土木学会論文報告集
第 262 号・1977 年 6 月

開水路網定常流のマトリックス解析法

MATRIX ANALYSIS OF STEADY FLOWS IN OPEN CHANNEL NETWORKS

神田　徹*・井澤元博**
By Tohru KANDA and Motohiro IZAWA

1. 概　説

開水路が網状に連結する，いわゆる開水路網は自然河川の下流部，用水路，下水道などにひろく見られる．とくに，沖積平野に位置する都市内を流れる河川は，堤内地の内水排除施設の整備と対応して人為的河道改修が進められ，典型的な開水路網を形成することが多い．このような低平地緩勾配水路の流れは必然的に河口潮位の影響を受けるので，洪水疎通能の点からも，平常時の河水の滞留による水中物質の輸送の点からも，その流れの挙動を明らかにする必要がある．しかるに，開水路網の流れの解析に関しては以下に紹介するような近年のアプローチがあるが，従来から改良が加えられている管路網の研究に比べて相当の問題点が残されている．その代表的な研究成果および開水路網計算法の問題点は次のとおりである．

管路網に対して開発された Hardy Cross 法を開水路網に応用し，各サーキットについて損失水頭の代数和がゼロになるという条件のもとに解を逐次収束させる計算法が伊藤（秀）によって報告されている[1]．しかし，開水路網では分・合流点などの河道の接続点における水理特性が重要であるので，管路網のごとくサーキットの流れに注目した取り扱いをすることには，基本的に無理が生ずる可能性があると考えられる．岩佐・綾は，開水路網不定流の解析にグラフ理論の節点・枝接続行列を導入することにより，差分表示された基礎式の行列表示を行っている[2]．グラフ理論を有効に応用した計算法としては常松の管路網定常流に関する研究がある[3]．この研究ではネットワーク・システムに対して有向原始ループ行列を導入した手法が開発されたが，この研究は管路システムを対象とするので摩擦損失以外の損失水頭は minor loss として取り扱われており，開水路網の分・合流点のようなエネルギー授受の大きな遷移部を想定していない．

以上のごとく，開水路網の計算法を確立するためにはいくつかの重要な課題が残されている．とくに，分・合流点や断面急変部における流れの遷移機構が複雑であり，その水理特性が不明確であることが数値解析モデルの構成を困難にしている．これらの水路断面の形状によってはその付近での水理特性が開水路網全体に占めるウェイトは大きくなり得るから，これを管路網での取り扱いのように minor loss の中に含めるような解析モデルを用いることは妥当ではない．一方，計算機による演算上の問題としては，Hardy Cross 法のアナロジーでは遷移部での水理特性の導入が困難であるほかに，水路網の形状が複雑になるにしたがって各水路の仮定流量が解の収束性に影響を及ぼすという難点は避けられない．行列演算を用いる方法では，分・合流部や曲がり部での特性を導入すれば一般に基礎式のマトリックス・ベクトル表示がきわめて煩雑となる．この点を解決すれば，管路網に対する方法[3]から予想されるごとく，この方法の一般的な開水路網への適用性は有望であると考えられる．

本文は，これらの問題点に関して次の二点に重点を置く研究を行ったものである．すなわち，第1は，開水路網の特徴である遷移部の水理特性を導入するためのシステム・モデルを作成することである．第2は，このモデルに対する基礎方程式を系統的にマトリックス・ベクトル表示する手順を求め，さらに得られたマトリックスの一般的解法を示すことである．最後に，ここに提示した計算法は計算例によってその適用性が確かめられる．

2. 開水路網システムのモデル化と有向グラフによる表示

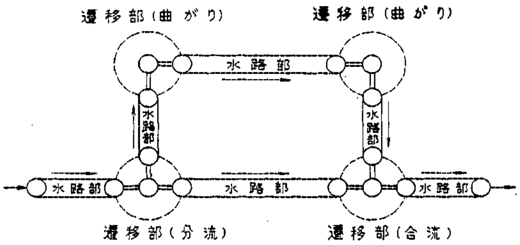
(1) 開水路網システムのモデル

開水路網の流れを解析するためのモデルは，上述のような水理学上の特徴および数値計算上の要件に適応でき

* 正会員　工博　神戸大学助教授　工学部土木工学科
** 正会員　神戸市都市計画局

るものでなければならない．モデル化にあたっての本研究の基本的立場は，開水路網システムを1次元的に取り扱うが，分・合流点や曲がりなど，水理量の急激な変化をともなう水路部分一これを遷移部とよぶ一での水理特性を重視するものである．つまり，ここに提示するモデルの特徴は，遷移部を中心としてサブ・システムが構成される点である．この考え方は，一つの閉じたサーキットをサブ・システムとする従来のモデル化（サーキット・モデルとよぶことができる）の立場と基本的に異なっている．

以上の立場から開水路網を，水理量が急変する遷移部および摩擦損失によって水理量が漸変する部分一これを水路部とよぶ一の二つのサブ・システムから構成されるシステムとみなして，モデルを作成する．



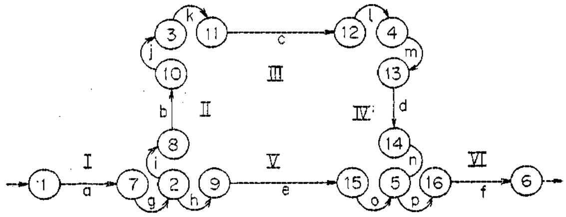
図—1　開水路網のモデル化

開水路網システムの一般的形態を考えるうえで，必要最小限のサブ・システム要素を含むものとして **図—1** のような開水路網を考える．すなわち，このシステムは分流点，合流点，曲がりの遷移部およびそれらの間の水路部から成る．ここに，遷移部は一つのシステムであるから，さらにその中で水理特性を再現するようなモデルを構成しなければならない．ここでは，いずれの遷移部においても中心点およびその上流断面，下流断面の3断面を選び，それらの諸量によって遷移部の特性を表わすことにする．水路部は，簡単のために中間断面は省略して，一つの要素から成るものとしている．

（2）　有向グラフによる表示

有向グラフの構造は，節点と枝との接続関係によって規定され，接続行列を用いて表わすことができる．接続行列，$A=\{a_{ij}\}$ は行に節点を，列に枝をとり，その各要素は一定の法則により $+1$，0，-1 のいずれかの値をとる[4]．

さて，開水路網システムは数値計算のために有限個の断面に分割されるが，その断面を節点に対応させ，節点間を枝で結び，さらに流れを枝の向きに対応させると，開水路網システムの幾何学的連結構造は有向グラフによって表現することができる．**図—1** に示した開水路網のモデルは **図—2** のごとく有向グラフ表示ができる．そ



図—2　開水路網システムの有向グラフ表示

して，枝はアルファベット，節点は数字を用いて符号化し，その記号のつけ方はアルファベット，数字ともに便宜上，水路網の骨格部分から始まり，その次に遷移部の周辺へ移るという順序によることにする．

以上で開水路網システムの有向グラフによる表示は得られたわけであるが，開水路網の水理現象を解明していくためには有向グラフの節点および枝に物理的意義をもたせなければならない．ここでは，節点定義量として水深を与え，枝定義量として流量を与える．また，節点間での損失水頭は両節点ではさまれる枝において与えている．

3．定常不等流の基礎方程式のマトリックス表示

（1）　基礎方程式

開水路網における定常流では，次の3つの水理条件が成立する．

（i）　各節点において流量の連続式が成立する．すなわち，任意の節点 i に対して

$$\sum_j q_j = Q_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

ここに，Q：システム外部からの流入・流出量で，流入を正とする．

q_j：枝 j の流量で，枝の方向と同じ向きの流れのとき正の値とする．

$\sum_j q_j$：節点 i で接続する枝についての流量和．

（ii）　各枝の損失水頭はその両端の節点における全水頭の差で表わされ，高さの減少する方向は流量の方向に一致する．すなわち，任意の枝 j に対して

$$\varphi_i - \varphi_{i+1} = H_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

ここに，φ_i：節点 i における全水頭，$\varphi \equiv v^2/2g + z + h$

H_j：枝 j における損失水頭．

v：流速．

z：河床高さ．

h：水深．

（iii）　各枝について損失水頭は，流量と水深の関数で表わされる．すなわち，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{摩擦損失水頭} & : H=f_c\dfrac{v^2}{2g}\dfrac{l}{R} \\ \text{分岐，合流，曲がりなどによる損失水頭} & : H=f_t\dfrac{v^2}{2g}\end{array}\right\}\cdots(\text{c})$$

