

変形法による骨組構造物の非保存的弾性安定解析

ANALYSIS OF NONCONSERVATIVE ELASTIC STABILITY
OF FRAMED STRUCTURES BY DISPLACEMENT METHOD

會田 忠義*・波木 健一**

By Tadayoshi AIDA and Kenichi NAMIKI

1. まえがき

骨組構造物の弾性安定解析で、特に、土木構造物に関する分野では、荷重のほとんどが重力によるものであることから、これまでに取り扱われてきた問題がほとんど保存系であった。最近、海洋構造物のように、水、油や風などの流体の影響を受ける構造物を見かける機会が多くなったが、これらの流体から受ける力は構造物の変形に伴ってその作用方向の変化するもの（追従力¹⁾、従動力^{2),3)} follower force) が多く、非保存力に相当するものがほとんどである。た

例えば、Fig. 1 (a) に示す力は流体の輸送管構造において、流体の放出にともなう運動量に起因する推力（上記の構造には他に種々の力が作用し、推力はその一部に過ぎない）に対応するもの

である。保存力が支配的な一般的な土木構造物に対するこれらの荷重の影響は顕著なものとは考えられないが、その影響を明らかにする必要がある場合があるであろう。本論文は、以上の観点から一般骨組構造物に対する従動荷重作用時の安定解析の一手法を提示するものである。これらの荷重による安定問題は非保存系の問題（一部、従動荷重が作用する場合でも境界条件によって保存系の問題となることがある^{4),5)}）として取り扱われなければならないことは周知のとおりである。

弾性安定解析において、非保存的問題として取り扱う力学系を、Ziegler⁶⁾ は散逸系 (dissipative system)、循環系 (circulatory system) および非正常系 (instation-

ary system) の三つに分類している。散逸系とは減衰力が作用する系、循環系とは従動力などの循環力（流体力学において、流れの速度ポテンシャルが一価であれば、循環は存在せず、速度ポテンシャルから速度はただちに求められるが、流れに循環がある場合は一般に多価になるので非循環の場合のようには求められない。ここで考えている力でも重力のように一価ポテンシャルから導くことのできるものとそうでないものがあり、流体力学的表現を用いて、前者は非循環力 (noncirculatory force)、後者は循環力 (circulatory force) と呼ばれている) が作用する系で、非正常系とは周期力が作用する系を指している。

本文で取り扱う系は上記中の循環系に相当する。この系について、棒の力学を用いた柱の解析的研究^{7)~11)}、差分法による研究^{12)~14)}、アナログ計算機を用いた研究¹⁵⁾、集中質量系の一つである Ziegler の標準モデルによる研究^{16)~20)}、あるいは有限要素法による研究^{21),22)} など、多くの研究がなされている。トラス、アーチあるいはラーメンなどの非保存系としての安定性についての調査に有限要素法を適用することは可能であるが、あまり行われていない。本研究は、非保存系の弾性安定解析には動的解析法を用いなければならないことから、骨組構造物の解析に一般的である変形法を用い、変分式 (variational equation^{24)~26)} を求めることにより動的に解析する方法をとった。動的解析にあたり、非減衰系と減衰系の両方を取り扱った。特に、減衰系においては、Ziegler⁶⁾ が非保存的弾性系における減衰の影響について、内部減衰が系に不安定化効果をもたらす場合がある事実を見出して以来、Bolotin⁷⁾、Leipholz^{8),23)} および Herrmann^{18),19)} らにより多くの研究報告がなされているが、ここでは、減衰力は変位の時間に関する一次微係数に比例する粘性減衰のみを考慮し、減衰マトリックスはモーダルマトリックスにより対角化され得る場合に限定し、減衰の影響を確認した。

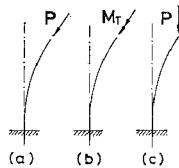


Fig. 1 Columns subjected to the nonconservative force and torque.

* 正会員 工博 山口大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 (株) 福山コンサルタント

解析にあたって、さらに、次の仮定を加えた。

- ① 外力はすべて構造物の節点に作用する。
- ② 構造物に作用する外力はすべて一定の割合で漸増する。
- ③ 外力は質量をもたない。
- ④ 内力はすべて弾性限度内にある。
- ⑤ 局所的な不安定現象は生じない。
- ⑥ 構造物の質量はすべて節点に集中する。

本研究は参考文献 27) 中の従動力に一般性をもたせるべく修正するとともに、減衰の影響²⁸⁾を一部付け加えまとめたものであり、以下に、その解析法を節点総数 m の立体剛節構造物 (Fig. 2) について示し、最後に若干の適用例を示す。

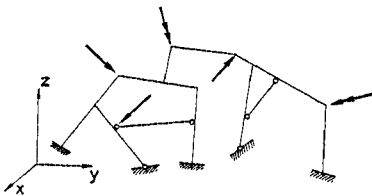


Fig. 2 Framed structure under the follower forces and torques.

2. 運動方程式と臨界荷重の算定

ある循環力を受け微小な運動をしている構造物を考える。この初期の状態が安定の場合には小さい外乱に対して振動変位は時間の経過とともに増大することはないが、初期の状態が臨界状態であれば、小さい外乱に対して振動変位は時間の経過とともに漸増し無限大になる。ここでは初期の運動状態に微小振幅の運動方程式を適用し、外乱による付加変位を $\Delta \bar{d}$ として外乱後の運動状態には線形化した有限振幅の運動方程式を適用する。付加変位の時間経過状態により安定、不安定の判定をする。

(1) 微小振幅時の運動方程式

節点 i に作用する外力ベクトルを P_{0i} 、節点 i の変位ベクトルを d_i 、この中で、外力による変位ベクトルを d_{0i} 、振動変位ベクトルを \bar{d}_i とする (Fig. 3)。

$$P_{0i} = \{X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}, U_{0i}, V_{0i}, W_{0i}\}^T \dots\dots (1)$$

$$d_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \dots\dots (2)$$

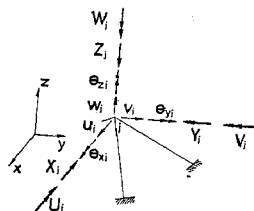


Fig. 3 Nodal displacements and forces.

