{\varepsilon_{nn}^L}{R_0} \right) \times \delta \left( \varepsilon_x^L + \frac{\varepsilon_{nn}^L}{R_0} \right) + EJ_y \varepsilon_y^L \delta \varepsilon_y^L + EC_\omega \varepsilon_\omega^L \delta \varepsilon_\omega^L + GJ_T \left( \psi_z - \frac{\phi_x^0 \phi}{R_0} \right) \delta \left( \psi_z - \frac{\phi_x^0 \phi}{R_0} \right) - M_x^0 \delta \left( \varepsilon_x^N + \frac{\varepsilon_{nn}^N}{R_0} \right) + M_{xz}^0 \delta \varepsilon_{xz}^N + M_{yy}^0 \delta \varepsilon_{yy}^N \right\} R_0 d\theta - \left[ \bar{M}_x^0 \delta \left( \phi_y \phi + \frac{1}{2} \phi_x^0 \phi^2 \right) \right]_0^\theta = 0 \dots (101)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_F \frac{R_0}{\rho} dF, J_x = \int_F \frac{R_0}{\rho} y^2 dF \\ J_y &= \int_F \frac{R_0}{\rho} x^2 dF, C_\omega = \int_F \frac{R_0}{\rho} \omega^2 dF \\ J_T &= \int_F \frac{R_0 \rho}{\rho^{*2}} \theta^2 dF \end{aligned} \right\} \dots (102)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x^0 &= \int_F \sigma_\theta^0 y dF, M_{xz}^0 = \int_F \frac{R_0}{\rho} \sigma_\theta^0 y^2 dF \\ M_{yy}^0 &= \int_F \frac{R_0}{\rho} \sigma_\theta^0 \left( x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 dF \end{aligned} \right\} \dots (103)$$

式 (100), (101) の  $\bar{M}_x^0$  はアーチ両端に作用する曲げモーメントであり、

$$\bar{M}_x^0 = \int_F \bar{\sigma}_\theta^0 y dF \dots\dots\dots(104)$$

で与えられる. 式 (100) と式 (101) の計算では  $\rho=R_0$   $-y$  (式 (54)) の関係を用いて,

$$\left. \begin{aligned} F_0 &\equiv \int_F dF = F - \frac{Z_x}{R_0} = F \\ Z_{x0} &\equiv \int_F y dF = Z_x - \frac{J_x}{R_0} = -\frac{J_x}{R_0} \\ F_{00} &\equiv \int_F \frac{\rho}{R_0} dF = F - \frac{2Z_x}{R_0} + \frac{J_x}{R_0^2} = F + \frac{J_x}{R_0^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(105)$$

の関係が用いられている.

(1) 座屈前の変位支配方程式

式 (79) を考慮すると, 式 (71) と式 (72) により

$$\varepsilon_z^0 = \omega_0' - \frac{v_0}{R_0}, \varepsilon_x^0 = \kappa_x^0, \varepsilon_{nn}^0 = \frac{1}{2} \phi_x^{02} \dots\dots\dots(106)$$

6. で述べたように, 接線回転角  $\phi_x^0$  は 1 に比べて十分小さく, 曲率半径  $R_0$  は十分大きいとしているから, 座屈前に対する式 (100) において,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^0 + \frac{\varepsilon_{nn}^0}{R_0} &= \kappa_x^0 + \frac{\phi_x^{02}}{2R_0} \approx \kappa_x^0 \\ \varepsilon_x^L + \frac{\varepsilon_{nn}^L}{R_0} &= \kappa_x + \frac{\phi_x^0 \phi_x}{R_0} \approx \kappa_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(107)$$

と近似する. これは部材軸線の曲率の変化を線形化したことを意味し, 軸力と曲げを受けるアーチの面内座屈解析で用いられる近似と同じである<sup>12)</sup>.  $\delta\varepsilon_z$  と  $\delta\varepsilon_x^L = \delta\kappa_x$  を式 (71) を用いて部材軸線の変位の変分で表わし, 式 (100) を部分積分すると座屈前の変位に対して

$$\left. \begin{aligned} (EJ_x \kappa_x^0)'' - \{EF(\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0) \phi_x^0\}' \\ - \frac{EF}{R_0} (\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0) = 0 \\ - \left( \frac{EJ_x}{R_0} \kappa_x^0 \right)' + \frac{EF}{R_0} (\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0) \phi_x^0 \\ - \{EF(\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0)\}' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(108)$$