ここに，　l：枝の長さ．

R：径深．

f_c，f_t：損失係数．

さて，図—2 の開水路網モデルについて上記の水理条件を定式化するために，次の仮定を設ける．

① 水路断面形状は長方形とする．

② 水路幅は，各直線水路部分（I，II，III，IV，V，VI）ごとに一定である．

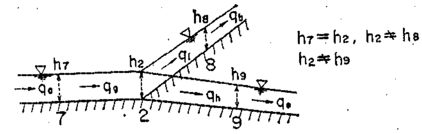
③ エネルギー損失としては，摩擦，分岐，合流，曲がりによる損失を考える．

④ 分岐，合流，曲がりによるエネルギー損失は，その節点の直下流の枝において起こるものとする（図—3 (a)，(b)，(c) 参照）．また，これらの損失水頭をいずれも，$\Delta h=f(v^2/2g)$ という形で表現し，v としては Δh が生じた枝つまり，分岐，合流，曲がりの節点直下流の枝における v を用いる．ここに，f の値はすべて定数とする．

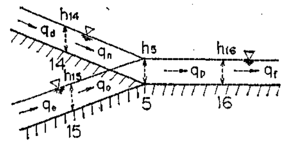
⑤ 節点において全水頭を表わすためにこの点での流量が必要となるが，その流量は，分岐，合流，曲がりの節点を除いてその節点の直上流と直下流の枝における流量の平均値を用い，分岐，合流，曲がりの節点の流量はおのおののケースに応じて直上流または直下流の枝の流量を用いる．

⑥ 枝において損失水頭を表わすためにこの枝での水深が必要となるが，その水深は，その両端の節点における水深の平均値を用いる．

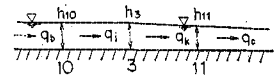
上記の仮定のうち ④ に関しては，前述のごとく分・合流点での水理特性が明らかでないから，その妥当性には明確な根拠はないが，ここでは管路での取扱いに準じ



(a) 分　岐

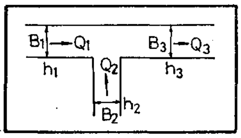


(b) 合　流



(c) 曲がり

図—3　遷移部での水深の仮定

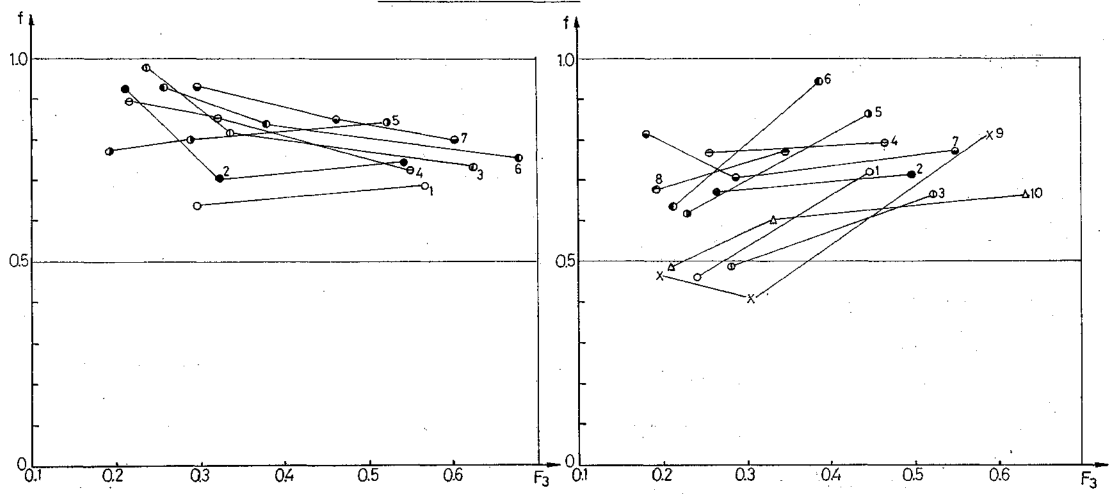


(a) $B_1=20$ cm, $B_2=10$ cm

	Q_2/Q_1	Q_3(cm³/s)
1	0.089	3 070
2	0.149	3 240
3	0.245	3 510
4	0.276	3 190
5	0.314	2 890
6	0.365	3 850
7	0.596	4 500

(b) $B_1=40$ cm, $B_2=10$ cm

	Q_2/Q_1	Q_3(cm³/s)		Q_2/Q_1	Q_3(cm³/s)
1	0.058	4 530	6	0.219	3 840
2	0.098	4 700	7	0.241	5 310
3	0.161	4 970	8	0.245	3 510
4	0.179	4 540	9	0.304	5 580
5	0.197	4 190	10	0.393	5 960



(a)　　　　(b)

図—4　合流部の損失係数の実験値

てこの形式を採用した．この定式化に関する著者らの模型実験結果の一部を 図—4(a),(b) に示す．この図は主流に対して直角に流入する合流部において，主流についての損失係数，すなわち次式による f の実験値を示したものである．

$$\left(\frac{v_1^2}{2g}+h_1\right)-\left(\frac{v_3^2}{2g}+h_3\right)=f\frac{v_3^2}{2g}$$

図によれば $f\cdot v_3^2/2g$ による損失水頭の表現がほぼ可能と考えられる[5]．ただし，f は，下流フルード数 $F_3=v_3/\sqrt{gh_3}$，主流の流量に対する横流入の流量比 Q_2/Q_1，水路幅の比 B_2/B_1 によって異なった値をとる．この点を考慮すれば，開水路の拡幅部[6]，縮幅部[7]，弯曲部[8]と同様に合流部[9),10]においても上式を用いることが可能であろう．

以上の仮定によれば，図—2 の開水路網システムに対する基礎方程式は，式 (a), (b), (c) に対応してそれぞれ次のようになる．

式 (a)：

$$q_a=Q_1\cdots(1.\ 1),\qquad -q_g+q_h+q_i=0\cdots(1.\ 2),\qquad -q_j+q_k=0\cdots(1.\ 3),$$

$$-q_l+q_m=0\cdots(1.\ 4),\qquad -q_r-q_o+q_p=0\cdots(1.\ 5),\qquad -q_f=Q_6\cdots(1.\ 6),$$

$$-q_a+q_g=0\cdots(1.\ 7),\qquad -q_i+q_b=0\cdots(1.\ 8),\qquad -q_h+q_e=0\cdots(1.\ 9),$$

$$-q_b+q_j=0\cdots(1.10),\qquad -q_k+q_c=0\cdots(1.11),\qquad -q_c+q_l=0\cdots(1.12),$$

$$-q_m+q_d=0\cdots(1.13),\qquad -q_d+q_n=0\cdots(1.14),\qquad -q_e+q_\theta=0\cdots(1.15),$$

$$-q_p+q_f=0\cdots(1.16).$$

連続方程式は，上記のごとく合計 16 個であるが，任意の 1 個の式は従属であるので有効な式は 15 個となる．

式 (b)：

水路部

$$\left(\frac{q_a^2}{2gb_{\mathrm{I}}^2h_1^2}+z_1+h_1\right)-\left(\frac{(1/2)(q_a^2+q_g^2)}{2gb_{\mathrm{I}}^2h_7^2}+z_7+h_7\right)=H_a \quad\cdots\cdots(2.\ 1)$$

$$\left(\frac{(1/2)(q_i^2+q_b^2)}{2gb_{\mathrm{II}}^2h_8^2}+z_8+h_8\right)-\left(\frac{(1/2)(q_b^2+q_j^2)}{2gb_{\mathrm{II}}^2h_{10}^2}+z_{10}+h_{10}\right)=H_b \quad\cdots\cdots(2.\ 2)$$

$$\left(\frac{(1/2)(q_k^2+q_c^2)}{2gb_{\mathrm{III}}^2h_{11}^2}+z_{11}+h_{11}\right)-\left(\frac{(1/2)(q_c^2+q_l^2)}{2gb_{\mathrm{III}}^2h_{12}^2}+z_{12}+h_{12}\right)=H_c \quad\cdots\cdots(2.\ 3)$$

$$\left(\frac{(1/2)(q_m^2+q_d^2)}{2gb_{\mathrm{IV}}^2h_{13}^2}+z_{13}+h_{13}\right)-\left(\frac{(1/2)(q_d^2+q_n^2)}{2gb_{\mathrm{IV}}^2h_{14}^2}+z_{14}+h_{14}\right)=H_d \quad\cdots\cdots(2.\ 4)$$

$$\left(\frac{(1/2)(q_h^2+q_e^2)}{2gb_{\mathrm{V}}^2h_9^2}+z_9+h_9\right)-\left(\frac{(1/2)(q_e^2+q_o^2)}{2gb_{\mathrm{V}}^2h_{15}^2}+z_{15}+h_{15}\right)=H_e \quad\cdots\cdots(2.\ 5)$$

$$\left(\frac{(1/2)(q_p^2+q_f^2)}{2gb_{\mathrm{VI}}^2h_{16}^2}+z_{16}+h_{16}\right)-\left(\frac{q_f^2}{2gb_{\mathrm{VI}}^2h_6^2}+z_6+h_6\right)=H_f \quad\cdots\cdots(2.\ 6)$$