$$d_{0i} = \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{x0i}, \theta_{y0i}, \theta_{z0i}\}^T \dots\dots (3)$$

$$\bar{d}_i = \{\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}\}^T \dots\dots (4)$$

さらに、節点 i の座標ベクトルを f_i 、部材 ij の節点 i における断面の主軸の回転角を α_{ij} ²⁹⁾ とする。

$$f_i = \{x_i, y_i, z_i\}^T \dots\dots (5)$$

節点 i の微小振幅時の運動方程式は

$$W_i \frac{d^2 \bar{d}_i}{dt^2} = - \sum_j T_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) \cdot N_{ij}'(d_{0i} + \bar{d}_i, d_{0j} + \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{0i} \dots\dots (6)$$

ここで、 W_i は質量マトリックス²⁹⁾、 T_{ij} は局部座標軸方向の量を全体座標軸方向の諸量に変換するための座標変換マトリックス²⁹⁾、 N_{ij}' は部材 ij の i 端における局部座標に関する材端力ベクトル²⁹⁾である。また、式中の \sum_j は節点 i と部材で連結される節点 j についての和を表わす。

式 (6) を構造物の各節点に適用することにより、一連の運動方程式が得られる。拘束条件を考慮し、マトリックス表示すると、次式となる。ただし、式中 n は $n < m$ である。

$$W \frac{d^2 \bar{d}}{dt^2} + K_1(d_0 + \bar{d}) = -P_0 \dots\dots (7)$$

ここで、

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & & 0 \\ & W_2 & \\ 0 & & W_n \end{bmatrix}, \quad d_0 = \begin{Bmatrix} d_{01} \\ d_{02} \\ \vdots \\ d_{0n} \end{Bmatrix}$$

$$d = \begin{Bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \vdots \\ \bar{d}_n \end{Bmatrix}, \quad P_0 = \begin{Bmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ \vdots \\ P_{0n} \end{Bmatrix}$$

K_1 : 剛性マトリックス

(2) 有限振幅時の運動方程式

節点 i の変位の外乱による付加変位を $\Delta \bar{d}_i$ とするとき、外乱後の節点 i の運動方程式は近似的であるが、次式で表わされる。

$$W_i \frac{d^2}{dt^2} (\bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i) = - \sum_j T_{ij}(f_i + \Delta f_i, f_j + \Delta f_j, \alpha_{ij} + \Delta \alpha_{ij}) \cdot N_{ij}'(d_{0i} + \bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i, d_{0j} + \bar{d}_j + \Delta \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{0i} - \epsilon_i A_i P_{0i} \dots\dots (8)$$

ここで、 Δf_i および Δf_j は外乱による構造物の形状の変化に伴う節点座標の変化量であり、これらの量は節点 i および j の外乱による付加変位に等しい。すなわち、 $\Delta f_i = \Delta \bar{d}_i$ 、 $\Delta f_j = \Delta \bar{d}_j$ 。また、 $\Delta \alpha_{ij}$ は α_{ij} の変化量、マトリックス A_i は回転変位 $(\bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi})$ の外乱による付加変位を $(\Delta \bar{\theta}_{xi}, \Delta \bar{\theta}_{yi}, \Delta \bar{\theta}_{zi})$ とするとき外力が完全な従動力あるいは従動トルクの場合、Fig. 4 より、次の

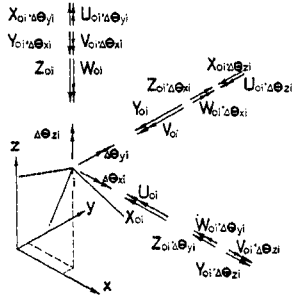


Fig. 4 Nodal follower forces and torques.

値をもつ

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{zi} & \delta_{yi} & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{zi} & 0 & -\delta_{xi} & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_{yi} & \delta_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{zi} & \delta_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{zi} & 0 & -\delta_{xi} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{yi} & \delta_{xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ϵ_i は節点 i に作用する荷重の従動度を表わす係数で、荷重が従動力、あるいは従動トルクでない場合は $\epsilon_i=0$ (Fig. 1 (c) に相当) になり、荷重が完全な従動力あるいは従動トルクの場合は $\epsilon_i=1$ (Fig. 1 (a) と (b) に相当) になる。したがって、 $\epsilon_i A_i P_{oi}$ は従動に伴う荷重の変動量を表わす。以上より明らかなように $A_i P_{oi}$ は次のように書き直すことができる。

$$\epsilon_i A_i P_{oi} = \epsilon_i B_i \bar{d}_i \quad (10)$$

ここで、 B_i は次の値をもつ。

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Z_{oi} & -Y_{oi} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -Z_{oi} & 0 & X_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{oi} & -X_{oi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{oi} & -V_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -W_{oi} & 0 & U_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & V_{oi} & -U_{oi} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式 (8) において、 T_{ij} および N_{ij}' を展開して $\delta \bar{d}_i$ の 2 次以上の項を無視し、さらに、微小振幅時の運動方程式 (6) を考慮し、 $\delta \bar{d}_i$ を新たに、 d_i とおくと、式 (8) は次のように整理される。

$$W_i \frac{d^2 d_i}{dt^2} = -\sum_j T_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) \cdot N_{ij}'(d_i, d_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - \sum_j \{ H_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}') d_i + H_{jj}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}') d_j \} - \epsilon_i B_i d_i \quad (12)$$

式中、 N_{ojj}' は荷重 P_0 が作用したときの部材 ij の i 端の材端力ベクトルであり、 \bar{N}_{ij}' は微小振幅時の同部材の材端力ベクトルである。

$$\left. \begin{aligned} N_{ojj}' &= N_{ij}'(d_{oi}, d_{oj}, f_i, f_j, \alpha_{ij}) \\ \bar{N}_{ij}' &= N_{ij}'(\bar{d}_i, \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

