

有限要素法による非定常浸透流解析に関する一考察

A STUDY ON THE FINITE ELEMENT SOLUTION OF TRANSIENT
SEEPAGE UNDER DRAWDOWN

山 上 拓 男*

By Takuo YAMAGAMI

1. ま え が き

近年各所で築造・計画されている揚水発電を目的としたロックフィルダムの特徴的な面として比較的短時間に貯水池水位の降下することが挙げられる。この貯水池水位の降下速度は一般に時間当り数メートルのオーダーであるが、これに比べ堤体内の排水は時間遅れを伴うため残留間隙水圧が発生し、安定上好ましくない事態を招くことは周知の通りである。そして貯水池水位降下速度および降下量そのものがある限界値に達したとき上流側法面近傍にスベリ破壊が生ずるといわれている¹⁾。

慣用的にはスベリ円法で処理されているこの種のダムの安定解析も、有限要素法 (FEM) の飛躍的な発展と相まって、非定常浸透流の影響を加味したアプローチが試みられるようになってきた。すなわち、外水位の低下に伴う堤体内の非定常自由水面変動に起因した外力変化を合理的に評価し、これを構成材料の応力-変形特性と結びつけた解析がなされる機運にあり^{2), 3)}、その必要性も指摘されている⁴⁾。したがって、この種の検討をより有効ならしめるためには、土質定数の決定はもとより、非定常自由水面の時間的変化に関する検討が重要な位置を占めることになろう。

貯水池水位降下時の非定常自由水面は、境界条件の複雑さはもとより、流速が鉛直面内で 2 方向成分を有するため解析的に解くことは極めて困難である。このため実験事実に基づいた準解析的手段が二、三考えられており^{5)~8)}、簡便に解を与える利点はあるとしても、実際的な場への適用範囲は相当に限定されたものである。したがって事実上有効な解法は結局 Hele-Shaw モデルや電気相似法などの模型実験、ないしは有限要素法、差分法による数値解析といったところである。

以下に、本研究で対象とする鉛直面内の非定常自由水

面流れ (飽和流れ) を取り扱った既往の FEM 解析を概観しよう。

まず、Neuman・Witherspoon⁹⁾ は彼ら自身の提案による“一般化された変分原理”^{10), 11)} に基づいて非定常問題を定式化し、得られた結果の時間積分に、前進差分と後退差分の平均を用いるいわゆる time centered scheme を採用することで高精度かつ極めて安定な解の得られることを主張している。また、自由水面決定にはすでに定常解析¹²⁾ で展開した two-step iterative procedure を用いて、各 time step ごとに収束解が求まるまで修正計算を繰り返す方法をとっている。この Neuman らの変分原理は Fang・Wang and Harrison¹³⁾ により潮せきの影響を受ける海岸地下水流れの解析に応用され、また、Huyakorn¹⁴⁾ により two-step iterative procedure も含めて井戸周辺の Darcy 流れ、非 Darcy 流れの共存場の解析に用いられた。さらに赤井・大西・西垣¹⁵⁾ もこの手法を適用して堅井、横井の揚水に伴う非定常流れを解析している。

これら一連の研究とは別に、France・Parekh・Peters and Taylor¹⁶⁾ および Desai¹⁷⁾ は、自由水面流れにおいては透水層の圧縮性に起因した非定常性は無視できるとし、単に外的境界条件の変動のもとに定常解析の繰り返しで非定常自由水面を追跡できるとして isoparametric element を用いた解析法を展開した。そして時々刻々の自由水面の変動は Herbert・Rushton¹⁸⁾ による自由面上の水分子の真の流速に着目した解法を応用している。この方法を適用したのとして駒田・金沢³⁾ の研究があり、また、Cheung・Skjolingstad¹⁹⁾ の報告も本質的にはこの範ちゅうに入るものである。また、France²⁰⁾ は文献 16) の手法を三次元場に拡張し、Galerkin 法に基づいて cubic isoparametric element を用いた解法を示した。これは原理的には文献 16) となんら異なるものではないが、一般の三次元問題を処理するために自由水面の shift に関して多少の工夫を要する。

* 正会員 工修 徳島大学講師 工学部建設工学科

Ta-shun Cheng・Chih-yen Li²¹⁾ は領域内部のポテンシャル分布に関しては Desai らと同様定常流れの基礎微分方程式を採用し、これと等価な汎関数の極小化による通常の FEM 解析 (三角形要素) を用いた。そして自由水面の決定はこの上で非定常性を考慮した動的境界条件 (kinematic boundary condition) として導出される非線形偏微分方程式²²⁾ を準線形化 (quasi-linearization) し、差分近似で解くことを示した。

McCorquodale²³⁾ および McCorquodale・Nasser²⁴⁾ は三角形要素内の未知関数の変化を巧妙に時間および空間座標で線形表示したのち、非線形運動方程式と連続式より導かれる非線形微分方程式に等価な汎関数に代入し、未知関数に関してこの汎関数を極小化することで非定常非 Darcy 流れの定式化に成功している。そして適用例として模型ロックフィルダム内の自由水面降下²³⁾ および波動伝播 (wave transmission)²⁴⁾ を解析し、実験値と比較しているが、ここにおいても自由水面の変動は水分子の真の流速に基づく方法を用いている。ただし、問題が非線形であるため各 time step 後の自由水面位置を精度よく定めるためには反復計算が必要である。

飯田・朝倉²⁵⁾ は Zienkiewicz に端を発した汎関数法があまりにも数学的な方法であるため、その物理的意味が明確でなく、また、非定常自由水面問題への拡張が困難であるとして本来の変分原理に立ち返り、Darcy 流れ、非 Darcy 流れについてそれぞれ変分方程式を導いた。すなわち、運動方程式を満足し、連続式および自由水面の条件を満足しない変分をとり、Hamilton の原理を導く際に用いられると同様な手法によって変分方程式を得た。そして変分方程式に表われる個々の項目についてそれが非定常性に寄与する割合を考察したうえで、喜撰山ロックフィルダムを例にとって非定常流れの解析例を示した。

非定常問題に FEM を応用する場合、まず、変分原理を用いてその問題を定式化し、しかるのち、時間に関する差分がなされるのが普通であるが、Verruijt²⁶⁾ は、逆に、変分原理を導入する以前に時間微分を近似化の方がより好都合であるとしてその定式化を示した。河野^{27), 28)} はこの手法を一般の自由水面問題に拡張している。そこでは特に浸出点を決定するための簡便法 (筆者はこれを二等分法と呼んでいる) が提案され、二、三の適用例が示された。一般に自由水面問題では時々刻々の自由水面位置、とりわけ浸出点の位置を定めることに問題点が集約されていると言っても過言ではないが、この難点を簡便に回避したところに河野の研究の最大の特徴がある。

以上の研究はいずれも二次元ないし三次元流れを対象としたものであるが、そのほかに一次元流れを扱ったも

の²⁹⁾や、非線形 Boussinesq 式を直接解いたもの³⁰⁾などがみられる。このように非定常自由水面問題への FEM の応用は実に多くを数えるに至っているが、本質的な面つまり自由水面をどのように決定するかといった面でみれば二通りに大別することができよう。すなわち、なんらかの形で自由水面上の流速ないしは動水勾配に着目したものと、Neuman・Witherspoon に代表される two-step iterative procedure によるものである。