遷移部

分岐部

$$\left(\frac{(1/2)(q_a^2+q_g^2)}{2gb_{\mathrm{I}}^2h_7^2}+z_7+h_7\right)-\left(\frac{q_g^2}{2gb_{\mathrm{I}}^2h_2^2}+z_2+h_2\right)=H_g\fallingdotseq 0 \quad\cdots\cdots(2.\ 7)$$

$$\left(\frac{q_h^2}{2gb_{\mathrm{V}}^2h_2^2}+z_2+h_2\right)-\left(\frac{(1/2)(q_h^2+q_e^2)}{2gb_{\mathrm{V}}^2h_9^2}+z_9+h_9\right)=H_h \quad\cdots\cdots(2.\ 8)$$

$$\left(\frac{q_i^2}{2gb_{\mathrm{II}}^2h_2^2}+z_2+h_2\right)-\left(\frac{(1/2)(q_i^2+q_b^2)}{2gb_{\mathrm{II}}^2h_8^2}+z_8+h_8\right)=H_i \quad\cdots\cdots(2.\ 9)$$

曲がり部

$$\left(\frac{(1/2)(q_b^2+q_j^2)}{2gb_{\mathrm{II}}^2h_{10}^2}+z_{10}+h_{10}\right)-\left(\frac{q_j^2}{2gb_{\mathrm{II}}^2h_3^2}+z_3+h_3\right)=H_j\fallingdotseq 0 \quad\cdots\cdots(2.10)$$

$$\left(\frac{q_k^2}{2gb_{\mathrm{III}}^2h_3^2}+z_3+h_3\right)-\left(\frac{(1/2)(q_k^2+q_c^2)}{2gb_{\mathrm{III}}^2h_{11}^2}+z_{11}+h_{11}\right)=H_k \quad\cdots\cdots(2.11)$$

曲がり部

$$\left(\frac{(1/2)(q_c^2+q_l^2)}{2gb_{\mathrm{III}}^2h_{12}^2}+z_{12}+h_{12}\right)-\left(\frac{q_l^2}{2gb_{\mathrm{III}}^2h_4^2}+z_4+h_4\right)=H_l\fallingdotseq 0 \quad\cdots\cdots(2.12)$$

$$\left(\frac{q_m^2}{2gb_{\mathrm{IV}}^2h_4^2}+z_4+h_4\right)-\left(\frac{(1/2)(q_m^2+q_d^2)}{2gb_{\mathrm{IV}}^2h_{13}^2}+z_{13}+h_{13}\right)=H_m \quad\cdots\cdots(2.13)$$

合流部

$$\left(\frac{(1/2)(q_d^2+q_n^2)}{2gb_{\mathrm{IV}}^2h_{14}^2}+z_{14}+h_{14}\right)-\left(\frac{q_n^2}{2gb_{\mathrm{IV}}^2h_5^2}+z_5+h_5\right)=H_n\fallingdotseq 0 \quad\cdots\cdots(2.14)$$

$$\left(\frac{(1/2)(q_e^2+q_o^2)}{2gb_{\mathrm{V}}^2h_{15}^2}+z_{15}+h_{15}\right)-\left(\frac{q_o^2}{2gb_{\mathrm{V}}^2h_5^2}+z_5+h_5\right)=H_o\fallingdotseq 0 \quad\cdots\cdots(2.15)$$

$$\left(\frac{q_p^2}{2gb_{\mathrm{VI}}^2h_5^2}+z_5+h_5\right)-\left(\frac{(1/2)(q_p^2+q_f^2)}{2gb_{\mathrm{VI}}^2h_{16}^2}+z_{16}+h_{16}\right)=H_p \quad\cdots\cdots(2.16)$$

ここに，b：水路幅．

式 (c)：

$$\left.\begin{aligned}
H_a&=f_a\frac{q_a^2}{2\,gb_{\mathrm{I}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1h_1^2}+\frac{1}{R_7h_7^2}\right)l_a &&\cdots(3.\ 1)\\
H_b&=f_b\frac{q_b^2}{2\,gb_{\mathrm{II}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_8h_8^2}+\frac{1}{R_{10}h_{10}^2}\right)l_b &&\cdots(3.\ 2)\\
H_c&=f_c\frac{q_c^2}{2\,gb_{\mathrm{III}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{11}h_{11}^2}+\frac{1}{R_{12}h_{12}^2}\right)l_c &&\cdots(3.\ 3)\\
H_d&=f_d\frac{q_d^2}{2\,gb_{\mathrm{IV}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{13}h_{13}^2}+\frac{1}{R_{14}h_{14}^2}\right)l_d &&\cdots(3.\ 4)\\
H_e&=f_e\frac{q_e^2}{2\,gb_{\mathrm{V}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_9h_9^2}+\frac{1}{R_{15}h_{15}^2}\right)l_e &&\cdots(3.\ 5)\\
H_f&=f_f\frac{q_f^2}{2\,gb_{\mathrm{VI}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{16}h_{16}^2}+\frac{1}{R_6h_6^2}\right)l_f &&\cdots(3.\ 6)
\end{aligned}\right\}\text{水路部}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
H_g&=f_g\frac{q_g^2}{2\,gb_{\mathrm{I}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_7^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)=0 &&\cdots(3.\ 7)\\
H_h&=f_h\frac{q_h^2}{2\,gb_{\mathrm{V}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_9^2}\right) &&\cdots(3.\ 8)\\
H_i&=f_i\frac{q_i^2}{2\,gb_{\mathrm{II}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_8^2}\right) &&\cdots(3.\ 9)
\end{aligned}\right\}\text{分岐部}\\
&\left.\begin{aligned}
H_j&=f_j\frac{q_j^2}{2\,gb_{\mathrm{II}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_{10}^2}+\frac{1}{h_3^2}\right)=0 &&\cdots(3.10)\\
H_k&=f_k\frac{q_k^2}{2\,gb_{\mathrm{III}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_{11}^2}\right) &&\cdots(3.11)
\end{aligned}\right\}\text{曲がり部}\\
&\left.\begin{aligned}
H_l&=f_l\frac{q_l^2}{2\,gb_{\mathrm{III}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_{12}^2}+\frac{1}{h_4^2}\right)=0 &&\cdots(3.12)\\
H_m&=f_m\frac{q_m^2}{2\,gb_{\mathrm{IV}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_4^2}+\frac{1}{h_{13}^2}\right) &&\cdots(3.13)
\end{aligned}\right\}\text{曲がり部}\\
&\left.\begin{aligned}
H_n&=f_n\frac{q_n^2}{2\,gb_{\mathrm{IV}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_{14}^2}+\frac{1}{h_5^2}\right)=0 &&\cdots(3.14)\\
H_o&=f_o\frac{q_o^2}{2\,gb_{\mathrm{V}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_{15}^2}+\frac{1}{h_5^2}\right) &&\cdots(3.15)\\
H_p&=f_p\frac{q_p^2}{2\,gb_{\mathrm{VI}}^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_5^2}+\frac{1}{h_{16}^2}\right) &&\cdots(3.16)
\end{aligned}\right\}\text{合流部}
\end{aligned}\right\}\text{遷移部}$$