および  $\theta=0$  と  $\phi$  で

$$\left. \begin{aligned} \delta v_0 = 0 \text{ または} \\ -(EJ_x \kappa_x^0)' + EF(\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0) \phi_x^0 = 0 \\ \delta \omega_0 = 0 \text{ または} \\ EF(\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0) = 0 \\ \delta \phi_x = 0 \text{ または} \\ EJ_x \kappa_x^0 + \bar{M}_x^0 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(109 \cdot a \sim c)$$

座屈前での直ひずみは, 式 (69) と式 (79) より

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta^0 &= \frac{R_0}{\rho} \varepsilon_z^0 - \frac{R_0}{\rho} y \kappa_x^0 + \varepsilon_{nn}^0 \\ &= \frac{R_0}{\rho} (\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0) - \frac{R_0}{\rho} y \left( \kappa_x^0 + \frac{\varepsilon_{nn}^0}{R_0} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots(110)$$

式 (107) より

$$\varepsilon_\theta^0 \approx \frac{R_0}{\rho} (\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0) - \frac{R_0}{\rho} y \kappa_x^0 \dots\dots\dots(111)$$

座屈前では軸力は作用していないから,

$$N^0 = \int_F E \varepsilon_\theta^0 dF = EF(\varepsilon_z^0 + \varepsilon_{nn}^0) = 0 \dots\dots\dots(112)$$

したがって, 座屈前での変位支配方程式 (108) は微小変位理論の場合と同じになり, 両端単純支持の解として

$$\kappa_x^0 = -\frac{\bar{M}_x^0}{EJ_x}, M_x^0 = \bar{M}_x^0 \dots\dots\dots(113)$$

式 (111) と式 (112) より断面内の応力は

$$\sigma_\theta^0 = -E \kappa_x^0 \frac{R_0}{\rho} y, \tau_s^0 = 0 \dots\dots\dots(114)$$

この式の第 2 の式は, 式 (70) と式 (79) から明らかである. 上式を断面力  $M_y^0, M_\omega^0, T_{zs}^0$  の定義式 (99) の  $\sigma_\theta^0$  と  $\tau_s^0$  に代入するといずれも零となる.

次に座屈後 ( $Q_{n+1}$  状態) での変位支配方程式と座屈荷重を求める.

(2) 座屈後の変位支配方程式

式 (103) で定義された  $M_{xx}^0, M_{yy}^0$  に式 (114) の第 1 式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} M_{xx}^0 &= \int_F \frac{R_0}{\rho} \sigma_\theta^0 y^2 dF = -E \int_F \frac{R_0^2}{\rho^2} y^3 dF \kappa_x^0 \\ M_{yy}^0 &= \int_F \frac{R_0}{\rho} \sigma_\theta^0 \left( x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 dF \\ &= -E \int_F \frac{R_0^2}{\rho^2} y \left( x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 dF \cdot \kappa_x^0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(115)$$

原点  $O$  は重心であり, 部材軸線の曲率は小さいから, 上式の断面内の積分はほぼ零と見なせる. すなわち,

$$M_{xx}^0 \approx 0, M_{yy}^0 \approx 0 \dots\dots\dots(116)$$

これは先に重心とせん断中心の違いを無視したのと同程度の近似と考えられる.

式 (107) を用いると式 (84) の  $\varepsilon_y^L$  と  $\varepsilon_\omega^L$  は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y^L &= \kappa_y + \varphi \left( \kappa_x^0 + \frac{\phi_x^{02}}{R_0} \right) + \frac{\phi_x^0 \phi_y}{R_0} \\ &\approx \kappa_y + \kappa_x^0 \varphi + \frac{\phi_x^0 \phi_y}{R_0} \\ \varepsilon_\omega^L &= \varphi_\omega - \frac{\varphi}{R_0} \left( \kappa_x^0 + \frac{\phi_x^{02}}{R_0} \right) - \frac{\phi_x^0 \phi_y}{R_0^2} \\ &\approx \varphi_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} - \frac{\phi_x^0 \phi_y}{R_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(117)$$