本研究も前者の立場から、主として France や Desai らの解法にのっとり、そこに内在する問題点を指摘しつつ 1 つの改良策を提案するものである。とくに現行の有限要素を用いる限り、浸出点における動水勾配に特異な性質のあることを明らかにし、この点に焦点をしばって議論を展開している。

2. 自由水面決定法

ここで採用した自由水面追跡法は France, 他および Desai らの手法に準拠し、これに若干の改良を加えたものである。

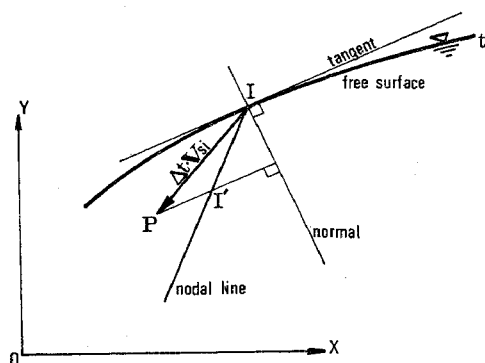
すなわち、図一1において、time step Δt 間の自由水面の変動およびこれに伴う内部節点の修正は、あらかじめ規定された直線 (nodal line) に沿って行われるものとし、任意時刻 t の自由水面上の任意節点 I に注目する。

いま、 I 点の Darcy 流速としての合速度を V_{di} 、有効空隙率を β とすれば、土粒子間隙を流れる水分子の真の流速 V_{si} は次式で与えられる。

$$V_{si} = V_{di} / \beta \quad \dots\dots\dots (1)$$

この V_{si} に time step Δt を乗じたベクトル $\Delta t \cdot V_{si}$ の先端 P から、 I 点における自由水面への接線に平行な線分を引き、これが nodal line と交わる点 I' を求め、時刻 $t + \Delta t$ での新たな自由水面上の節点とする。

他の nodal line についても同様な手順で新たな節点を定め、これらを滑らかな曲線で連ねたものが時刻 $t +$



図一1 Nodal Line に沿う自由水面の移動

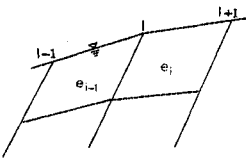


図-2 自由水面近傍の要素分割の模式図

Δt の自由水面を表わす(浸出点の決定は後述)。

以上の過程で有限要素の type は linear isoparametric element を使い、節点 I の流速は、図-2 に示すようにこの点に会合する2つの要素 e_{i-1}, e_i の節点 I の値の

平均値を用いた。

さて、上述の自由水面への接線の決定には十分な注意が必要であろう。たとえば、図-2 で、 I 点における自由水面への接線として、単純に直線 $(I)-(I-1)$ および $(I)-(I+1)$ を平均することは、特に自由水面形の曲率の大なる箇所で精度上好ましくないと考えられる。この点に関して、France らは自由水面形を最小自乗法に基づく多項式近似で表示しているが、ここでは cubic spline function^{31), 32)} の導入を試みた。

$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_2 & & & & \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_2 + \Delta x_3) & \Delta x_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & \Delta x_i & 2(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) & \Delta x_{i+1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & \Delta x_n & 2(\Delta x_n + \Delta x_{n+1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ \vdots \\ y_i'' \\ \vdots \\ y_n'' \end{Bmatrix} = 6 \begin{Bmatrix} \Delta y_2/\Delta x_2 - \Delta y_1/\Delta x_1 \\ \Delta y_3/\Delta x_3 - \Delta y_2/\Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta y_{i+1}/\Delta x_{i+1} - \Delta y_i/\Delta x_i \\ \vdots \\ \Delta y_{n+1}/\Delta x_{n+1} - \Delta y_n/\Delta x_n \end{Bmatrix} \quad (2)$$

この結果、節点 i においてその左右から求めた接線の勾配は、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} y_i'(L) &= 4y_i/\Delta x_i + 4x_i(y_{i-1}'' + 2y_i'')/6 \\ y_i'(R) &= 4y_{i+1}/\Delta x_{i+1} - 4x_{i+1}(2y_i'' + y_{i+1}'')/6 \end{aligned} \right\} (y_i'(L) = y_i'(R)) \quad (3)$$

したがって先の I 点は、式 (3) のいずれかに基づいて I 点の自由水面への接線の傾き m_I を定めたのち、 P 点を通り傾き m_I の直線と nodal line との交点として定義され、非常に簡潔なものとなる。なお、自由水面形状がより変化に富む場合には、さらに適合性の高い curve fitting 法を採用することも可能である³³⁾。

3. 浸出点における動水勾配の特異性

前節の議論を浸出点にまで拡張すれば、一応自由表面上のすべての点を決定することができ問題は解決されたことになる。筆者はかつてこの方法に基づいてプログラムを開発し、そのチェックを目的として France らと同様 Szabo・McCaig³⁴⁾ が行った実験(後述解析例1参照)に対して種々の time step を用いて解析を試みたことがある。しかしながら、time step をどのように小さく設定してもある程度の時間経過後、浸出点の低下が他の自由表面上の節点に比べ著しく大となり実験値とはかけ

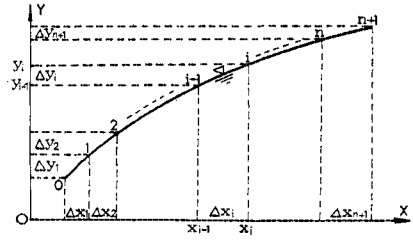


図-3 Cubic Spline Function の自由水面表示への応用

cubic spline function は与えられた節点を通り1次および2次の導関数が連続するように節点間を3次の曲線で近似したものである。

いま、図-3 に示すように自由表面上の節点が $0, 1, 2, \dots, i, \dots, n, n+1$ の合計 $(n+2)$ 個の点で構成されているものとし、両端の2次の導関数を $y_0'' = y_{n+1}'' = 0$ と仮定すれば、節点 $1 \sim n$ の2次の導関数は次の連立方程式を解くことによって求められる。

離れた結果が得られていた。さらに、浸出点の低下速度が経過時間とは無関係にほぼ一定であることもその解析結果から読みとることができた。この原因は、結論から先にいえば、浸出点を含む要素が単一の要素からなり、しかもその要素の一边が完全に浸出面上に位置する場合に本解析法に備わった固有の特性であって、上記の事柄はいわば当然の結果としてでてきたものである。

以下これについて、議論をより一般化するため、三次要素(cubic element)に基づいて話を進めよう。

図-4(a) は任意時刻 t における流れ場の三次要素による要素分割を示す模式図である。図において浸出点を含む要素 e (以下この要素を浸出点要素と呼ぶ) の各節点の位置付け、局所座標系 (ξ, η) 、および全体座標系 (x, y) を図-4(b) のように設定する。

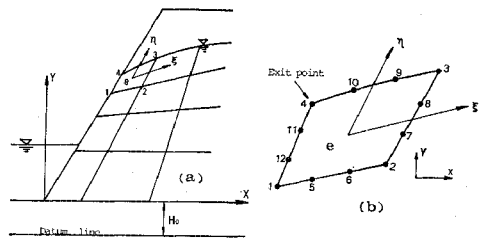


図-4 Cubic Isoparametric Element による要素分割の模式図

さて、三要素の場合、未知変数(ここでは全水頭 H) の変化は要素内において次式で表わされる。

$$H = \sum_{i=1}^{12} N_i H_i \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $H_i (i=1\sim 12)$ は各節点の全水頭、 N_i は形状関数であり、次のように定義されている。