ここに，$f_a\sim f_f$：摩擦損失係数，$f_g\sim f_p$：分岐，曲がり，または合流による損失係数．ここに考えている系では仮定④より，$f_g=f_j=f_l=f_n=f_o=0$．

(2) 基礎方程式の行列表示

式 (1.1)～(1.16)：

式 (1.1)～(1.16) を接続行列 A を用いて行列表示すれば式（4）のとおりである．

式 (4) の左辺を接続行列 A とベクトル $\boldsymbol{q}$ で表わし，右辺をベクトル $\boldsymbol{Q}$ で表わせば，おのおのの次元は $A=A(16, 16)$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(16)$，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(16)$ である．ところで，前述したように有効な方程式は $16-1=15$ 個であるから接続行列の任意の 1 行は除去可能である．いま，最下流点⑥における連続の式を省けば，接続行列では第 6 行を取り除くことに相当する．この結果，境界流量を成分にもつ列ベクトル $\boldsymbol{Q}$ においても，第 6 行目の成分が取り除かれることになる．このような過程を経ても得られる方程式は式 (4) と同値である．よって，式 (1.1)～(1.16) の行列表示は次式のようになる．

$$A(15, 16)\cdot\boldsymbol{q}(16)=\boldsymbol{Q}(15) \qquad\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\begin{array}{r}
\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc} a&b&c&d&e&f&g&h&i&j&k&l&m&n&o&p\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&1\\
\hline
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1
\end{array}\right]\\
\boldsymbol{A}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
\begin{array}{r} a\\b\\c\\d\\e\\f\\g\\h\\i\\j\\k\\l\\m\\n\\o\\p\end{array}
\left[\begin{array}{c} q_a\\q_b\\q_c\\q_d\\q_e\\q_f\\q_g\\q_h\\q_i\\q_j\\q_k\\q_l\\q_m\\q_n\\q_o\\q_p\end{array}\right]\\
\boldsymbol{q}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{r} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16\end{array}
\left[\begin{array}{c} Q_1\\0\\0\\0\\0\\\boxed{Q_6}\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}\right]\\
\boldsymbol{Q}
\end{array}
\qquad\cdots\cdots\cdots(4)$$

一般的表示としては，

$$A(n-1,e)\cdot\boldsymbol{q}(e)=\boldsymbol{Q}(n-1) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ここに，$\boldsymbol{q}$：各枝で定義される流量を成分とする列ベクトルで次元は (e) である．ただし，e：枝数．

$\boldsymbol{Q}$：節点に対するシステム外部からの流入・流出流量を成分とする列ベクトルで，$(n-1)$ である．ただし，n：節点数．

以後，行列の次数表示において $n-1$ が用いられている場合，それは最下流点（ここでは節点⑥）に関する水理量が省かれていることを示している．

式 (2.1)～(2.16)：

式 (2.1)～(2.16) の行列表示にあたって，左辺を速度水頭の項と位置水頭の項とに分けて考える．

a) 速度水頭の項

前述した式の形では，遷移部の式における q^2 のあらわれ方に数学的な規則性が見い出せず，行列表示が困難であるので，遷移部の式を次のように変形する．

$$\left.\begin{aligned}
&g: \frac{(1/2)(q_a^2+q_g^2)}{2gb_{\mathrm{I}}^2h_7^2}-\frac{1}{2gh_2^2}\left(\frac{q_g^2}{b_{\mathrm{I}}^2}+\frac{q_h^2}{b_{\mathrm{V}}^2}+\frac{q_i^2}{b_{\mathrm{II}}^2}\right)+\frac{1}{2gh_2^2}\left(\frac{q_h^2}{b_{\mathrm{V}}^2}+\frac{q_i^2}{b_{\mathrm{II}}^2}\right) &&\cdots\cdots(7.\ 1)\\
&h: \frac{1}{2gh_2^2}\left(\frac{q_g^2}{b_{\mathrm{I}}^2}+\frac{q_h^2}{b_{\mathrm{V}}^2}+\frac{q_i^2}{b_{\mathrm{II}}^2}\right)-\frac{(1/2)(q_h^2+q_e^2)}{2gb_{\mathrm{V}}^2h_9^2}-\frac{1}{2gh_2^2}\left(\frac{q_g^2}{b_{\mathrm{I}}^2}+\frac{q_i^2}{b_{\mathrm{II}}^2}\right) &&\cdots\cdots(7.\ 2)\\
&i: \frac{1}{2gh_2^2}\left(\frac{q_g^2}{b_{\mathrm{I}}^2}+\frac{q_h^2}{b_{\mathrm{V}}^2}+\frac{q_i^2}{b_{\mathrm{II}}^2}\right)-\frac{(1/2)(q_i^2+q_b^2)}{2gb_{\mathrm{II}}^2h_8^2}-\frac{1}{2gh_2^2}\left(\frac{q_g^2}{b_{\mathrm{I}}^2}+\frac{q_h^2}{b_{\mathrm{V}}^2}\right) &&\cdots\cdots(7.\ 3)
\end{aligned}\right\}\ \text{分岐部}$$

$$\left.\begin{aligned}
&j: \frac{(1/2)(q_b^2+q_j^2)}{2gb_{\mathrm{II}}^2h_{10}^2}-\frac{1}{2gh_3^2}\left(\frac{q_j^2}{b_{\mathrm{II}}^2}+\frac{q_k^2}{b_{\mathrm{III}}^2}\right)+\frac{1}{2gh_3^2}\frac{q_k^2}{b_{\mathrm{III}}^2} &&\cdots\cdots(7.\ 4)\\
&k: \frac{1}{2gh_3^2}\left(\frac{q_j^2}{b_{\mathrm{II}}^2}+\frac{q_k^2}{b_{\mathrm{III}}^2}\right)-\frac{(1/2)(q_k^2+q_c^2)}{2gb_{\mathrm{III}}^2h_{11}^2}-\frac{1}{2gh_3^2}\frac{q_j^2}{b_{\mathrm{II}}^2} &&\cdots\cdots(7.\ 5)
\end{aligned}\right\}\ \text{曲がり部}$$

$$\left.\begin{aligned}
&l: \frac{(1/2)(q_c^2+q_l^2)}{2gb_{\mathrm{III}}^2h_{12}^2}-\frac{1}{2gh_4^2}\left(\frac{q_l^2}{b_{\mathrm{III}}^2}+\frac{q_m^2}{b_{\mathrm{IV}}^2}\right)+\frac{1}{2gh_4^2}\frac{q_m^2}{b_{\mathrm{IV}}^2} &&\cdots\cdots(7.\ 6)\\
&m: \frac{1}{2gh_4^2}\left(\frac{q_l^2}{b_{\mathrm{III}}^2}+\frac{q_m^2}{b_{\mathrm{IV}}^2}\right)-\frac{(1/2)(q_m^2+q_d^2)}{2gb_{\mathrm{IV}}^2h_{13}^2}-\frac{1}{2gh_4^2}\frac{q_l^2}{b_{\mathrm{III}}^2} &&\cdots\cdots(7.\ 7)
\end{aligned}\right\}\ \text{曲がり部}$$

$$\left.\begin{aligned}
&n: \frac{(1/2)(q_d^2+q_n^2)}{2gb_{\mathrm{IV}}^2h_{14}^2}-\frac{1}{2gh_5^2}\left(\frac{q_n^2}{b_{\mathrm{IV}}^2}+\frac{q_o^2}{b_{\mathrm{V}}^2}+\frac{q_p^2}{b_{\mathrm{VI}}^2}\right)+\frac{1}{2gh_5^2}\left(\frac{q_o^2}{b_{\mathrm{V}}^2}+\frac{q_p^2}{b_{\mathrm{VI}}^2}\right) &&\cdots\cdots(7.\ 8)\\
&o: \frac{(1/2)(q_e^2+q_o^2)}{2gb_{\mathrm{V}}^2h_{15}^2}-\frac{1}{2gh_5^2}\left(\frac{q_n^2}{b_{\mathrm{IV}}^2}+\frac{q_o^2}{b_{\mathrm{V}}^2}+\frac{q_p^2}{b_{\mathrm{VI}}^2}\right)+\frac{1}{2gh_5^2}\left(\frac{q_n^2}{b_{\mathrm{IV}}^2}+\frac{q_p^2}{b_{\mathrm{VI}}^2}\right) &&\cdots\cdots(7.\ 9)\\
&p: \underbrace{\frac{1}{2gh_5^2}\left(\frac{q_n^2}{b_{\mathrm{IV}}^2}+\frac{q_o^2}{b_{\mathrm{V}}^2}+\frac{q_p^2}{b_{\mathrm{VI}}^2}\right)-\frac{(1/2)(q_p^2+q_f^2)}{2gb_{\mathrm{VI}}^2h_{16}^2}}_{\text{Ⓐ}}\underbrace{-\frac{1}{2gh_5^2}\left(\frac{q_n^2}{b_{\mathrm{IV}}^2}+\frac{q_o^2}{b_{\mathrm{V}}^2}\right)}_{\text{Ⓑ}} &&\cdots\cdots(7.10)
\end{aligned}\right\}\ \text{合流部}$$