H_{ij} および $H_{jj}^{(2)}$ は次に示すマトリックスである。

$$H_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}') = \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}(N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}'), \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i}(N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}'), \\ &\cdot \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_i}(N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}'), \lambda_{ij} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}}(N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}'), \\ &\cdot \mu_{ij} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}}(N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}'), \\ &\cdot \nu_{ij} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}}(N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}') \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$H_{jj}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}')$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}(N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}'), \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j}(N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}'), \\ &\cdot \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_j}(N_{ojj}' + \bar{N}_{ij}'), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで、 \bar{N}_{ij}' は N_{ojj}' に比べて小さいので無視する。いま、骨組構造物の基準荷重作用状態における節点 i の荷重ベクトルを \tilde{P}_{oi} とすると、

$$\tilde{P}_{oi} = \{ \tilde{X}_{oi}, \tilde{Y}_{oi}, \tilde{Z}_{oi}, \tilde{U}_{oi}, \tilde{V}_{oi}, \tilde{W}_{oi} \}^T \quad (16)$$

臨界荷重作用状態における同じ節点ベクトル P_{oi} は \tilde{P}_{oi} の P_0 倍で表わされる。すなわち、

$$P_{oi} = P_0 \tilde{P}_{oi} \quad (17)$$

同様に、基準荷重作用状態における部材 ij の i 端の材端力ベクトルを \tilde{N}_{ojj}' とするとき、臨界荷重作用状態の同部材端の材端力ベクトル N_{ojj}' は次の線形関係をもつ。

$$N_{ojj}' = P_0 \tilde{N}_{ojj}' \quad (18)$$

さらに、基準荷重作用状態における B_i を \tilde{B}_i とすると次の関係が成り立つ。

$$B_i = P_0 \tilde{B}_i \quad (19)$$

\tilde{B}_i は外力が従動力あるいは従動トルクの場合、次の値をもつ。

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{Z}_{oi} & -\tilde{Y}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{Z}_{oi} & 0 & \tilde{X}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{Y}_{oi} & -\tilde{X}_{oi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{W}_{oi} & -\tilde{V}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{W}_{oi} & 0 & \tilde{U}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{V}_{oi} & -\tilde{U}_{oi} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

以上の関係より式 (12) は次のように整理される。

$$W_i \frac{d^2 d_i}{dt^2} = -\sum_j T_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) \cdot N_{ij}'(d_i, d_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_0 \sum_j \{ H_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}_{ojj}') d_i + H_{jj}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}_{ojj}') d_j \} - \epsilon_i P_0 \tilde{B}_i d_i \quad (21)$$

上式が節点 i の有限振幅時の運動を表わす式であり、変分式 (variational equation) である。これを骨組構造物のすべての節点に適用し、さらに、拘束条件を考慮してマトリックス表示すると、

$$W \frac{d^2 d}{dt^2} + (P_0 K_3 + P_0 K_4 + K_1) d = 0 \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 W と K_1 は式 (7) と同じであり、 K_3 は基準荷重 (\tilde{P}_{0i} , $i=1, 2, \dots, n$) 作用時の初期応力マトリックスである。

$$K_4 = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \tilde{B}_1 & & 0 \\ & \epsilon_2 \tilde{B}_2 & \\ 0 & & \epsilon_n \tilde{B}_n \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

(3) 臨界荷重の算定

付加変位 d を次に示す関数で表わすと、

$$d = \tilde{d} e^{i\lambda t} \dots\dots\dots (23)$$

式 (22) は次式となる。

$$\{\lambda^2 W + P_0(K_3 + K_4) + K_1\} \tilde{d} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

したがって、 $\tilde{d} = 0$ 以外の解をもつことより、次の特性方程式が得られる。

$$|K_1 + P_0(K_3 + K_4) + \lambda^2 W| = 0 \dots\dots\dots (25)$$

与えられた P_0 に対して上式を満たす λ^2 を求めることにより構造物の安定性を判定することができる。すなわち、与えられた P_0 に対して式(25)の根 λ^2 のすべてが負値である場合、 d は周期関数となり、与えられた初期外乱に対して非減衰の自由振動となり安定である。 n 個の λ^2 の一つでも正値をとれば d は周期関数とならず、時間の経過とともに変位は増大して不安定 (divergence 形不安定) となる。一方、 λ^2 が複素根をとると、 $\lambda = \gamma + i\delta$ ($\gamma > 0$) で表わされる値をもつため、 d は $e^{i\lambda t}$ の項を含み、時間の経過とともに変位振幅が増大し不安定 (flutter 形不安定) となる。したがって、構造物に不安定を引き起こす最小臨界荷重は特性方程式が負の実根のみをもつ状態から正の実根あるいは複素根をもつ状態に変化する臨界の P_0 値を算定することにより求められる。

3. 減衰の影響を考慮した場合の運動方程式と臨界荷重

粘性減衰のみを考慮し減衰マトリックスを D とすると外乱後の有限振幅時の運動を表わす変分式は式 (22) より、

$$W \frac{d^2 d}{dt^2} + D \frac{dd}{dt} + P_0(K_3 + K_4) d + K_1 d = 0 \dots\dots\dots (26)$$

で表わされる。ここで、減衰マトリックス D は式(27)に示すようにモーダルマトリックスで対角化される簡単な場合を想定する。

$$[\Phi]^T D [\Phi] = \begin{bmatrix} 2 h_1 \omega_1 & & 0 \\ & 2 h_2 \omega_2 & \\ 0 & & 2 h_n \omega_n \end{bmatrix} = [2 h \omega] \dots\dots\dots (27)$$

上式中、 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ は無載荷時の非減衰自由振動の固有円振動数、 $[\Phi]$ はそれぞれの固有円振動数に対応する正規化された固有ベクトル $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ で表わされるモーダルマトリックス、 h_1, h_2, \dots, h_n はそれぞれのモードに対応する減衰定数である。

このとき、減衰マトリックス D は次式で表わされる。

$$D = W[\Phi][2 h \omega][\Phi]^T W \dots\dots\dots (28)$$

付加変位 d を式 (23) で表わすと、特性方程式は、

$$|K_1 + P_0(K_3 + K_4) + \lambda D + \lambda^2 W| = 0 \dots\dots\dots (29)$$

となる。与えられた P_0 に対して特性方程式の根 λ は一般に複素数になり、 λ の実部が負値の場合、構造物は安定であるが、正値をとる場合は不安定になる。したがって、最小臨界荷重は特性方程式が、実部が負の根だけをもつ状態から実部が正の根をもつ状態に変化する臨界の P_0 値を算出することにより求められる。