四隅の節点に対して

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \{-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)\} \dots\dots\dots (5)$$

辺上の節点で $\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm \frac{1}{3}$ のところで

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi_0)(1 - \eta^2) (1 + 9 \eta_0) \dots\dots\dots (6)$$

辺上の節点で $\xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1$ のところで

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + 9 \xi_0)(1 - \xi^2) (1 + \eta_0) \dots\dots\dots (7)$$

ただし、

$$\xi_0 = \xi_i \cdot \xi_i, \eta_0 = \eta_i \cdot \eta_i \dots\dots\dots (8)$$

であって、上式(8)の ξ_i, η_i は i 点の ξ, η 座標値であることを意味する。

さらに、要素内で全体座標系 (x, y) の変化が、上と同じ形状関数および各節点の座標値 (x_i, y_i) を用いて、次のように規定される。

$$x = \sum_{i=1}^{12} N_i x_i, y = \sum_{i=1}^{12} N_i y_i \dots\dots\dots (9)$$

また、要素内の動水勾配は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \partial H / \partial x \\ \partial H / \partial y \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial H / \partial \xi \\ \partial H / \partial \eta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $[J]^{-1}$ は Jacobian matrix $[J]$ の逆マトリックスであり、次のように定められる。

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

以上により、式(10)に式(4)~(9)を用いて若干の演算を施せば、12節点の水頭値により要素内の動水勾配が次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} [B] \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_{12} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、マトリックス $[B]$ は (2×12) 次のマトリックスで、それらの成分はいずれも (ξ, η) の関数となる。

ここで式(12)を展開すれば、動水勾配を与える一般式として、次式(13)、(14)が得られる。

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{i=1}^{12} a_i H_i \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{i=1}^{12} b_i H_i \dots\dots\dots (14)$$

式(13)において、係数 a_i は各節点の y 座標値および (ξ, η) で、また、式(14)の b_i は各節点の x 座標値および (ξ, η) で構成されている。したがって、たとえば図-4(a)の浸出点(図-4(b)の節点4)の動水勾配を求めるためには、この点の局所座標値、すなわち $\xi = -1, \eta = 1$ を上式(13)、(14)に代入するとよい。浸出点に関してこれを実行すると各係数は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (y_3 - 11 y_4 / 2 - 9 y_9 / 2 + 9 y_{10}) / 4 \\ a_3 &= (-y_1 + 11 y_4 / 2 - 9 y_{11} + 9 y_{12} / 2) / 4 \\ a_4 &= (11 y_1 - 11 y_3 + 99 y_9 / 2 - 99 y_{10} + 99 y_{11} \\ &\quad - 99 y_{12} / 2) / 8 \\ a_9 &= (9 y_1 - 99 y_4 / 2 + 81 y_{11} - 81 y_{12} / 2) / 8 \\ a_{10} &= (-9 y_1 + 99 y_4 / 2 - 81 y_{11} + 81 y_{12} / 2) / 4 \\ a_{11} &= (9 y_3 - 99 y_4 / 2 - 81 y_9 / 2 + 81 y_{10}) / 4 \\ a_{12} &= (-9 y_3 + 99 y_4 / 2 + 81 y_9 / 2 - 81 y_{10}) / 8 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

上式以外の a_i はすべて零となる。同様に b_i に関しても

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= (-x_3 + 11 x_4 / 2 + 9 x_9 / 2 - 9 x_{10}) / 4 \\ b_3 &= (x_1 - 11 x_4 / 2 + 9 x_{11} - 9 x_{12} / 2) / 4 \\ b_4 &= (-11 x_1 + 11 x_3 - 99 x_9 / 2 + 99 x_{10} - 99 x_{11} \\ &\quad + 99 x_{12} / 2) / 8 \\ b_9 &= (-9 x_1 + 99 x_4 / 2 - 81 x_{11} + 81 x_{12} / 2) / 8 \\ b_{10} &= (9 x_1 - 99 x_4 / 2 + 81 x_{11} - 81 x_{12} / 2) / 4 \\ b_{11} &= (-9 x_3 + 99 x_4 / 2 + 81 x_9 / 2 - 81 x_{10}) / 4 \\ b_{12} &= (9 x_3 - 99 x_4 / 2 - 81 x_9 / 2 + 81 x_{10}) / 8 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

他の b_i はすべて零である。また、分母の $\det[J]$ も12節点の (x, y) 座標値および (ξ, η) で構成されており、浸出点では次式となる。

$$\det[J] = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= x_3 / 2 - 11 x_4 / 4 - 9 x_9 / 4 + 9 x_{10} / 2 \\ a_{12} &= y_3 / 2 - 11 y_4 / 4 - 9 y_9 / 4 + 9 y_{10} / 2 \\ a_{21} &= -x_1 / 2 + 11 x_4 / 4 - 9 x_{11} / 2 + 9 x_{12} / 4 \\ a_{22} &= -y_1 / 2 + 11 y_4 / 4 - 9 y_{11} / 2 + 9 y_{12} / 4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)'$$

一方図-4(a)に示すように、水頭に関する基準面を x 軸より H_0 だけ下方に設定すれば、浸出点要素 e の12節点のうち、節点1, 3, 4, 9, 10, 11, 12は浸出面および自由水面上に位置することから、次の関係が成り立つことになる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= y_1 + H_0, H_3 = y_3 + H_0, H_4 = y_4 + H_0 \\ H_9 &= y_9 + H_0, H_{10} = y_{10} + H_0, H_{11} = y_{11} + H_0 \\ H_{12} &= y_{12} + H_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

以上式 (15)~(18) を式 (13), (14) に代入すると, 結論として次式で表わされるような特異な性質のあることが確かめられる.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 1 \quad \dots\dots\dots(19)$$

式 (19) に至る過程をここでは三次要素に基づいて論じたが, この事実は一次要素 (linear element), 二次要素 (quadratic element) にかかわらず成り立つことを確かめている. さらに, 一般に広く用いられている通常の 3 節点三角形要素 (CST 要素) に関していえば, も

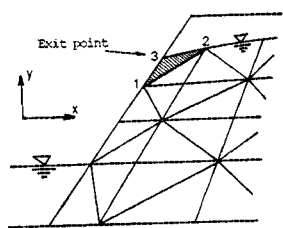


図-5 3 節点三角形要素による要素分割

し浸出点を含む要素が図-5 に示すように単一の要素から成り, しかも, その要素の一边が浸出面上にあるときは, 同様な性質のあることが認められる. すなわち, この場合, 要素内で動水勾配は, 図-5 を参照して

次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} \{ (y_2 - y_3)H_1 \\ &\quad + (y_3 - y_1)H_2 + (y_1 - y_2)H_3 \} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta} \{ (x_3 - x_2)H_1 \\ &\quad + (x_1 - x_3)H_2 + (x_2 - x_1)H_3 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

ここに, Δ は三角形要素の面積, H_1, H_2, H_3 は 3 節点の水頭値, x_1, y_1 などは 3 節点の座標値である.