枝 a, b, c, d, e, f における各項および枝 $g, h, \cdots, p$ のⒶの各項に注目すると，どの項にも q^2/b^2 が和の形で現われている．これは行列 $|A|$ を用いて処理できる．さらに，各枝において $1/h^2$ が差の形で現われているが，これは行列 A^* を用いて処理できる．ここに，

$|A|$：A の各成分の絶対値を成分とする行列で，各節点についてその節点に接続している枝に定義される物理量の和をとる性質をもつ．

A^*：A の転置行列のことで，各枝についてその両端の節点に定義される物理量の差をとる性質をもつ．

次に，流量の平均化のために用いた 1/2 なる定数は，行列 M にて処理する．ここに，

M：$(n-1,\ n-1)$ なる対角行列で，その対角成分は流入，流出点および分岐，曲がり，合流に対して 1，その他の節点に対しては 1/2 である．ただし，最下流点に相当する第 6 行と第 6 列が除かれている．

さらに，次のような行列を定義する．

X_2：$(n-1,\ n-1)$ なる対角行列で，$1/h^2$ を対角成分にもつ．

q：(e,e) なる対角行列で，q を対角成分にもつ．

B：(e,e) なる対角行列で，$1/b^2$ を対角成分にもつ．

さて，$A^*\cdot M\cdot X_2$, $|A|\cdot B\cdot q\cdot\boldsymbol{q}$ を計算すると式 (8)，式

$$|A|\cdot B\cdot q\cdot\boldsymbol{q}=\begin{array}{r}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16\end{array}\left[\begin{array}{l}
q_a^2/b_{\mathrm{I}}^2\\
q_g^2/b_{\mathrm{I}}^2+q_h^2/b_{\mathrm{V}}^2+q_i^2/b_{\mathrm{II}}^2\\
q_j^2/b_{\mathrm{II}}^2+q_k^2/b_{\mathrm{III}}^2\\
q_l^2/b_{\mathrm{III}}^2+q_m^2/b_{\mathrm{IV}}^2\\
q_n^2/b_{\mathrm{IV}}^2+q_o^2/b_{\mathrm{V}}^2+q_p^2/b_{\mathrm{VI}}^2\\
\boxed{q_f^2/b_{\mathrm{VI}}^2}\\
q_a^2/b_{\mathrm{I}}^2+q_g^2/b_{\mathrm{I}}^2\\
q_b^2/b_{\mathrm{II}}^2+q_i^2/b_{\mathrm{II}}^2\\
q_e^2/b_{\mathrm{V}}^2+q_h^2/b_{\mathrm{V}}^2\\
q_b^2/b_{\mathrm{II}}^2+q_j^2/b_{\mathrm{II}}^2\\
q_c^2/b_{\mathrm{III}}^2+q_k^2/b_{\mathrm{III}}^2\\
q_c^2/b_{\mathrm{III}}^2+q_l^2/b_{\mathrm{III}}^2\\
q_d^2/b_{\mathrm{IV}}^2+q_m^2/b_{\mathrm{IV}}^2\\
q_d^2/b_{\mathrm{IV}}^2+q_n^2/b_{\mathrm{IV}}^2\\
q_e^2/b_{\mathrm{V}}^2+q_o^2/b_{\mathrm{V}}^2\\
q_f^2/b_{\mathrm{VI}}^2+q_p^2/b_{\mathrm{VI}}^2
\end{array}\right] \cdots(9)$$

$A^*\cdot M\cdot X_2$

$$
=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \\
\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i\\ j\\ k\\ l\\ m\\ n\\ o\\ p \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{1}{h_1^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1/2}{h_7^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_8^2} & \cdot & -\frac{1/2}{h_{10}^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_{11}^2} & -\frac{1/2}{h_{12}^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_{13}^2} & -\frac{1/2}{h_{14}^2} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_9^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1/2}{h_{15}^2} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{h_6^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_{16}^2} \\
\cdot & -\frac{1}{h_2^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_7^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{h_2^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1/2}{h_9^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{h_2^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1/2}{h_8^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -\frac{1}{h_3^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_{10}^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{h_3^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1/2}{h_{11}^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{h_4^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_{12}^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{h_4^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1/2}{h_{13}^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{h_5^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_{14}^2} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{h_5^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1/2}{h_{15}^2} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{h_5^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1/2}{h_{16}^2}
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad\cdots\cdots(8)
$$

(9) のようになる．

このようにして得られる $A^*\cdot M\cdot X_2$ と $|A|\cdot B\cdot q\cdot \boldsymbol{q}$ の積をつくり，さらに $1/2g$ を掛けると次の列ベクトルが得られる．

$$Y_1=\frac{1}{2g}A^*\cdot M\cdot X_2\cdot|A|\cdot B\cdot q\cdot \boldsymbol{q}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

この Y_1 には，式 (2.1)～(2.16) の速度水頭の項のうち，遷移部のⒷおよび節点⑥に関係する $\left(-\frac{q_f^2}{2gb_{\mathrm{VI}}^2h_6^2}\right)$ の項，以外の項が行列表示されている．そこで，Y_1 に現われない項のうち，まず遷移部のⒷについては以下のように考える．

K_1, K_2 なる行列を次のように定義する．

K_1：遷移部のサブシステムに相当する成分が 1 で，他の成分はすべて 0 である行列で，$(e,\ n-1)$ である (式 (11))．

K_2：遷移部のサブシステムに相当する成分が次のような値をもち，他の成分はすべて 0 である行列で，(e, e) である (式 (12))．

行列 K_1, K_2 は，おのおのの遷移部に対応するサブ・マトリックスと考えて 1 組の unit として使用するのが便利である．ただし，K_2 は有向グラフの向きと枝の記号に注意して作成すべきである．

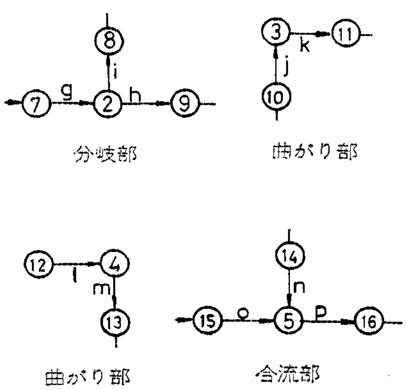
さらに，X_2 なるベクトルを定義する．

X_2：$1/h^2$ を成分にもつ列ベクトルで，$(n-1)$ である．

$$
K_1=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \\
\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i\\ j\\ k\\ l\\ m\\ n\\ o\\ p \end{array} &
\begin{bmatrix}
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \text{分岐部} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \Downarrow & \text{曲がり部} & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & \text{曲がり部} & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & \Downarrow & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & \Downarrow & \text{合流部} & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & \Downarrow & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad\cdots\cdots(11)
$$

分岐部⇓　曲がり部⇓　曲がり部⇓　合流部⇓

$$K_2=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n & o & p \end{array} \\ \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i\\ j\\ k\\ l\\ m\\ n\\ o\\ p \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} &&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&&&&&1&1&&&&&&& \\ &&&&&&-1&&-1&&&&&&& \\ &&&&&&-1&-1&&&&&&&& \\ &&&&&&&&&&1&&&&& \\ &&&&&&&&&-1&&&&&& \\ &&&&&&&&&&&&1&&& \\ &&&&&&&&&&&-1&&&& \\ &&&&&&&&&&&&&&1&1 \\ &&&&&&&&&&&&&1&&1 \\ &&&&&&&&&&&&&-1&-1& \end{array}\right] \end{array} \qquad \cdots\cdots(12)$$