4. 適用例

一端固定他端自由柱の自由端に集中従動荷重を受ける問題 (Beck の問題)、同じ柱で自由端に従動トルクを受ける問題および異なった境界条件 (一端固定他端自由、一端固定他端ヒンジ、両端ヒンジおよび両端固定) をもつ四種類の柱の等分布接線従動荷重を受ける問題を、非減衰問題として本研究の方法で解析した結果を示す。さらに、これまでに解析された結果と比較検討する。また、粘性減衰の影響、特に、減衰マトリックスが対角化可能な場合の影響を確認するために、フラクタ形不安定の例として Beck の問題を、ダイバージェンス形不安定の例として等分布接線従動荷重を受ける両端ヒンジ柱を解析しその結果を示す。ここで考慮する減衰は対角化された減衰マトリックスの要素がすべて等しい場合 (式 (27) において $2 h_i \omega_i = 2 h \omega_i$, $i=1, 2, \dots, n$ とする場合) およびすべて異なる場合 (式 (27) において、 $2 h_i \omega_i = 2 h \omega_i$, $i=1, 2, \dots, n$ とする場合) について、特に減衰定数 h はすべてのモードに対して一定とする。

上記の柱の問題のほか、従動荷重を受ける円弧の面内変形および面外変形アーチを非減衰問題として本研究の方法で解析した結果を示す。

以下、解析結果を図表示するにあたり、次に示す無次元量を用いる。

無次元荷重

$$\eta_p = P l^2 / EI,$$

$$\eta_q = q l^3 / EI,$$

無次元固有値

$$\xi = \lambda^2 l^4 \mu / EI$$

$$\bar{\xi} = \lambda^2 \sqrt{\mu / EI}$$

ここで、 P は柱の柱端に作用する集中荷重を、 q は柱

およびアーチに作用する等分布荷重を表わす。特に、アーチに作用する q は節点に作用する集中荷重を円周に等分布に作用する荷重に換算したものである。 l は柱の問題においては柱長を、アーチの問題ではアーチの軸線長を表わす。 EI は柱およびアーチのいずれの問題においても断面の弱軸に関する曲げ剛性である。また、図中に用いている $R_e \bar{\xi}$ および $I_m \bar{\xi}$ はそれぞれ $\bar{\xi}$ の実部および虚部を表わす。

(1) 従動荷重を受ける柱

柱長 60 cm, 断面 4.0×0.2 cm のアルミニウム柱を対象とし、柱を 10 等分割し集中質量系に置換する。

a) Beck の問題 (Fig. 1 (a))

非減衰時の一次および二次の固有値曲線を Fig. 5 に、最小臨界荷重を Table 1 に示す。比較のため Beck の解⁹⁾ および差分法 (F.D.M.) の解¹³⁾ をともに示している。

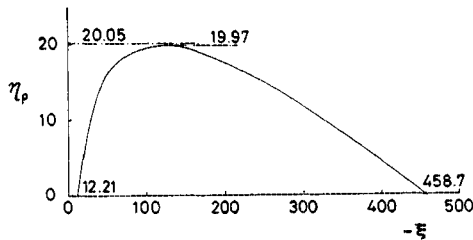


Fig. 5 Eigenvalue curve of Beck's problem.

Table 1 Minimum critical Loads η_{per} for Beck's problem

Beck's solution ⁹⁾		20.05
Proposed method	k=10	19.97
	k=20	20.02
F. D. M. ¹³⁾	k=10	19.89
	k=50	20.04
	k=100	20.05

F. D. M. = finite difference method.
k = number of division.

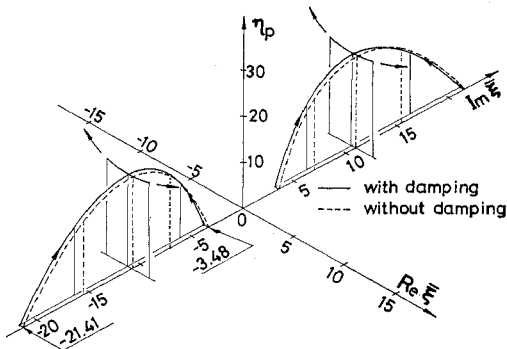


Fig. 6 Eigenvalue curve of Beck's problem with damping, where each element of diagonalized damping matrix are equal, i.e., $2h\omega_i$ (damping constant $h=0.05$).

本研究の結果が Beck の解とよく一致することがわかる。

対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて等しい場合の固有値曲線を非減衰時の固有値曲線とともに Fig. 6 に示す。この曲線は非減衰時の曲線を $R_e \bar{\xi}$ の負の側に平行移動させた曲線と類似の形になる。臨界荷重付近における一次の固有値曲線の $\eta_p - R_e \bar{\xi}$ 平面への射

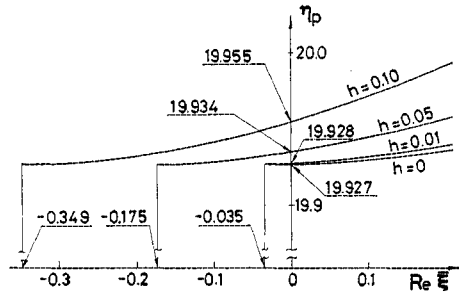


Fig. 7 Orthographic projections of eigenvalue curve of 1st mode for Beck's problem when each element of the diagonalized damping matrix are equal.

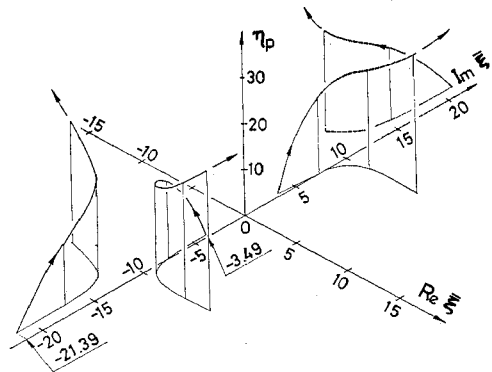


Fig. 8 Eigenvalue curve of Beck's problem with damping, where elements of the diagonalized damping matrix are different from each other, i.e., $2h\omega_i$ (damping constant $h=0.05$).