式 (18) と同様ここでは

$$H_1 = y_1 + H_0, \quad H_2 = y_2 + H_0, \quad H_3 = y_3 + H_0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

が成立し, また, 三角形の面積に関して

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots(22)$$

であるから, 式 (21), (22) を式 (20) に代入すると, 式 (19) と同じ結果となることがわかる. ただし, isoparametric element の場合は異なり, 三角形要素では浸出点のみならず, その要素内のいたるところでこの関係が成り立つ.

式 (19) は, もちろんこの関係が成立する前提条件は必要であるがそれ以外には, 貯水池水位や自由水面形とは無関係に浸出点の流速が一定となることを意味する. ゆえに Szabo らの実験のごとく流出面が鉛直で外水位が瞬時的に降下する問題に対して, 前節の手法をそのまま用いて解析すれば浸出点の降下速度が経過時間にかかわらず一定となることもうなずけよう. さらに, 式 (19) で与えられる y 軸方向の動水勾配の値は, ある程度の

時間経過後は実際の現象に比べかなり大きな値であると考えられる. そしてこの現象は, 浸出点に単一の要素を用いる限り, 要素分割をどのように密にとっても避けることはできない. これらの事実が反映された結果, 前述の, 浸出点が他の自由水面上の節点に比べすみやかに降下し, また, その降下速度が一定であったのは不都合とはいえ当然の帰結である.

同じ問題に対する三次要素を用いた France らの解法も明らかにこの難点を含んでいるはずである. にもかかわらず, 彼らの解析結果 (後出, 図-14 参照) によればこの点がさほど顕著には現れていない. これは自由水面を最小自乗法に基づく多項式で近似しているため, 前節の所論にしたがって求めた節点の位置が平滑化されたためと思われる. しかしながら, 筆者は, 自由水面表示に最小自乗法を用いることが必ずしも得策であるとは考えられない. なぜなら, 前節に基づいて計算された節点の位置がたとえ厳密な位置にあったとしても, 最小自乗法を用いる段階でそれらが平均化され, 正しい位置から偏倚する可能性を残すからである. なお, 彼らのその後の文献²⁵⁾においても自由水面表示に苦慮していることの一端をうかがうことができよう.

一方, 浸出面が鉛直でない通常の場合は, 式 (19) に基づく浸出点の低下速度は必ずしも一定とはならない. しかしながら, この場合も簡単な考察により浸出点の低下が他の自由水面上の節点に比べ次第に大きくなるものと推察される. ところで, linear isoparametric element を用い, 浸出点要素が単一の要素より成る Desai の解析結果¹⁷⁾にも, 式 (19) の特性が現れていないようである. これは, 境界条件, 要素分割状況, および浸出点と水面位置との距離, すなわち浸出面の長さがかかなり短いことなどから推察して, 浸出点要素の流出面上の一边が, 完全には浸出面上に存在しないためと思われる. このときは, 式 (18) に相当する関係が成立せず, 結局, 式 (19) が成り立たなくなるのである.

さて, 式 (19) で表わされる難点を解消するためには, これが現れる条件すなわち, (i) 浸出点要素がただ 1 つの要素よりなっていること, (ii) 浸出点要素の一边が完全に浸出面上にあること, の 2 つのうちいずれか, もしくは両者を回避してやればよい. このうち (ii) を避けることは一般に困難であるため, ここでは浸出点要素を 2 つの要素で構成することを試みた. 以下本文の解析例はいずれもこの型の要素分割がとられている (図-13, 15 参照). なお, 三角形要素を用いた 飯田ら²⁵⁾, および 駒田ら³⁾ の解析も暗黙のうちに浸出点要素を複数個の三角形で形成しており, また, Cheung ら¹⁹⁾ もおそらくはこの方法をとっているはずである. このように浸出点に複数個の要素を用いれば, やはり式 (18) が成り立

たなくなり好都合である。そしてこの場合、浸出点に適合する要素の平均値を採用することで精度の向上することが期待される。

4. 流量に基づく浸出点の修正

元来 FEM による浸透流解析はポテンシャル分布について解かれるものであり、その一次微分としての動水勾配は要素間の連続性が保証されないなど厳密性に欠けるうらみがある。したがってこれに基づく自由水面決定には多少とも困難が伴い、特に動水勾配の大きな浸出点の決定には十分な注意が必要である。この意味で浸出点に複数の要素を用いることは、ひとつの精度改良につながるものであるが、これだけでは必ずしも十分なものとはいえない。ここでは系全体としての水収支を考慮した間接的な浸出点決定法を提案したい。

いま、図-6 において、 $\widehat{E_t C_t}$ 、 $\widehat{E_{t+\Delta t} C_{t+\Delta t}}$ をそれぞれ時刻 t および $t+\Delta t$ の自由水面とする。このとき連続の条件からこれら二自由水面間に存在していた水の量は、 Δt 時間にこの系 ($A E_t C_t B$) から流出した水量、もしくはこの系へ流入した見かけの水量に等しくなければならない。すなわち、解析の便宜上系への見かけの流入量を採用するとしてこれを単位時間当たり $4Q$ 、また、 $E_t C_t E_{t+\Delta t} C_{t+\Delta t}$ の面積を $4S$ とするとき、次式が成り立つはずである。

$$4Q \cdot \Delta t = 4S \cdot \beta \quad \dots\dots\dots (23)$$

さて、 $\widehat{E_{t+\Delta t} C_{t+\Delta t}}$ 上の節点のうち浸出点を除くものは前節までの所論に従って決定するとして、 $4S$ を図-7 に示すように2つの部分に分けて考える。

$$4S = 4S' + 4S'' \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$4S'$: 領域 $E_t C_t C_{t+\Delta t} D$ の面積。これは各節点間を直線近似して三角形の面積の和として求められる (既知量)。

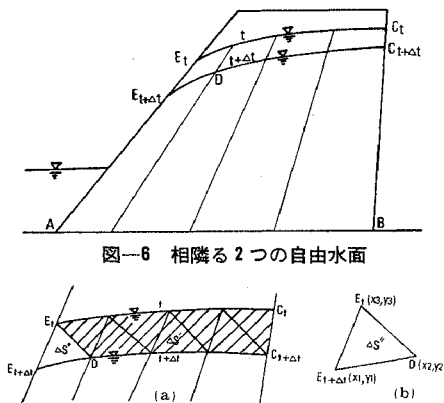


図-6 相隣る2つの自由水面

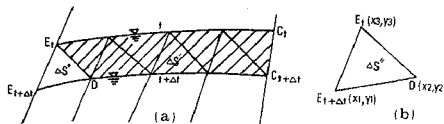


図-7 流量に基づく浸出点の決定

$4S''$: 三角形 $E_{t+\Delta t} D E_t$ の面積 (未知量)。

これより、式 (24) を式 (23) に代入して次式を得る。

$$4S'' = \frac{4Q \cdot \Delta t}{\beta} - 4S' \quad \dots\dots\dots (25)$$

よって $4Q$ が求めれば $4S''$ が決まる。

ところで、三角形 $E_{t+\Delta t} D E_t$ において (図-7 (b))、求めるべき浸出点 $E_{t+\Delta t}$ の座標を (x_1, y_1) 、また、他の節点 D, E_t の座標を $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ とし、流出面の形状を

$$y = A_0 x + B_0 \quad (\text{流出面が鉛直でない場合}) \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$x = \text{const.} \quad (\text{流出面が鉛直な場合}) \quad \dots\dots\dots (27)$$