ここで直ひずみエネルギー増分への接線回転角  $\phi_x^0$  の影響は小さいと考えられるから, これを無視することができる. すなわち, 上式はさらに

$$\varepsilon_y^L \approx \kappa_y + \kappa_x^0 \varphi, \varepsilon_\omega^L \approx \varphi_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} \dots\dots\dots(118)$$

と近似し得る. 式 (85) の  $\varepsilon_x^N$  と  $(\psi_z - \phi_x^0 \varphi / R_0)$  にも  $\phi_x^0$  は含まれているが, 式 (101) を部分積分した後には式 (118) の形の項が出てくるから, 式 (101) の段階で  $\phi_x^0$  を無視すると結果として統一のとれないものとなる.

式 (101) に式 (113), 式 (116) および式 (118) を代入して部分積分した後には  $\phi_x^0 \approx 0$  とおくと, 以下の変位支配方程式と境界条件を得る.

$0 < \theta < \phi$  で

$$\left\{ EJ_y (\kappa_y + \kappa_x^0 \varphi) - \frac{EC_\omega}{R_0} \left( \vartheta_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} \right) \right\}'' + \left( \frac{GJ_T}{R_0} + \bar{M}_x^0 \right) \left( \vartheta_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (119)$$

$$\left\{ EC_\omega \left( \vartheta_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} \right) \right\}'' + EJ_y (\kappa_y + \kappa_x^0 \varphi) \times \left( \frac{1}{R_0} + \kappa_x^0 + \frac{\bar{M}_x^0}{EJ_y} \right) - \left( \frac{EC_\omega}{R_0} \kappa_x^0 + GJ_T \right) \left( \vartheta_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (120)$$

$\theta=0$  と  $\phi$  で

$$\delta u_0 = 0 \text{ または } \left\{ -EJ_y (\kappa_y + \kappa_x^0 \varphi) + \frac{EC_\omega}{R_0} \left( \vartheta_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} \right) - \bar{M}_x^0 \varphi \right\}' - \frac{GJ_T}{R_0} \psi_z = 0 \quad \dots\dots\dots (121)$$

$$\delta \varphi = 0 \text{ または } - \left\{ EC_\omega \left( \vartheta_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} \right) \right\}' + GJ_T \psi_z = 0 \quad \dots (122)$$

$$\delta \phi_y = 0 \text{ または } EJ_y (\kappa_y + \kappa_x^0 \varphi) = 0 \quad \dots\dots\dots (123)$$

$$\delta \psi_z = 0 \text{ または } EC_\omega \left( \vartheta_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (124)$$

両端単純支持の場合は  $\theta=0$  と  $\phi$  で

$$\left. \begin{aligned} \delta u_0 = \delta \varphi = 0 \\ EJ_y (\kappa_y + \kappa_x^0 \varphi) = EC_\omega \left( \vartheta_\omega - \frac{\kappa_x^0 \varphi}{R_0} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (125)$$

である. 座屈変位曲線として

$$u_0 = R_0 a_0 \sin m\theta, \quad \varphi = b_0 \sin m\theta \quad \dots\dots\dots (126)$$

を採用する. ここに

$$m = \frac{\pi}{\phi} \quad \dots\dots\dots (127)$$

である. 式 (126) を式 (71) の  $\kappa_y, \vartheta_\omega$  に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \kappa_y = \frac{1}{R_0} (-a_0 m^2 + b_0) \sin m\theta \\ \vartheta_\omega = \frac{m^2}{R_0^2} (-a_0 + b_0) \sin m\theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (128)$$

よって  $\theta=0$  と  $\phi$  で条件式 (125) を満たす.  $\kappa_x^0 = -$

$\bar{M}_x^0 / EJ_x$  (式 (113)), 式 (126) および式 (128) を式 (119) と式 (120) に代入して全体を  $EJ_y$  で除す. そして, 以下の無次元量を用いる.