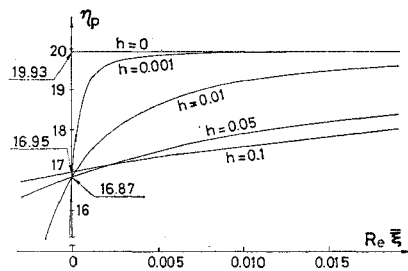


Fig. 9 Orthographic projections of eigenvalue curves of 1st mode for Beck's problem when elements of the diagonalized damping matrix are different from each other.

影図を Fig. 7 に示す. 図より明らかなように, 減衰定数の増加に伴い臨界荷重は増大し構造物は安定化されることがわかる.

対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて異なる場合の固有値曲線を Fig. 8 に示し, 臨界荷重値付近の一次の固有値曲線の $\eta_q - R_0 \bar{\epsilon}$ 平面への射影図を Fig. 9 に示す. この場合, 減衰をわずか考慮すると臨界荷重値は急激に低下し, その値は減衰定数が小さい間は一定値をとる. すなわち, 小さい減衰を考慮するとき, 構造物は不安定化されることがわかる.

b) 等分布接線従動荷重を受ける柱

Fig. 10 に示す異なった境界条件をもつ四種類の柱の非減衰時の等分布接線従動荷重の最小臨界値を Table 2 に示し, 一次および二次の固有値曲線を Fig. 11 に示す. 表には比較のため差分法の解¹³⁾と Galerkin 法による解^{10), 11)}も併記してあり, 本解法の結果が既往の研究の結果とよく合うことがわかる.

対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて等しい場合の Case III の柱の固有値曲線を Fig. 12, 各要素がすべて異なる場合の固有値曲線を Fig. 13 に示す. 後者の場合の臨界荷重値付近における一次の固有値曲線

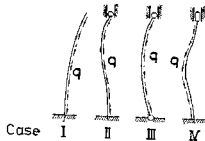


Fig. 10 Columns subjected to the uniformly distributed tangential follower force.

Table 2 Minimum critical loads η_{qcr} for columns subjected to the uniformly distributed tangential follower load

Boundary condition	Proposed method	F. D. M. ¹³⁾			Galerkin's method
		k=10	k=50	k=100	
Case I	40.17**	39.53	40.03	40.05	40.7 ¹⁰⁾
Case II	58.83*	54.96	56.92	56.99	57.95 ¹⁰⁾
Case III	19.14*	18.78	18.95	18.95	18.96 ¹⁰⁾
Case VI	83.71*	76.34	80.09	80.22	81.37 ¹¹⁾

* divergence, ** flutter.

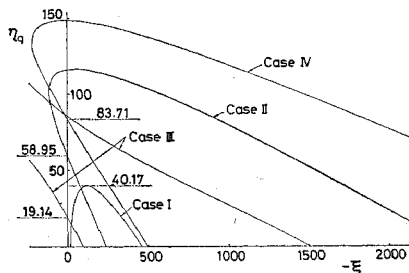


Fig. 11 Eigenvalue curves of columns subjected to the uniformly distributed tangential follower force.

の $\eta_q - R_0 \bar{\epsilon}$ 平面への射影図を Fig. 14 に示す. Fig. 12 の一次の固有値曲線の $\eta_q - R_0 \bar{\epsilon}$ 平面への射影図も Fig. 14 と同じ形状を表わすので, ここでは図示しないが, 図より明らかなようにダイバージェンス形不安定を起こし臨界荷重は減衰の影響を受けず, 静的解析法により求められることがわかる.

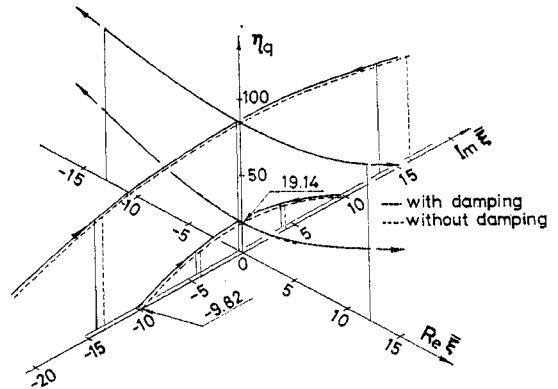


Fig. 12 Eigenvalue curves of a column simply supported at both ends with damping, where each element of the diagonalized damping matrix are equal ($h=0.05$).

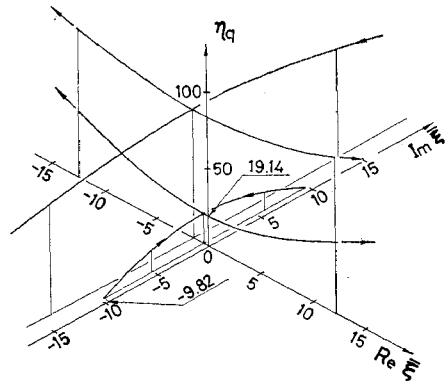


Fig. 13 Eigenvalue curves of a column simply supported at both ends with damping, where elements of the diagonalized damping matrix are different from each other ($h=0.05$).

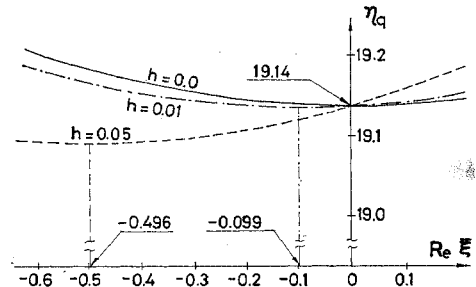


Fig. 14 Orthographic projections of eigenvalue curves of 1st mode for a column simply supported at both ends.