と直線表示すれば、式 (22) を利用して次式が導かれる。

流出面が鉛直でない場合

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{2 \cdot 4S'' - x_2 y_3 + x_3 y_2 + B_0 (x_2 - x_3)}{y_2 - y_3 + A_0 (x_3 - x_2)} \\ y_1 &= A_0 x_1 + B_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

流出面が鉛直な場合

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_3 = \text{const.} \\ y_1 &= \frac{2 \cdot 4S''}{x_3 - x_2} + y_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

したがって、これらの式の $4S''$ に式 (25) を用いれば、各 time step ごとの新たな浸出点が決定できる。

残された問題は $4Q$ の評価であるが、これには浸透性行列の解法にブロック消去法 (対角化分割法) を用いるものとして以下のような手法によった。

いま、図-8 に示すように自由水面が最終分割 (分割総数 N) となるように分割線 (一点破線) を設定するとき、自由水面上の単位時間当りの見かけの節点流量は次式で求められる³⁶⁾。

$$\{Q_N\} = [C_{N-1}^T] \{H_{N-1}\} + [K_N] \{H_N\} \quad \dots (30)$$

ここに、

$\{H_N\}$: 自由水面上の節点のポテンシャルを成分とする列ベクトル、

$\{H_{N-1}\}$: 第 $(N-1)$ ユニットの節点のポテンシャルを成分とする列ベクトル、

$[K_N], [C_{N-1}^T]$: 自由水面に面した要素 (図の $e_1 \sim e_n$) のみから定まる浸透性行列。

この式から明らかなように、連立方程式を解く過程に

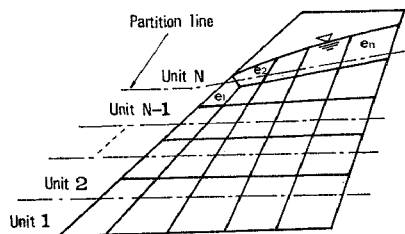


図-8 ブロック消去法 (対角化分割法) の応用

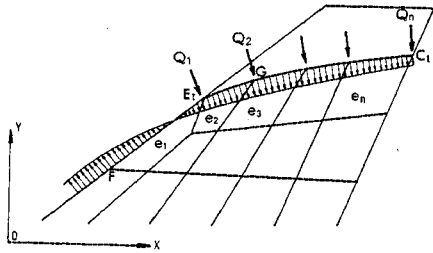


図-9 自由水面および流出面上の流量分布

において、前進消去および後退代入の第一歩($N-1$ ユニット)までの演算で $\{Q_N\}$ を求め得ることに注意されたい。ところで、ベクトル $\{Q_N\}$ の成分の和 $\sum_{i=1}^n Q_i$ の意味するところは、自由水面 $\overline{E_1C_1}$ から時刻 t においてこの系へ流入する単位時間当りの見かけの流入量である。しかし、これが系全体としての流入量 $4Q$ とは等しくならない。なぜなら、図-9 の模式図にみられるように、式 (30) に基づく浸出点 E_t の節点流量 Q_t は、要素 e_t における辺 $\overline{E_tF}$ および $\overline{E_tG}$ からの寄与の代数和 (流入 \oplus , 流出 \ominus) の結果として得られたものであり、一般に流出面上 E_t の近傍で流入側から流出側へ移行していると考えられるからである。したがって、式 (30) より $4Q$ を求めるためには、 Q_t は次のように修正されねばならない。

a) 辺 $\overline{E_tG}$ からの寄与

点 E_t, G において自由水面に垂直な方向の速度成分 v_{ne}, v_{ng} を評価し、図-10 に示すように v_{ne}, v_{ng} が直線変化しているものとして、次式で辺 $\overline{E_tG}$ からの寄与を求める。

$$Q_{eg} = L_{eg}(2v_{ne} + v_{ng})/6 \dots \dots \dots (31)$$

ここに、

L_{eg} : E_t, G 間の距離

b) 辺 $\overline{E_tF}$ からの寄与

点 E_t, F で流出面に垂直な速度成分を v_{se}, v_{sf} とし、 v_{sf} が流出面に対して外向き (流出), 内向き (流入) にかかわらず v_{se}, v_{sf} 間を直線近似して、次

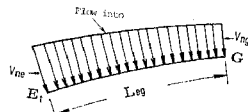


図-10 浸出点における流量修正の説明図 (辺 $\overline{E_tG}$ からの寄与)

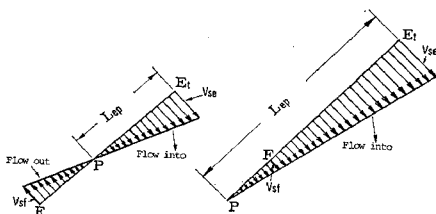


図-11 浸出点における流量修正の説明図 (流出面からの寄与)

式で $\overline{E_tF}$ からの寄与を求める (図-11 参照)。

$$Q_{ep} = L_{ep} \cdot v_{sef}/2 \dots \dots \dots (32)$$

ここに、

L_{ep} : v_{se}, v_{sf} の先端を結ぶ直線が流出面と交わる点を P とするとき、 E_tP の距離

以上の結果、改めて式 (31), (32) から

$$Q_t = Q_{eg} + Q_{ep} \dots \dots \dots (33)$$

として、

$$4Q = \sum_{i=1}^n Q_i \dots \dots \dots (34)$$

より、系全体としての見かけの流入量が算定できる。

さて、式 (28) または (29) に基づいて定めた浸出点と、流速より直接定めた浸出点は一般に異なった位置を与える。そして、いずれがより正しい位置にあるかをこの時点で判断することは、数値解析上の種々の誤差が複雑に入り組んでいるため非常に困難である。他方、この種の解析によれば多くの場合、浸出点の降下が実測値に比べ大きくなるという経験的事実を認めることができる。よってここでは、いずれかの方法で求めた浸出点のうち、より降下量の少ないものを採用することとした。

5. 解析例

まず、はじめは先にも取り上げた Szabo³⁴⁾ らの問題である。これは 図-12 に示されている諸寸法の模型水槽において、両端の水位が急激に降下する際の自由水面を追跡したものである。形状、境界条件ともに左右対称であるため、半断面のみを対象として解いた。図中にみられるようにこのモデルの透水係数は $k=0.0674$ in/sec $=0.171196$ cm/sec、有効空隙率は $\beta=0.3$ である。前節に述べた浸出点近傍の要素分割に関する注意点に基づき、初期状態の要素分割を 図-13 のように定めた。もちろん、自由水面が低下し、解析領域が変化する際の要素分割の自動化がなされていることはいうまでもない。