ここで，$K_1\cdot\boldsymbol{X}_2$ を計算して得られる列ベクトルを対角行列化すれば次のようになる．

$$K_1\cdot\boldsymbol{X}_2=\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i\\ j\\ k\\ l\\ m\\ n\\ o\\ p \end{array}\left[\begin{array}{c} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{h_2^2}\\ \frac{1}{h_2^2}\\ \frac{1}{h_2^2}\\ \frac{1}{h_3^2}\\ \frac{1}{h_3^2}\\ \frac{1}{h_4^2}\\ \frac{1}{h_4^2}\\ \frac{1}{h_5^2}\\ \frac{1}{h_5^2}\\ \frac{1}{h_5^2} \end{array}\right]\Rightarrow\overline{K_1\cdot\boldsymbol{X}_2}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n & o & p \end{array} \\ \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i\\ j\\ k\\ l\\ m\\ n\\ o\\ p \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0&&&&&&&&&&&&&&& \\ &0&&&&&&&&&&&&&& \\ &&0&&&&&&&&&&&&& \\ &&&0&&&&&&&&&&&& \\ &&&&0&&&&&&&&&&& \\ &&&&&0&&&&&&&&&& \\ &&&&&&\frac{1}{h_2^2}&&&&&&&&& \\ &&&&&&&\frac{1}{h_2^2}&&&&&&&& \\ &&&&&&&&\frac{1}{h_2^2}&&&&&&& \\ &&&&&&&&&\frac{1}{h_3^2}&&&&&& \\ &&&&&&&&&&\frac{1}{h_3^2}&&&&& \\ &&&&&&&&&&&\frac{1}{h_4^2}&&&& \\ &&&&&&&&&&&&\frac{1}{h_4^2}&&& \\ &&&&&&&&&&&&&\frac{1}{h_5^2}&& \\ &&&&&&&&&&&&&&\frac{1}{h_5^2}& \\ &&&&&&&&&&&&&&&\frac{1}{h_5^2} \end{array}\right] \end{array} \qquad \cdots\cdots(13)$$

ここに，“——”は列ベクトルの対角行列化を示す．
また，$K_2\cdot B\cdot q\cdot\boldsymbol{q}$ は式 (14) のようになる．

よって，遷移部のⒷの項は次のように表示できる．

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Y}_2&=\frac{1}{2g}\cdot\overline{K_1\cdot\boldsymbol{X}_2}\cdot K_2\cdot B\cdot q\cdot\boldsymbol{q} \\ &=\frac{1}{2g}\cdot K_2\cdot B\cdot q\cdot q\cdot K_1\cdot\boldsymbol{X}_2 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(15)$$

次に，節点⑥に関する項について考える．
D_1 なる行列を定義する．

D_1：最下流点に接続する枝（節点⑥—枝 f）に対応した成分（f 行 f 列つまり第6行第6列）においてのみ $\frac{1}{b^2h^2}$ なる値（ここでは $\frac{1}{b_{\mathrm{VI}}{}^2h_6{}^2}$）をもち，その他の成分はすべてゼロである行列で，$(e, e)$

$$K_2 \cdot B \cdot q \cdot \boldsymbol{q} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \\ k \\ l \\ m \\ n \\ o \\ p \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_h^2/b_{\mathrm{V}}^2 + q_i^2/b_{\mathrm{II}}^2 \\ -q_g^2/b_{\mathrm{I}}^2 - q_i^2/b_{\mathrm{II}}^2 \\ -q_g^2/b_{\mathrm{I}}^2 - q_h^2/b_{\mathrm{V}}^2 \\ q_k^2/b_{\mathrm{III}}^2 \\ -q_j^2/b_{\mathrm{II}}^2 \\ q_m^2/b_{\mathrm{IV}}^2 \\ -q_l^2/b_{\mathrm{III}}^2 \\ q_o^2/b_{\mathrm{V}}^2 + q_p^2/b_{\mathrm{VI}}^2 \\ q_n^2/b_{\mathrm{IV}}^2 + q_p^2/b_{\mathrm{VI}}^2 \\ -q_n^2/b_{\mathrm{IV}}^2 - q_o^2/b_{\mathrm{V}}^2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(14)$$

である．

これを用いて，この項は次のように表示できる．

$$\boldsymbol{Y}_3 = \frac{1}{2g} \cdot D_1 \cdot q \cdot \boldsymbol{q} \quad \cdots\cdots(16)$$

以上より，速度水頭の項の差の行列表示は次のようになる．

$$\boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{Y}_3 = \frac{1}{2g} \cdot A^*(e, n-1) \cdot M(n-1, n-1) \cdot X_2(n-1, n-1) \cdot |A(n-1, e)| \cdot B(e, e) \cdot q(e, e) \cdot \boldsymbol{q}(e) + \frac{1}{2g} \cdot \overline{K_1(e, n-1) \cdot X_2(n-1)} \cdot K_2(e, e) \cdot B(e, e) \cdot q(e, e) \cdot \boldsymbol{q}(e) - \frac{1}{2g} \cdot D_1(e, e) \cdot q(e, e) \cdot \boldsymbol{q}(e) \quad \cdots\cdots(17)$$

b) 位置水頭の項

河床高さと水深の和の項が差の形式をとっているので，これらは前述の A^* を用いて処理できる．

$$\boldsymbol{Y}_4 = A^* \cdot \{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{h}\} \quad \cdots\cdots(18)$$

ここに，

$\boldsymbol{z}$：z を成分とする列ベクトルで，$(n-1)$ である．

$\boldsymbol{h}$：h を成分とする列ベクトルで，$(n-1)$ である．

ところが，$\boldsymbol{Y}_4$ には節点⑥に関する $\{-(z_6+h_6)\}$ の項が現われないので，次に示すベクトル $\boldsymbol{D}_2$ を用いる．

$\boldsymbol{D}_2$：最下流点に接続する枝に対応した成分においてのみ $(z+h)$ なる値（ここでは z_6+h_6）をもち，その他の成分はすべて 0 である列ベクトルで，(e) である．

以上より，位置水頭の差の行列表示は次のようになる．

$$\boldsymbol{Y}_4 - \boldsymbol{D}_2 = A^*(e, n-1) \cdot \{\boldsymbol{z}(n-1) + \boldsymbol{h}(n-1)\} - \boldsymbol{D}_2(e) \quad \cdots\cdots(19)$$

c) 損失水頭の項

右辺の損失水頭の項は，$\boldsymbol{H}$ なるベクトルを用いて処理できる．ここに，

$\boldsymbol{H}$：H を成分とする列ベクトルで，(e) である．

以上まとめると，式 (2.1)～(2.16) は次のように表示できる．行列の次数は略する．

$$\frac{1}{2g} \cdot A^* \cdot M \cdot X_2 \cdot |A| \cdot B \cdot q \cdot \boldsymbol{q} + \frac{1}{2g} \cdot \overline{K_1 \cdot X_2} \cdot K_2 \cdot B \cdot q \cdot \boldsymbol{q} + A^*(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h}) - \left(\frac{1}{2g} \cdot D_1 \cdot q \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{D}_2\right) = \boldsymbol{H} \quad \cdots\cdots(20)$$

式 (3.1)～(3.16)：

式 (3.1)～(3.16) の行列表示を考える．まず次の行列を定義する．

F：(e, e) なる対角行列で，各枝の損失係数を対角成分にもつ．

L：(e, e) なる対角行列で，各枝の l を対角成分にもつ．ただし，遷移部の枝の長さは 1 とする．

R：$(n-1, n-1)$ なる対角行列で，各節点における径深 R の逆数 $1/R$ を対角成分にもつ．

式 (3.1)～(3.16) の右辺のカッコ内以外は，これらの行列を用いて $\frac{1}{4g} \cdot B \cdot F \cdot L \cdot |q| \cdot \boldsymbol{q}$ と表示できる．ここに，$B \cdot F \cdot L \cdot |q| \cdot q$ は次の対角行列である．また，$q^2 = |q| \cdot q$ としたのは，損失水頭の増加方向と流量の方向とは一致しなければならないからである（式 (21)）．