減衰を考慮した上記の結果により、Leipholzの解説²⁹⁾、すなわち、有効剛性マトリックスに相当するマトリックスがわずかに非対称（非対称性が弱いマトリックスとは無次元荷重の変動にかかわらず、固有値は実数をとるかあるいは、無次元荷重の増加にともない固有値は固有値平面において初め実軸上を移動するが、原点を通過後に複素数をとるマトリックス）で、減衰マトリックスは対角化され、すべての要素が正で相等しい場合は静的判定法により 臨界荷重は求められる。一方、有効剛性マトリックスに相当するマトリックスの非対称性が強く（非対称性の強いマトリックスとは、無次元荷重の増加に伴い固有値は固有値平面の実軸上を移動し、原点を通過する前に複素数を取るマトリックス）、減衰マトリックスは対角化され、そのすべての要素が正で、相等しい場合および相異なる場合はいずれも動的判定法により臨界荷重を求めねばならない。特に、対角要素が相異なる場合はわずかの減衰により臨界荷重は急激に低下する。ことを確認することができた。

(2) トルクを受ける柱

Table 3 に示す断面をもつ、柱長 60 cm の一端固定他端自由の四種類の柱に從動トルクが作用する場合 (Fig. 1 (b)) を対象とする。解析にあたり柱を 10 等分割し集中質量系に置換する。

Table 3 Minimum critical torque

Cross sections (cm × cm)	M_c (kg·cm)
0.5 × 0.5	0.1
0.5 × 0.51	4.100
0.5 × 0.55	23.06
0.5 × 0.6	52.41

最小臨界トルクを Table 3 に、從動トルク作用時の固有値曲線を Fig. 15 に示す。

Bolotin は文献 4) において、Fig. 1 (b) の柱について柱断面の両主軸に関する曲げ剛性が等しい場合、ゼロに等しくない小さいトルクにより不安定になることを示している。これは上記 0.5 × 0.5 cm の結果に相当する。

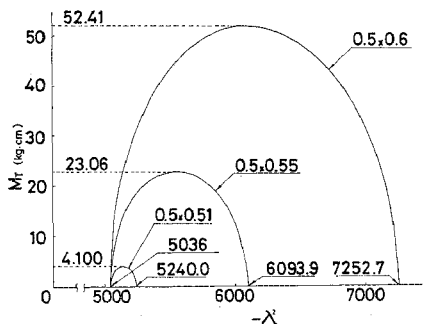


Fig. 15 Eigenvalue curves of columns subjected to the torques.

(3) 從動荷重を受けるアーチ

Fig. 16 に示す共通の軸線形をもち、Fig. 17 に示す 2 種類のアルミニウム製の円弧アーチを対象とする。解析にあたり、アーチを円周方向に、面内変形アーチでは 20 等分割し、面外変形アーチでは 10 等分割して各節点に質量を集中させた。

a) 面内変形アーチ

Fig. 17 (a) に示す断面をもつ両端ヒンジおよび両端固定アーチに、Fig. 16 に示すようなアーチ軸に垂直な從動荷重が作用する場合の一次の固有曲線を Fig. 18 に示す。比較のため荷重作用方向の変化しない中心方向荷重作用時の固有値曲線も図示するとともに、既往の研究結果^{30), 31)}より求めた臨界値も示してある。いずれの場合も、ダイバージェンス形の不安定を起こすことが、また一定方向荷重作用時の方が安定であることがわかる。

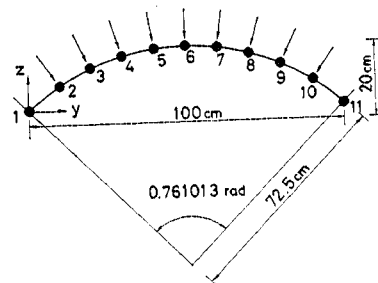


Fig. 16 Arch subjected to the normal follower forces.

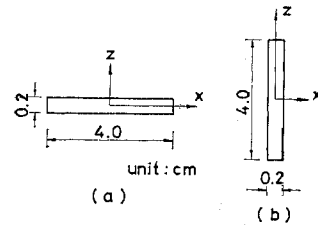


Fig. 17 Cross sections of arches.

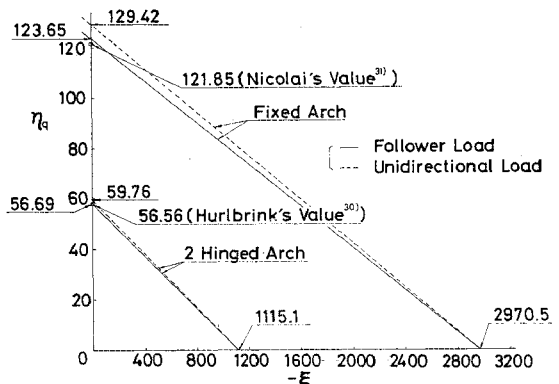


Fig. 18 Eigenvalue curves of circular arches deforming in its plane.

b) 面外変形アーチ

Fig. 17(b) に示す断面をもち、両端で $u=v=w=0$ 、材軸まわりのねじり角がゼロ、かつ、半径方向軸まわりの曲げモーメントがゼロであるアーチに、アーチ変形前は中心方向であるが、アーチの変形にしたがって、荷重作用点の回転変位に等しいだけ作用方向を変える従動荷重が作用する場合の一次と二次の固有値曲線を Fig. 19 に示す。図には比較のため、作用方向を変えない一定方向荷重が作用するときの固有値曲線を表わすとともに、既往の研究結果より求めた臨界値も示してある。

図より明らかなように、ダイバージェンス形不安定を起し、この場合、従動荷重作用時の方が安定であることがわかる。しかし、ここに示したアーチの結果は特定のアーチの特定の荷重状態に対する挙動であることに注意しなければならない。たとえば、鉛直下向きの従動荷重を受けるライズの高い、たとえば、Fig. 17(b) の断面をもちライズが 60 cm、スパン長が 100 cm の両端固定の放物線アーチでは固有値曲線（アーチをスパン方向に 10 等分割して解析し、節点に作用する集中荷重をスパン方向に等分布な荷重 q に換算して表わしている）は Fig. 20 となり、一次モードと三次モードの接近によるフラッタ形不安定が起こる。

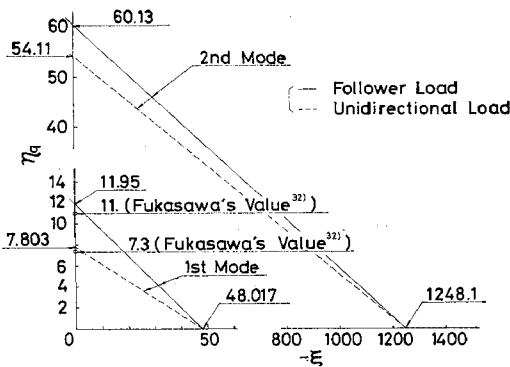


Fig. 19 Eigenvalue curves of a circular arch deforming out of its plane.