図-14 は time step $\Delta t=10$ sec で計算した自由水面を France らと比較したものである注1)。図中・印は本

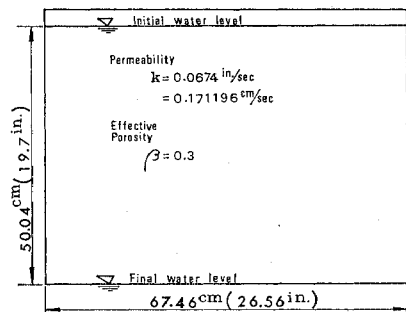


図-12 Szabo and McCaig の問題

注1) 図-14 は France らの結果と比較するために、図-13 の初期要素分割図とは左右逆にプロットされている。

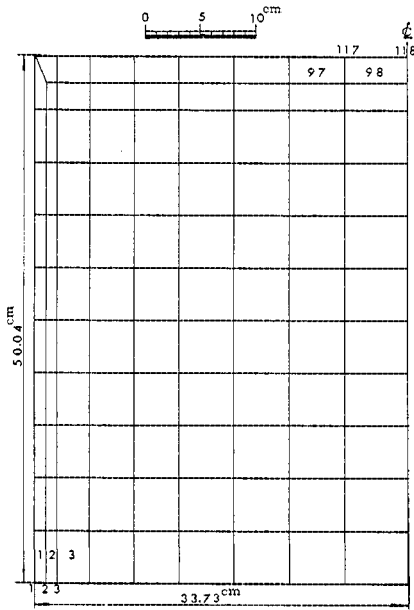


図-13 初期要素分割状況

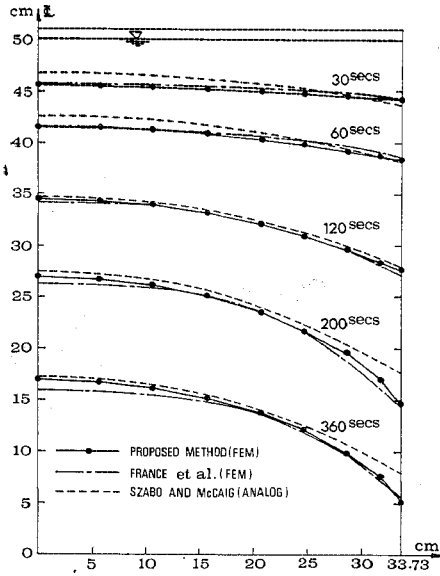


図-14 解析結果 (France et al. および Szabo et al. との比較)

文で提案した解析法によって計算された位置を示し、なんらの平滑化もなされていないことを付記しておく。図-14によると Szabo らの実験値を含め、対象時間の前半においては三者ほとんど差違は認められない。しかし、それ以降は浸出点近傍において計算値と実測値との間に徐々にずれが現れている。前述したように、浸出点は流速より直接定めた位置と、式 (29) に基づく位置を比較し、より上方にあるものを採用しているのが、その根拠の一端は図-14 にみられるように浸出点

の降下が実験値に比べ一般に大きくなるという事実にある。

さて、France らと本文による自由水面形自体を比べると、解析領域の中央部において両者はほとんど一致し、両端で若干のずれが認められるけれども、さほど大きな相違はない。しかしながら、図-14 に至る過程を考えれば両者の相違はおのずと明白であって、France らの解法は三要素を用いてはいるものの浸出点要素が単一であるため、前述の「浸出点における動水勾配の特異性」をそのまま内蔵するものである。したがって、彼らの解法において最小自乗法という平滑化を行わなければ図-14 に比べ、より実験値と離れた結果を与えるものと推察される。このことを逆に解釈すれば、図-14 における本文の解析結果に、さらに最小自乗法を適用するならば、よりいっそう実測値に近い水面形が得られることが予想される。ただし、このような操作が常に精度を高めるか否かは疑問である。

ここで参考までに Computer time を示せば、time step 1 回当たりの CPU time は京都大学大型計算機センター FACOM 230-70 で約 0.73 sec、また、大阪大学大型計算機センター NEAC 2200 MODEL 700 で約 2.98 sec であった。

他の1つの解析例は喜撰山ロックフィルムダム設計の一環としてなされた大長による Hele-Shaw モデル実験結果¹⁾との比較である。この場合の FEM 解析に用いられた断面諸元、初期要素分割を図-15 に示した²⁾。この問題は貯水池水位の降下量が6時間で 26 m なる条件のもとに、ロック部の有効空隙率 $\beta=0.3$ (一定) として、透水性を種々変化させた場合の自由水面を追跡したものである。

図-16~18 に透水係数がそれぞれ 0.01 cm/sec、0.1 cm/sec および 0.3 cm/sec であるときの計算による自由水面を、経過時間ならびにその時々貯水池水位とともに示す。図において、●印は nodal line 上の計算された位置を表わしている。また、 Δt は用いられた time step の大きさである。この time step の設定に関しては透水性が大きくなるにしたがって困難な問題が伴ってくる。すなわち、図-18 にみられるような透水性の大なる場においては、外水位の変動に対する浸透水の反応がきわめて敏感であるため、time step が適切でない場合、浸出点が外水位より下方に位置するといった不合理な現象が起り得る。そのため、ここでは最初の2時間は $\Delta t=2.5$ min で、以後 $\Delta t=5$ min として解析したの

注2) 図-15 に示す断面諸元は主として参考文献4)の図-2に基づいて外挿的に決定した。これは同文献中図-3との比較を目的としてのことである。したがって実物の喜撰山ダムとは寸法上多少異なっていることをおことわりしておく。

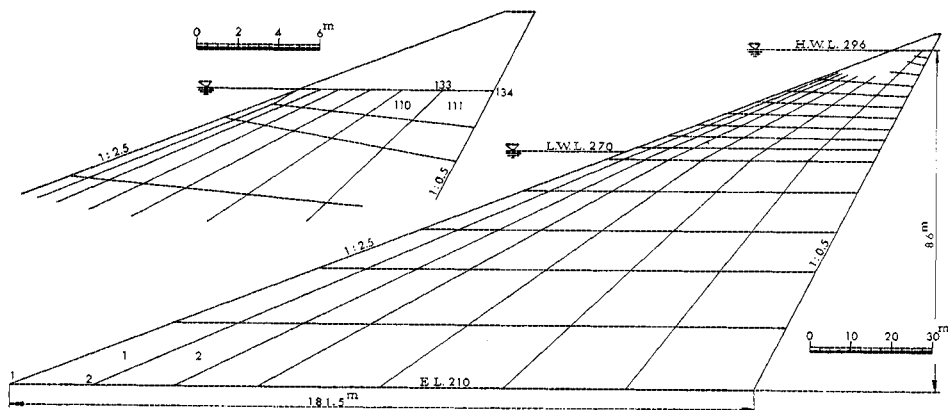


図-15 喜撰山ロックフィルダムの要素分割, 断面諸元

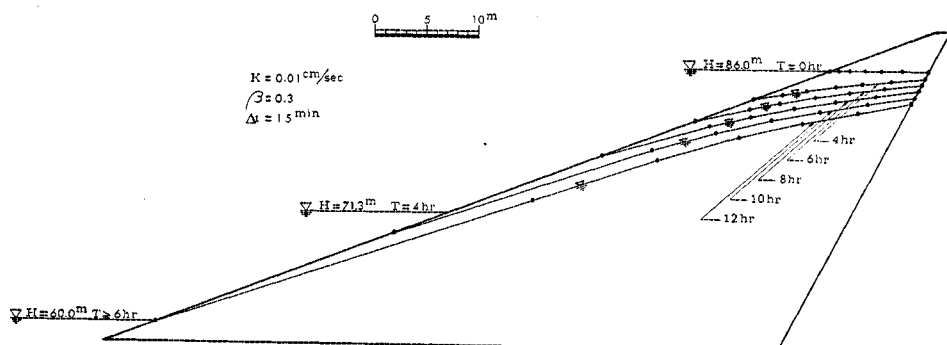


図-16 自由水面変動 ($k=0.01$ cm/sec, $\beta=0.3$)