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \frac{J_y}{J_x}, \quad k = \frac{GJ_T}{EJ_y} \\ \lambda^2 = \frac{EC_\omega}{EJ_y R_0^2}, \quad M_0 = \frac{\bar{M}_x^0}{EJ_y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (129)$$

その結果, 式 (119) と式 (120) は,

$$\left. \begin{aligned} a_0 C_{11} + b_0 C_{12} = 0 \\ a_0 C_{21} + b_0 C_{22} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (130)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= m^2(k + m^2 + m^2 \lambda^2) + m^2 M_0 \\ C_{12} &= -m^2(1 + k + m^2 \lambda^2) \\ &\quad + \{\alpha k - m^2(1 - \alpha - \alpha \lambda^2)\} M_0 + \alpha M_0^2 \\ C_{21} &= -m^2(1 + k + m^2 \lambda^2) + m^2(\alpha + \alpha \lambda^2 - 1) M_0 \\ C_{22} &= 1 + m^2(k + m^2 \lambda^2) + \{1 + \alpha k - 2\alpha(1 + k + \lambda^2 m^2)\} \\ &\quad \times M_0 + \alpha(\alpha + \alpha \lambda^2 - 1) M_0^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (131)$$

式 (130) が  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$  なる解を持つためには係数行列式が零でなければならないことから若干の演算の後, 次式を得る.

$$(1 - \alpha) M_0^2 + \{1 + \lambda^2 m^2 + k(1 - \alpha)\} M_0 + (1 - m^2)(k + \lambda^2 m^2) = 0 \quad \dots\dots (132)$$

これを解いて  $\alpha, k, \lambda^2, m$  および  $M_0$  を元の形にもどすと座屈荷重として

$$\bar{M}_x^0 = \frac{1}{1 - \frac{J_y}{J_x}} \left[ - \frac{EJ_y + \frac{\pi^2}{L_0^2} EC_\omega + GJ_T \left(1 - \frac{J_y}{J_x}\right)}{2 R_0} \pm \sqrt{\left\{ \frac{EJ_y + \frac{\pi^2}{L_0^2} EC_\omega + GJ_T \left(1 - \frac{J_y}{J_x}\right)}{2 R_0} \right\}^2} \right]^* + \left(1 - \frac{J_y}{J_x}\right) \left( \frac{\pi^2}{L_0^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) EJ_y \left( \frac{\pi^2}{L_0^2} EC_\omega + GJ_T \right) \quad \dots\dots\dots (133)$$

ここで,

$$L_0 = R_0 \phi \quad \dots\dots\dots (134)$$

はアーチの重心軸の弧の長さである.

式 (133) で  $y$  軸が弱軸で

$$\frac{J_y}{J_x} \ll 1 \quad \dots\dots\dots (135)$$

として  $J_y/J_x$  を無視すると Vlasov<sup>7)</sup> によって導かれた座屈前の変位を無視した 2 軸対称断面の解に一致する. また,  $L_0$  を一定とし,  $R_0 \rightarrow \infty$  とすると座屈前の変位を考慮した直線材に対する西野<sup>1)</sup> らの解に一致する.

Porpan と Trahair<sup>10)</sup> も座屈前のアーチの変位を考慮した解を与えているが, これは式 (133) とは若干異なっている. 彼らの解法はいわゆる線形化有限変位理論

表-1

$M^0$ $\mu$	Vlasov <sup>7)</sup>	Vacharajittiphan & Trahair <sup>19)</sup>	Author
10 <sup>-3</sup>	1.5771	1.7516	1.7516
10 <sup>-2</sup>	1.6319	1.8066	1.8066
10 <sup>-1</sup>	2.0832	2.2700	2.2655
1	4.7124	5.2360	4.9708

$$M^0 = \frac{\bar{M}_x^0}{EJ_y} \quad \mu = \frac{GJ_T}{EJ_y} \left( 1 + \frac{\pi^2 EC_w}{GJ_T l^2} \right)$$

に属する。これと式(133)を比較するために2軸対称I型断面で

$$\frac{J_y}{J_x} = 0.1, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots(136)$$

のときの座屈荷重  $M_0 = \bar{M}_x^0/EJ_y$  の比較を Vlasov の結果とともに表-1に示す。表から

$$\frac{GJ_T}{EJ_y} \left( 1 + \frac{\pi^2 EC_w}{GJ_T l^2} \right) > 10^{-1} \dots\dots\dots(137)$$

では著者の解は文献7)と文献19)の中間的な値となっており、上式の不等号が逆の領域では文献19)とほぼ同じ結果となっている。なお、このときのライズ比(図-1(a)のM/L)は0.207で式(32)をほぼ満たす。