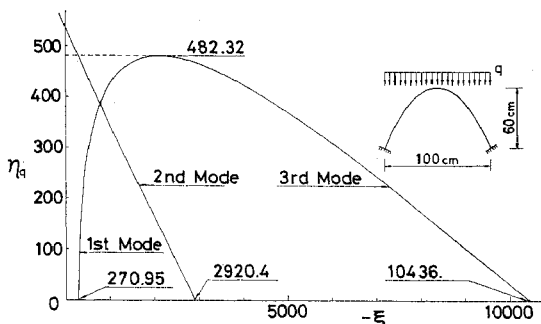


Fig. 20 Eigenvalue curves of a parabolic arch deforming out of its plane.

5. 結 び

変形法を用いた骨組構造解析法の一つとして、運動方程式の変分式に基づく動的解析法により、循環力が作用する骨組構造物の非保存的弾性安定解析法を示した。

適用例で示したように、本解析の結果は棒の力学を用いた既往の解析結果と比較的よく一致した。本解析では一部材の剛性マトリックスには Saint Venant のねじり理論を用いたり、曲げモーメントに対する軸力の影響を無視するなどして極く簡単なものを用いている。また、構造の幾何学的非線形を考慮するにあたっては、線形項のみを用いる単純な取り扱い方をしている。これらを改良することにより、より精度のよい結果が得られるだろう。

粘性減衰を考慮した場合には、既往の研究結果、すなわち、ダイバージェンス形不安定を起す系には減衰の影響はなく、静的解析法（平衡法）により臨界荷重を算定することができること、また、フラッタ形不安定を起す系は減衰の影響を受け、動的解析法によって臨界荷重を算定すべきであることが確認された。

与えられた構造系がダイバージェンス形不安定を起すのか、あるいは、フラッタ形不安定を起すのかは動的解析法により固有値曲線の挙動を調べて初めて明らかになる。このことより、本研究の方法によれば、保存力を受ける場合はもちろん、非保存力、特に従動力を受ける場合の任意の骨組構造物の安定解析が可能であるといえる。

本研究における数値計算は、九州大学大型計算機センターの FACOM 230-75 および山口大学電子計算機室の FACOM 230-28 を用いた。

謝 辞：本研究を行うにあたり、非保存的弾性安定問題について、鳥取大学工学部 杉山吉彦助教授より数多くの貴重な助言を賜った。ここに記し謝意を表します。

記 号

- d_0 : 静荷重による構造物の変位ベクトル
- d_i : 節点 i の変位ベクトル
- d_{0i}, \bar{d}_i : 静荷重作用時および微小振幅振動時の節点 i の変位ベクトル
- D : 減衰マトリックス
- EI : 柱およびアーチの断面の弱軸に関する曲げ剛性
- f_i : 節点 i の座標ベクトル
- h : 減衰定数
- i, j : 注目の節点とそれに隣接した節点の番号

$I_m \bar{\xi}$: 無次元固有値 $\bar{\xi}$ の虚部
 K_1 : 構造物の剛性マトリックス
 K_0 : 基準荷重 \bar{P}_0 作用時の初期応力マトリックス
 K_i : 荷重の従動に伴う構造物の剛性変化を表わすマトリックス
 l : 柱長あるいはアーチの軸線長
 m : 構造物の節点総数
 n : 拘束条件を考慮したときのマトリックスの次数
 M_T : 柱に作用する軸トルク
 N_{ij}' : 局部座標系で表わした部材 ij の i 端の材端力ベクトル
 N_{0ij}' , \bar{N}_{ij}' : 静荷重作用時および微小振幅振動時の局部座標系で表わした部材 ij の i 端の材端力ベクトル
 \hat{N}_{0ij}' : 基準荷重 \bar{P}_{0i} ($i=1, 2, \dots, m$) 作用時の局部座標系で表わした部材 ij の i 端の材端力ベクトル
 P_0 : 構造物に作用する荷重ベクトル
 P_{0i} , \bar{P}_{0i} : 節点 i に作用する実荷重および基準荷重ベクトル
 P_0 : 基準荷重に対する実荷重の比率
 P : 柱の自由端およびアーチの節点に作用する集中荷重
 q : 柱およびアーチに作用する等分布荷重
 $R_0 \bar{\xi}$: 無次元固有値 $\bar{\xi}$ の実部
 t : 時刻
 T_{ij} : 座標変換マトリックス
 U_{0i} , V_{0i} , W_{0i} : 節点 i に作用する x, y および z 軸まわりのモーメント実荷重
 \hat{U}_{0i} , \hat{V}_{0i} , \hat{W}_{0i} : 節点 i に作用する上記軸まわりのモーメント基準荷重
 W : 構造物の質量マトリックス
 W_i : 節点 i の質量マトリックス
 X_{0i} , Y_{0i} , Z_{0i} : 節点 i に作用する x, y および z 軸方向の実荷重
 \hat{X}_{0i} , \hat{Y}_{0i} , \hat{Z}_{0i} : 節点 i に作用する上記軸方向の基準荷重
 x_i, y_i, z_i : 節点 i の座標
 α_{ij} : 部材 ij の i 端の断面主軸の回転角
 $\Delta \bar{d}_i, \Delta f_i, \Delta \alpha_{ij}$: 外乱による \bar{d}_i, f_i および α_{ij} の変量
 $\Delta \bar{\theta}_{xi}, \Delta \bar{\theta}_{yi}, \Delta \bar{\theta}_{zi}$: 外乱による振動回転変位の変量
 ϵ_i : 荷重の従動度を表わすパラメーター
 η_p : 無次元荷重 $= Pl^2/EI$
 η_q : 無次元荷重 $= ql^3/EI$
 $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$: 節点 i の x, y および z 軸まわりの回転変位