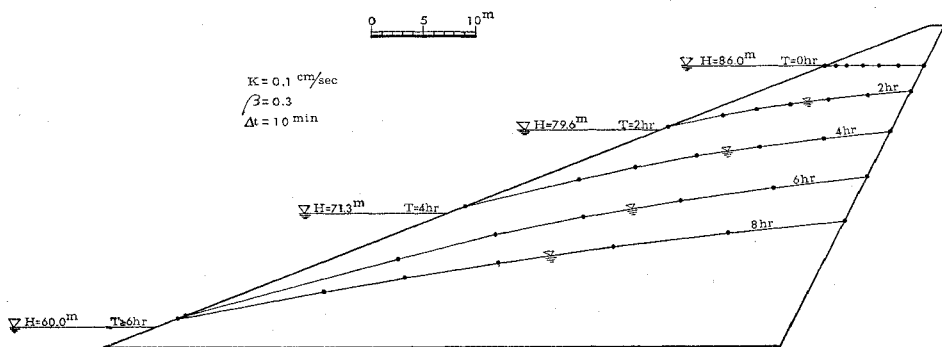


図-17 自由水面変動 ($k=0.1$ cm/sec, $\beta=0.3$)

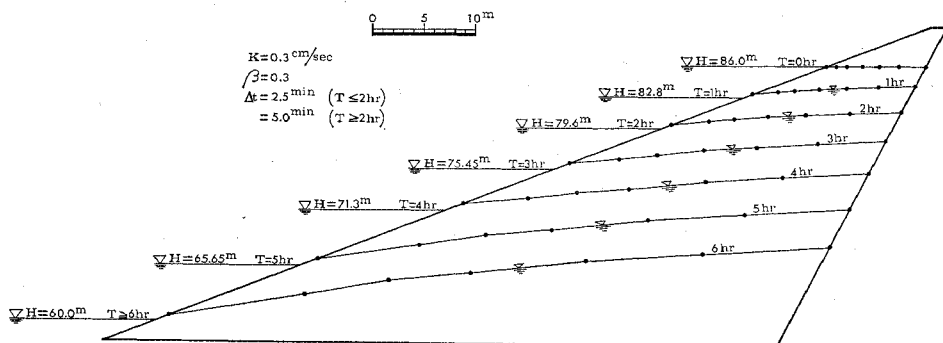
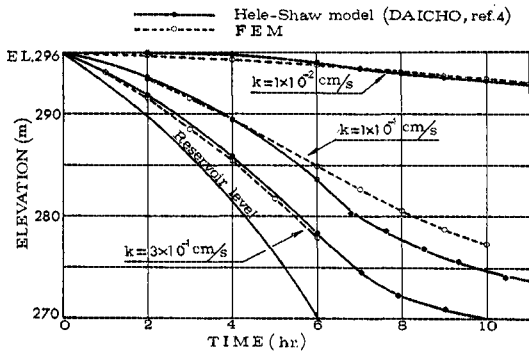


図-18 自由水面変動 ($k=0.3$ cm/sec, $\beta=0.3$)



図一19 大長による Hele-Shaw Model 実験結果との比較 (縦軸は不透水境界面に沿う自由水面の位置水頭)

であるが、必然的に演算時間の増大は避けられない。目下のところ time step の大きさと、それによって得られる精度を一義的に論じることは困難であり、結果が満足すべきものであるか否かは試行錯誤的な手段に頼らざるを得ない。なお、time step の設定に関して Sandhuら³⁷⁾が興味ある一手法を提案している。

図一19 は不透水境界面に沿う自由水面の位置水頭と経過時間の関係を、透水係数をパラメーターとして示したものである。図において実線は Bear の相似則³⁸⁾に基づく大長の実験結果を、また、破線は 図一16~18 による計算値を示す。図から明らかなように、透水係数が 0.01 cm/sec および 0.3 cm/sec の場合は両者の一致度はきわめて良好である。しかし、透水係数が 0.1 cm/sec で、経過時間が 6 時間以降には水位にして約 2.5 m の差違がみられる。この傾向は同様な比較を行っている飯田ら²⁵⁾の結果にも認められるが原因は明らかでない^{注3)}。いずれにしても外水位が低下しきるまで、すなわち、経過時間 6 時間までに限定すれば、実験値と計算値は非常によく一致しているといえる。他方、水位低下時の堤体の安定性を議論する立場からすれば、外水位が低下しきるまでの時間的推移が重要な役割を果たすと考えて差し支えなからう。この意味で本解析法を用いて安定解析への入力データを得ることに十分な信頼性があると考えている。

最後に、この場合の演算時間は大阪大学大型計算機センター NEAC 2200 MÔDEL 700 で time step 1 回当りの CPU time は約 3.20 sec であった。

6. 結 言

安定解析への入力データを得るために採用した Desai

注 3) 図一16~図一19 はいずれも飯田らの論文²⁵⁾に同様な図がみられる。しかし本文 図一15 の断面諸元とはかなり異なっているため、両者の直接の比較はできない。

や France らの解法によれば、ある種の場合、要素分割や time step をいかに密に設定しても浸出点の降下が他の自由水面上の節点に比べ極端に大きくなるという事実には端を発した本研究において、得られた結果を要約すれば次のようである。

(1) 浸出点を含む要素に単一の要素を用い、かつその要素の一端が完全に浸出面上に存在する限り、isoparametric 要素、3 節点三角形要素にかかわらず浸出点の動水勾配が境界条件に無関係に一定値をとるというきわめて特異な性質のあることを明らかにした。

(2) 特に、近時注目を集めている isoparametric 要素に関して、その次数にかかわらず特異性のあることが明らかにされた点有意義であると考えている。

(3) そして、この難点を避けるためには浸出点に複数個の要素を用い、それらの平均値を採用すべきことを述べた。

(4) さらに系全体としての流量の連続性に基づく浸出点の一決定法を提示した。そして、一般にこの種の解法による浸出点の降下が実測値に比べ速やかであるという経験的事実にのっとり、流量に基づく浸出点と流速より直接求めた浸出点のうち、より降下量の少ないものを採用した。

(5) 以上とは別に、自由水面表示に cubic spline function を応用し、十分実用的であることも確かめられた。

(6) 最後に他の研究者による 2 つの実験例および計算例と比較しつつ本解析法の有用性が確かめられた。

ただし、本論文中の議論はあくまでも外水位が降下する場合を前提としたものである。逆に貯水池水位が上昇する場合については別途に検討が必要であろう。

終りに臨み、日頃より御指導を賜わっている本学建設工学科小田英一教授に謝意を表する次第であります。

なお、本文中の数値解析は京都大学大型計算機センター FACOM 230-70 および大阪大学大型計算機センター NEAC 2200 MÔDEL 700 によったことを付記しておく。