次に，式 (3.1)～(3.16) の右辺のカッコ内の行列表示を考える．まず，次の行列を定義する．

$|A^*|^U$：A^* の各成分の絶対値を成分にもつ行列 $|A^*|$ において，遷移部の枝に対応する行をすべてゼロとした行列で，$(e, n-1)$ である．

$|A^*|^L$：$|A^*|$ において，遷移部以外の枝に対応する行をすべてゼロとした行列で，$(e, n-1)$ である．

ここに，$|A^*|$ は次のような行列であって，各枝についてその両端の節点に定義される物理量の和をとる性質をもっている（式 (22)）．

この行列 $|A^*|$ において，U の部分の成分をすべてゼロにした行列が $|A^*|^L$ であり，L の部分をすべてゼロにした行列が $|A^*|^U$ である．

水路部に関しては，すべて $1/(Rh^2)$ が和の形で，また遷移部に関しては，すべて $1/h^2$ が和の形でカッコ内に含まれている．よって，式 (3.1)～(3.16) の右辺のカッコ内は次のように行列表示される．

$$\boldsymbol{Y}_5 = |A^*|^U \cdot R \cdot \boldsymbol{X}_2 + |A^*|^L \cdot \boldsymbol{X}_2 = \{|A^*|^U \cdot R + |A^*|^L\} \boldsymbol{X}_2 \quad \cdots\cdots(23)$$

ところが，$\boldsymbol{Y}_5$ においても最下流点⑥に関する項 $1/(R_6 h_6^2)$ が現われていないので，次のベクトル $\boldsymbol{C}$ を用いる．

$\boldsymbol{C}$：最下流点に接続する枝に対応した成分においてのみ $1/(Rh^2)$ なる値（ここでは $1/(R_6 h_6^2)$）をも

$$
B\cdot F\cdot L\cdot|q|\cdot q=
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n & o & p \end{array} \\
\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i\\ j\\ k\\ l\\ m\\ n\\ o\\ p \end{array} &
\begin{bmatrix}
f_a\frac{|q_a|\cdot q_a}{b_{\mathrm{I}}^2}\cdot l_a & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & f_b\frac{|q_b|\cdot q_b}{b_{\mathrm{II}}^2}\cdot l_b & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & f_c\frac{|q_c|\cdot q_c}{b_{\mathrm{III}}^2}\cdot l_c & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & f_d\frac{|q_d|\cdot q_d}{b_{\mathrm{IV}}^2}\cdot l_d & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & f_e\frac{|q_e|\cdot q_e}{b_{\mathrm{V}}^2}\cdot l_e & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & f_f\frac{|q_f|\cdot q_f}{b_{\mathrm{VI}}^2}\cdot l_f & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & f_g\frac{|q_g|\cdot q_g}{b_{\mathrm{I}}^2} & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & f_h\frac{|q_h|\cdot q_h}{b_{\mathrm{V}}^2} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & f_i\frac{|q_i|\cdot q_i}{b_{\mathrm{II}}^2} & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & f_j\frac{|q_j|\cdot q_j}{b_{\mathrm{II}}^2} & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & f_k\frac{|q_k|\cdot q_k}{b_{\mathrm{III}}^2} & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & f_l\frac{|q_l|\cdot q_l}{b_{\mathrm{III}}^2} & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & f_m\frac{|q_m|\cdot q_m}{b_{\mathrm{IV}}^2} & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & f_n\frac{|q_n|\cdot q_n}{b_{\mathrm{IV}}^2} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & f_o\frac{|q_o|\cdot q_o}{b_{\mathrm{V}}^2} & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & f_p\frac{|q_p|\cdot q_p}{b_{\mathrm{VI}}^2}
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad\cdots\cdots(21)
$$

$$
|A^*|=
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \\
\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i\\ j\\ k\\ l\\ m\\ n\\ o\\ p \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccc|c|cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} U \\ \\ L \end{array}
\quad\cdots\cdots(22)
$$

ち，その他の成分はすべてゼロである列ベクトルで，(e) である．

よって，カッコ内の行列表示は次のようになる．

$$
\boldsymbol{Y}_5+\boldsymbol{C}=\{|A^*(e,\ n-1)|^{U}\cdot R(n-1,\ n-1)+|A^*(e,\ n-1)|^{L}\}\cdot\boldsymbol{X}_2(n-1)+\boldsymbol{C}(e)\quad\cdots(24)
$$

以上まとめると，式 (3.1)～(3.16) は次のように表示できる．行列の次数は略する．

$$
\boldsymbol{H}=\frac{1}{4g}\cdot B\cdot F\cdot L\cdot|q|\cdot q\cdot[\{|A^*|^{U}\cdot R+|A^*|^{L}\}\cdot\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{C}]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(25)
$$

結局，開水路網定常不等流の，行列表示による基礎方程式は，式 (6)，(20)，(25) の3式である．

4. 基礎方程式の解法

(1) 基礎方程式の線形化

基礎式 (6)，(20)，(25) から，各枝の流量および各節点の水深を求めたい．最下流点（節点⑥）における水深を境界条件として与えるとすれば，未知量の数は流量 q が e 個，水深 h が $(n-1)$ 個，損失水頭 H が e 個の合計 $(2e+n-1)$ 個，一方，式数は (6) が $(n-1)$ 個，(20) が e 個，(25) が e 個の合計 $(2e+n-1)$ 個なので解は求め得る．しかし，式 (6) は1次方程式，(20) および (25) は高次方程式であり，一般にこれらの混合連立方程式を直接解くのは面倒である．ここで用いる解法は Newton の逐次近似法である[11]．

2元高次方程式 $f(x, y)=0$ を Newton 法により線形化すれば，x, y の近似値 x_1, y_1 を用いて次式が得られる．

$$x\cdot f_x(x_1, y_1)+y\cdot f_y(x_1, y_1)=x_1\cdot f_x(x_1, y_1)+y_1\cdot f_y(x_1, y_1)-f(x_1, y_1) \quad \cdots\cdots(26)$$

この式 (26) により反復計算をすればよい．

式 (20) の線形化：

式 (20) は次のようであった．

$$\frac{1}{2g}\cdot(A^*\cdot M\cdot X_2\cdot|A|\cdot B-D_1)\cdot q\cdot \boldsymbol{q}+\frac{1}{2g}\cdot\overline{K_1\cdot \boldsymbol{X_2}}\cdot K_2\cdot B\cdot q\cdot \boldsymbol{q}+A^*(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{H}=0$$

$$\frac{1}{2g}\cdot\overline{K_1\cdot \boldsymbol{X_2}}\cdot K_2\cdot B\cdot q\cdot \boldsymbol{q} \quad \text{または} \Updownarrow \quad +\frac{1}{2g}\cdot K_2\cdot B\cdot q\cdot q\cdot K_1\cdot \boldsymbol{X}_2$$

式 (26) において x を q，y を h と考えると，

$x\cdot f_x(x_1, y_1)$：

$$\frac{1}{g}(A^*\cdot M\cdot X_2'\cdot|A|\cdot B-D_1)\cdot q'\boldsymbol{q}+\frac{1}{g}\overline{\cdot K_1\cdot \boldsymbol{X_2}'}\cdot K_2\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}+W_1$$

$y\cdot f_y(x_1, y_1)$：

$$-\frac{1}{g}A^*\cdot M\cdot X_3'\cdot h\cdot|A|\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'-\frac{1}{g}K_2\cdot B\cdot q'\cdot q'\cdot K_1\cdot X_3'\cdot \boldsymbol{h}+A^*\cdot \boldsymbol{h}+W_2$$

$x_1\cdot f_x(x_1, y_1)$：

$$\frac{1}{g}(A^*\cdot M\cdot X_2'\cdot|A|\cdot B-D_1)\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'+\frac{1}{g}\overline{K_1\cdot \boldsymbol{X_2}'}\cdot K_2\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'+W_1'$$

$y_1\cdot f_y(x_1, y_1)$：

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{g}A^*\cdot M\cdot X_3'\cdot h'|A|\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'-\frac{1}{g}K_2\cdot B\cdot q'\cdot q'\cdot K_1\cdot X_3'\cdot \boldsymbol{h}'+A^*\cdot \boldsymbol{h}'+W_2'\\&=-\frac{1}{g}A^*\cdot M\cdot X_2'\cdot|A|\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'-\frac{1}{g}K_2\cdot B\cdot q'\cdot q'\cdot K_1\cdot \boldsymbol{X}_2'+A^*\cdot \boldsymbol{h}'+W_2'\end{aligned}$$