$\bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}$: 微小振幅振動時の節点 i の上記軸まわりの回転変位
 λ : 特性指数
 μ : 柱およびアーチの単位長さ当りの質量
 ξ : 無次元固有値 $= \lambda^2 l^4 \mu / EI$
 $\bar{\xi}$: 無次元固有値 $= \lambda l^2 \sqrt{\mu / EI}$
 ϕ_i : 第 i 次の正規化された固有ベクトル
 $[\phi]$: モーダルマトリックス
 ω_i : 第 i 次の固有円振動数

参 考 文 献

- 1) 川井忠彦 : 座屈問題解析 ; コンピュータによる 構造工学講座 II-6-B, 培風館, 1974, p. 38.
- 2) 杉山吉彦・関谷 壮 : 非保存的弾性系の 安定問題, 日本機械学会誌, Vol. 73, No. 620, pp. 1238-1245, 1970.7.
- 3) 杉山吉彦・関谷 壮 : 非保存力を受ける弾性系の 不安定に関する実験的研究の 現状と問題点, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 19, No. 205, pp. 61-68, 1971.2.
- 4) Bolotin, V.V. : Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, N.Y., pp. 53-55, 1963.
- 5) Pflüger, A. : Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Springer-Verlag, Berlin, pp. 44-45, 1975.
- 6) Ziegler, H. : Principles of Structural Stability, Blaisdel Publishing Co., Massachusetts, 1968 (日本語版, 砂川 恵訳, 構造安定の原理, 培風館, 昭和 48 年 12 月).
- 7) 前掲文献 4).
- 8) Leipholz, H. : Stabilitätstheorie, P.G. Teubner, Stuttgart, 1968(英語版, Stability Theory, Academic Press, N.Y., 1970).
- 9) Beck, M. : Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 3, pp. 225-228, 1952.
- 10) Leipholz, H. : Anwendung des Galerkinschen Verfahrens auf nichtkonservative Stabilitätsprobleme des elastischen Stabes, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 13, No. 4, pp. 359-372, 1962.
- 11) Hauger, W. : Die Knicklasten elastischen Stäbe unter gleichmäßig verteilten und linear veränderlichen, tangential Drückkräften, Ingenieur-Archiv, Vol. 35, pp. 221-229, 1966.
- 12) Leipholz, H. : Die Knicklast des einseitig eingespannten Stabes mit gleichmäßig verteilter, tangential Längesbelastung, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 13, No. 6, pp. 581-589, 1962.
- 13) 杉山吉彦・片山忠一・関谷 壮 : 差分法による 柱の非保存的安定問題の研究, 日本機械学会論文集, 37 卷, 295 号, pp. 455-461, 1971.
- 14) Sugiyama, Y. and Kawagoe, H. : Vibration and Stability of Elastic Columns under the Combined Action of Uniformly Distributed Vertical and Tangential Forces, Journal of Sound and Vibration, Vol. 38, No. 3, pp. 341-355, 1975.
- 15) 杉山吉彦・藤原直史・関谷 壮 : アナログ 計算機による 柱の非保存的安定問題の研究, 日本機械学会論文集, 37 卷, 297 号, pp. 931-940, 1971.
- 16) Ziegler, H. : Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ingenieur-Archiv, Vol. 20, pp. 49-56, 1952.
- 17) Herrmann, G. and Bungay, R.W. : On the Stability of Elastic System Subjected to Nonconservative

- Forces, Transaction of American Society of Mechanical Engineers, Series E, Journal of Applied Mechanics, Vol. 31, pp. 435-440, 1964.
- 18) Herrmann, G. and Jong, I.-C. : On the Destabilizing Effect of Damping in Nonconservative Elastic Systems, Transaction of American Society of Mechanical Engineers, Series E, Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 592-597, 1965.
- 19) Herrmann, G. and Jong, I.-C. : On Nonconservative Stability Problems of Elastic Systems with Slight Damping, Transaction of American Society of Mechanical Engineers, Series E, Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 125-133, 1966.
- 20) Sugiyama, Y., Maeda, S. and Kawagoe, H. : Destabilizing Effect of Elastic Constraint on the Stability of Nonconservative Elastic Systems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 22, pp. 33-45, 1972.
- 21) Barsoum, R.S. : Finite Element Method Applied to the Problem of Stability of a Nonconservative System, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 3, pp. 63-87, 1971.
- 22) Kikuchi, F. : A Finite Element Method for Non-self-adjoint Problems, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 6, pp. 39-54, 1973.
- 23) Leipholz, H. : Über den Einfluß der Dämpfung bei nichtkonservativen Stabilitätsproblemen elastischer Stäbe, Ingenieur-Archiv, Vol. 33, pp. 308-321, 1964.
- 24) 前掲文献 4), pp. 43-46.
- 25) Bolotin, V.V. : The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day Inc., San-Francisco, p. 257, 1964.
- 26) 前掲文献 8) の英語版, p. 13, pp. 19-59.
- 27) 會田忠義・波木健一 : 骨組構造物の非保存的弾性安定解析, 山口大学工学部研究報告, 26 卷, 2 号. pp. 35-41, 1976.
- 28) 會田忠義・波木健一 : 非保存力を受ける骨組構造物の弾性安定性に及ぼす減衰の影響について, 山口大学工学部研究報告, 27 卷, 1 号. pp. 81-87, 1976.
- 29) 會田忠義・佐伯博三・窪田 彰 : 周期性荷重を受ける骨組構造物の弾性安定解析, 土木学会論文報告集, 249 号, pp. 29-39, 1976.
- 30) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, N.Y., p. 297, 1961.
- 31) 前掲文献 30), pp. 299-300.
- 32) 深沢泰晴 : 軸圧縮力を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈に関する研究, 土木学会論文報告集, 96 号. pp. 29-47, 1963.

(1976.8.4・受付)