参 考 文 献

- 1) 河上房義監訳：アースダムとアースロックダム，森北出版，1972。
- 2) 山上拓男：有限要素法による非定常浸透流下の堤体の安定解析 (第1報)，第10回土質工学研究発表会講演集，pp. 623~626，昭和50年。
- 3) 駒田広也・金沢紀一：フィルダムの貯水池水位急降下時の非定常浸透流解析および安定解析，土木学会論文報告集，No. 240，pp. 51~62，1975-8。
- 4) 大長昭雄：フィルダムの挙動におよぼす水位変動の影響について，土と基礎，Vol. 23，No. 5，pp. 27~33，1975。
- 5) Browzin, B.S.: Nonsteady-State Flow in Homogeneous Earth Dams after Rapid Drawdown, Proc. 5th Int. Conf. on SMFE., Vol. 2, pp. 551~554, 1961。

- 6) Newlin, C.W. and S.C. Rossier : Embankment Drainage after Instantaneous Drawdown, Proc. ASCE, SM, Vol. 93, No. 6, pp. 79~95, 1967.
- 7) Poorooshasb, H.B. and J. Forati : Embankment Drainage after Instantaneous Drawdown, Proc. 7th Int. Conf. on SMFE., Vol. 2, pp. 349~353, 1969.
- 8) Dvinoff, A.H. and M.E. Harr : Phreatic Surface Location after Drawdown, Proc. ASCE, SM, Vol. 97, No. 1, pp. 47~58, 1971.
- 9) Neuman, S.P. and P.A. Witherspoon : Analysis of Nonsteady Flow with a Free Surface Using the Finite Element Method, Water Resour. Res., Vol. 7, No. 3, pp. 611~623, 1971.
- 10) Neuman, S.P. and P.A. Witherspoon : Variational Principles for Confined and Unconfined Flow of Ground Water, Water Resour. Res., Vol. 6, No. 5, pp. 1376~1382, 1970.
- 11) Neuman, S.P. and P.A. Witherspoon : Variational Principles for Fluid Flow in Porous Media, Proc. ASCE, EM, Vol. 97, No. 2, pp. 359~374, 1971.
- 12) Neuman, S.P. and P.A. Witherspoon : Finite Element Method of Analyzing Steady Seepage with a Free Surface, Water Resour. Res., Vol. 6, No. 3, pp. 889~897, 1970.
- 13) Fang, C.S., S.N. Wang and W. Harrison : Groundwater Flow in a Sandy Tidal Beach 2. Two-Dimensional Finite Element Analysis, Water Resour. Res., Vol. 8, No. 1, pp. 121~128, 1972.
- 14) Huyakorn, P.S. : Finite Element Solutions of Transient, Two-Regime Flow towards Wells, Proc. of the 1974 Int. Conf. on FEM. in Eng. (Held at the Univ. of New South Wales), pp. 799~813, 1974.
- 15) 赤井浩一・大西有三・西垣 誠 : 竖井, 横井の揚水による地下水位低下に関する非定常解析, 第10回土質工学研究発表会講演集, pp. 619~622, 昭和50年.
- 16) France, P.W., C.J. Parekh, J.C. Peters, and C. Taylor : Numerical Analysis of Free Surface Seepage Problems, Proc. ASCE, IR, Vol. 97, No. 1, pp. 165~179, 1971.
- 17) Desai, C.S. : Seepage Analysis of Earth Banks Under Drawdown, Proc. ASCE, SM, Vol. 98, No. 11, pp. 1143~1162, 1972.
- 18) Herbert, R. and K.R. Rushton : Ground-Water Flow Studies by Resistance Networks, Géotechnique, Vol. XVI, No. 1, pp. 53~75, 1966.
- 19) Cheung, Y.K. and L. Skjolingstad : Two and Three-Dimensional Ground Water Seepage by Finite Elements, Proc. of the 1974 Int. Conf. on FEM. in Eng. (Held at the Univ. of New South Wales), pp. 751~766, 1974.
- 20) France, P.W. : Finite Element Analysis of Three-Dimensional Groundwater Flow Problems, Jour. of Hydrology, 21, pp. 381~398, 1974.
- 21) Cheng, R.T.S. and C-Y. Li : On the Solution of Transient Free-Surface Flow Problems in Porous Media by the Finite Element Method, Jour. of Hydrology, 20, pp. 49~63, 1973.
- 22) Todsen, M. : On the Solution of Transient Free-Surface Flow Problems in Porous Media by Finite-Difference Methods, Jour. of Hydrology, 12, pp. 177~210, 1971.
(本論文の Appendix に簡潔に要約されている).
- 23) McCorquodale, J.A. : Variational Approach to Non-Darcy Flow, Proc. ASCE, HY, Vol. 96, No. 11, pp. 2265~2278, 1970.
- 24) McCorquodale, J.A. and M.S. Nasser : Numerical Methods for Unsteady Non-Darcy Flow, Finite Element Methods in Flow Problems (edited by J.T. Oden, et al.), pp. 545~557, 1974.
- 25) 飯田隆一・朝倉 肇 : 非定常浸透流の有限要素法による解析, 土木研究所報告, 昭和46年4月.
- 26) Verruijt, A. : Solution of Transient Groundwater Flow Problems by the Finite Element Method, Water Resour. Res., Vol. 8, No. 3, pp. 725~727, 1972.
- 27) 河野伊一郎 : 有限要素法による 堤体浸透問題の解析, 土と基礎, Vol. 21, No. 8, pp. 13~19, 1973.
- 28) Kono, I. : Finite Element Analysis of a Nonsteady Seepage Problem, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, pp. 75~85, 1974.
- 29) Desai, C.S. : Approximate Solution for Unconfined Seepage, Proc. ASCE, IR, Vol. 99, No. 1, pp. 71~87, 1973.
- 30) Al-Mashidani, G. and C. Taylor : Finite Element Solution of Boussinesq's Equation for Unsteady Groundwater Flow, Proc. of the 1974 Int. Conf. on FEM. in Eng. (Held at the Univ. of New South Wales), pp. 705~717, 1974.
- 31) Desai, C.S. : Nonlinear Analyses Using Spline Functions, Proc. ASCE, SM, Vol. 97, No. 10, pp. 1461~1480, 1971.
- 32) 川本朧万・水島章次・斎藤敏明 : スプラインの非線形応力-ひずみ曲線への応用, 土木学会論文報告集, No. 218, pp. 67~74, 1973-10.
- 33) 山上拓男・小野 諭 : 外水位上昇に伴う非定常浸透流の有限要素解析, 第11回土質工学研究発表会講演集, pp. 765~768, 昭和51年.
- 34) Szabo, B.A. and I.W. McCaig : A Mathematical Model for Transient Free Surface Flow in Non-homogeneous or Anisotropic Porous Media, Water Resources Bulletin, Vol. 4, No. 3, pp. 5~18, 1968.
- 35) Taylor, C.J., P.W. France and O.C. Zienkiewicz : Some Free Surface Transient Flow Problems of Seepage and Irrotational Flow, The Mathematics of Finite Elements and Applications (edited by J.R. Whiteman), Academic Press, pp. 313~325, 1973.
- 36) 山上拓男・小田英一 : 有限要素法による非ダルシー浸透流の一解法, 土木学会論文報告集, No. 234, pp. 111~120, 1975-2.
- 37) Sandhu, R.S., I.S. Rai and C.S. Desai : Variable Time Step Analysis of Unconfined Seepage, Finite Element Methods in Flow Problems (edited by J.T. Oden, et al.), pp. 573~579, 1974.
- 38) Bear, J. : Scale of Viscous Analogy Models for Ground Water Studies, Proc. ASCE, HY, Vol. 86, No. 2, pp. 11~23, 1960.