9. 結 語

薄肉断面部材の座屈問題を含めた有限変位理論の基礎となるのは、ひずみ-変位関係も含めた変位場の設定にあるとの認識の基に、従来の直線材に対するのと同様の仮定、すなわち、断面形不変の仮定とせん断ひずみに関するオイラー・ベルヌーイの仮定を適用して、部材軸線の曲率が一定な薄肉曲線材の変位場を求めた。

変位場を定めるための基礎として、有限変位理論における薄肉回転シェルのひずみ-変位関係と、薄肉偏平シェルのつり合い式を用いた。従来から用いられている、軸方向変位  $w$  の微係数は他の変位の微係数に比べて小さいとする仮定を吟味し、変位  $w$  を断面内に固定された直角座標の原点のまわりにテーラー展開したとき、せん断ひずみに関するひずみ-変位関係式の2次項に含まれている変位  $w$  を、テーラー展開の第1項、すなわち、断面全体の剛体的変位で近似した。この近似に関する議論は、いまだ定性的な面を含んではいるが、得られた軸方向変位は、実用上十分な精度を持つと考えられる。

結果として定義された部材軸線のねじれ率は、直線材の場合と著しく異なった表式であるが、前述の軸方向変位の微係数が十分小さいとする仮定に立つと、幾何学的な考察からも導かれることを示した。

最後に断面内の任意点の変位を部材軸線の変位の3次

式で近似した場合の増分理論を示し、解析例として2軸対称断面アーチの純曲げによる横倒れ座屈荷重を求めた。このとき座屈直前でのアーチ軸線の曲率の変化を考慮した。得られた閉じた形の座屈荷重を数値的にも検討し、納得のいくものであることを確かめた。

参 考 文 献

- 1) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏憲：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，第225号，pp. 1~15, 1974-5.
- 2) Trahair, N.S. and S.T. Woolcock: Effect of major axis curvature on I-beam stability, ASCE, Vol. 99, EM 1, pp. 85~98, Feb., 1973.
- 3) Vielsack, P.: Lineare Stabilitätstheorie elastischer Stäbe nach der zweiten Näherung, Ingenieur-Archiv, Band 44, Heft 3, pp. 143~152, 1975.
- 4) 青島泰之：文献1)への討議および回答，土木学会論文報告集，第240号，pp. 144~146, 1975-8.
- 5) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳頭：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，第237号，pp. 11~26, 1975-5.
- 6) 遼田良喜：伝達マトリックス法による薄肉断面曲線ばりの有限変位理論の解析，土木学会論文報告集，第199号，pp. 11~20, 1972-3.
- 7) Vlasov, V.Z. 奥村ほか訳：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967.
- 8) Namita, Y.: Die Theorie II Ordnung von Krümmen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, Trans. of JSCE, No. 155, pp. 32~41, July, 1968.
- 9) Novozhilov, V.V.: Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press, 1953.
- 10) Novozhilov, V.V.: Theory of Elasticity, Pergamon Press, 1961.
- 11) Kerr, A.D. and Soifer, M.T.: The Linearization of the Prebuckling State and Its Effect on the Determined Instability Load, Journal of Applied Mechanics, Dec., 1969.
- 12) Dym, C.L.: Buckling and Postbuckling Behavior of Steep Compressible Arch, Int. J. Solids Structures, pp. 129~140, Vol. 9, 1973.
- 13) Mushtari, Kh.M. and Galimov, K.Z.: Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells, Israel Program for Scientific Translation Ltd., pp. 82, 1962.
- 14) Novozhilov, V.V.: Thin Shell Theory, pp. 98, Walters-Noordhoff Publishing, 1970.
- 15) 倉西正嗣：応用弾性学，pp. 54, 共立全書 11, 1948.
- 16) Oran, C.: Tangent Stiffness in Space Frames, ASCE, Vol. 99, ST 6, pp. 987~1001, June, 1973.
- 17) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の大変形解析，JSSCマトリックス構造解析法研究発表論文集，pp. 313~318, 1975.
- 18) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，コンピューターによる構造工学講座 II-3-A, pp. 131~135, 日本鋼構造協会編，1970.
- 19) Vacharajittiphan, P. and Trahair, N.S.: Flexural-Torsional Buckling of Curved Members, ASCE, Vol. 101, ST6, pp. 1223~1238, June, 1975.

(1976.7.22・受付)