$f(x_1, y_1)$：

$$\frac{1}{2g}(A^*\cdot M\cdot X_2'\cdot|A|\cdot B-D_1)\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'+\frac{1}{2g}\overline{K_1\cdot \boldsymbol{X_2}'}\cdot K_2\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'+A^*(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h}')-\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{H}$$

ここに，X_3, h は次に示す行列である．

X_3：$(n-1, n-1)$ なる対角行列で，$1/h^3$ を対角成分にもつ．

h：$(n-1, n-1)$ なる対角行列で，h を対角成分にもつ．

また，W_1, W_2 はそれぞれ $\boldsymbol{H}$ に対する $x\cdot f_x(x_1, y_1)$，$y\cdot f_y(x_1, y_1)$ を示す列ベクトルであり，行列記号の右肩のダッシュ記号は近似値を示すものである．よって，式 (20) は次のように線形化される．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{g}(A^*\cdot M\cdot X_2'\cdot|A|\cdot B-D_1)\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}-\frac{1}{g}A^*\cdot M\cdot X_3'\cdot h\cdot|A|\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'+\frac{1}{g}\overline{K_1\cdot \boldsymbol{X_2}'}\cdot K_2\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}\\&-\frac{1}{g}K_2\cdot B\cdot q'\cdot q'\cdot K_1\cdot X_3'\cdot \boldsymbol{h}+A^*(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h})+W_1+W_2\\&=-\frac{1}{2g}A^*\cdot M\cdot X_2'\cdot|A|\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'-\frac{1}{2g}\cdot\overline{K_1\cdot \boldsymbol{X_2}'}\cdot K_2\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'-\frac{1}{2g}D_1\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'+\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{H}+W_1'+W_2'\end{aligned} \quad \cdots\cdots(27)$$

式 (27) において右辺は $\boldsymbol{H}$ を除いてすべて既知量であり，左辺では未知量は第1項の $\boldsymbol{q}$，第2項の h，第3項の $\boldsymbol{q}$，第4項の $\boldsymbol{h}$，第5項の $\boldsymbol{h}$ および (W_1+W_2) である．そこで，次に示す同値関係を用いると第2項の未知量は $\boldsymbol{h}$ となり，したがって左辺の未知量は $\boldsymbol{h}$ と $\boldsymbol{q}$ および (W_1+W_2) となる．

$$\frac{1}{g}A^*\cdot M\cdot X_3'\cdot h\cdot|A|\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}' \Leftrightarrow \frac{1}{g}A^*\cdot M\cdot X_3'\cdot\overline{|A|\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'}\cdot \boldsymbol{h} \quad \cdots\cdots(28)$$

以後，式 (27) を用いる際，左辺第2項は式 (28) の後

者を用いることにする．

式 (25) の線形化：

式 (25) は次のようであった．

$$\frac{1}{4g}B\cdot F\cdot L\cdot|q|\cdot q\cdot[\{|A^*|^U\cdot R+|A^*|^L\}\cdot \boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{C}]-\boldsymbol{H}=0$$

式 (26) において，

$x\cdot f_x(x_1,\ y_1)$：

$$\frac{1}{4g}\cdot 2\cdot B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q\cdot[\{|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L\}\cdot \boldsymbol{X}_2'+\boldsymbol{C}]+W_1$$
$$=\frac{1}{4g}\cdot 2\cdot B\cdot F\cdot L\cdot\overline{(|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L)\cdot \boldsymbol{X}_2'+\boldsymbol{C}}\cdot|q'|\cdot \boldsymbol{q}+W_1$$

$y\cdot f_y(x_1,\ y_1)$：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\dfrac{1}{R}\right)=-\dfrac{1}{h^2}$ だから，

$$\frac{1}{4g}B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q'\cdot[|A^*|^U\cdot(-X_2')\cdot h\cdot \boldsymbol{X}_2'+\{|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L\}\cdot(-2\,X_3')\cdot \boldsymbol{h}]+W_2$$
$$=\frac{1}{4g}B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q'\cdot[-|A^*|^U\cdot X_2'\cdot X_2'\cdot \boldsymbol{h}-2\cdot\{|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L\}\cdot X_3'\cdot \boldsymbol{h}]+W_2$$
$$=\frac{1}{4g}B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q'\cdot[-2\{|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L\}\cdot X_3'-|A^*|^U\cdot X_4']\cdot \boldsymbol{h}+W_2$$

ここに，X_4 は次に示す行列である．

X_4：$(n-1,\ n-1)$ なる対角行列で，$1/h^4$ を対角成分にもつ．

$x_1\cdot f_x(x_1,\ y_1)$：

$$\frac{1}{4g}\cdot 2\cdot B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q'\cdot[\{|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L\}\cdot \boldsymbol{X}_2'+\boldsymbol{C}]+W_1'$$

$y_1\cdot f_y(x_1,\ y_1)$：

$$\frac{1}{4g}\cdot B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q'\cdot[-2\{|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L\}\cdot X_3'-|A^*|^U\cdot X_4']\cdot \boldsymbol{h}'+W_2'$$

$f(x_1,\ y_1)$：

$$\frac{1}{4g}\cdot B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q'\cdot[\{|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L\}\cdot \boldsymbol{X}_2'+\boldsymbol{C}]-\boldsymbol{H}$$

よって，式 (25) の線形化は，

$$\frac{1}{4g}B\cdot F\cdot L\cdot[2\overline{(|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L)\cdot \boldsymbol{X}_2'+\boldsymbol{C}}\cdot|q'|\cdot \boldsymbol{q}-|q'|\cdot q'\cdot\{2(|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L)\cdot X_3'+|A^*|^U\cdot X_4'\}\cdot \boldsymbol{h}]+W_1+W_2$$
$$=-\frac{1}{4g}B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q'\cdot\{(|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L)\cdot \boldsymbol{X}_2'+|A^*|^U\cdot \boldsymbol{X}_3'-\boldsymbol{C}\}+\boldsymbol{H}+W_1'+W_2' \quad\cdots\cdots(29)$$

式 (29) において右辺は $\boldsymbol{H}$ を除いてすべて既知量であり，左辺では未知量は $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{h}$ および (W_1+W_2) である．

ここで，式 (29) に含まれている R' つまり R について補足しておく．行列 R は次に示す行列 X_1, B_0 を用いて，

$$R=X_1+2\,B_0$$

X_1：$(n-1,\ n-1)$ なる対角行列で，$1/h$ を対角成分にもつ．

B_0：$(n-1,\ n-1)$ なる対角行列で，$1/b$ を対角成分にもつ．

以前に定義した行列の中に B_0 と同じく，水路幅 b に関連したものとして B があった．B は $(e,\ e)$ 行列であり，B_0 は $(n-1,\ n-1)$ 行列であるので，成分の値も，またその配列の仕方も異なっている．なぜなら，B は枝に，B_0 は節点に対する行列だからである．したがって，遷移部の節点（節点 ②, ③, ④, ⑤）に対する B_0 の成分の値は，仮定②によって，各遷移部に集まってきている水路の幅が等しい場合を除いて定めることはできないことになる．しかしながら大変好都合なことに，遷移部の節点における R の成分$\left(\dfrac{1}{R_2},\dfrac{1}{R_3},\dfrac{1}{R_4},\dfrac{1}{R_5}\right)$は，$|A^*|^U$ と R の積の行列演算を行えば消えてしまう．ゆえに，行列 B_0 を定義する際，遷移部の節点に対する成分の値は自由である．

結局，直接計算に用いる基本式は式 (6)，式 (28) を考慮に入れた式 (27)，および式 (29) の 3 式である．

(2) 水深計算式および流量計算式の誘導

式 (27) において，

$$P=(A^*\cdot M\cdot X_2'|A|\cdot B-D_1)\cdot q'+\overline{K_1\cdot X_2'}\cdot K_2\cdot B\cdot q' \quad\cdots\cdots(30)$$
$$Q=A^*\cdot M\cdot X_3'\cdot\overline{|A|\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'}+K_2\cdot B\cdot q'\cdot q'\cdot K_1\cdot X_3'-g\cdot A^* \quad\cdots\cdots(31)$$
$$\boldsymbol{O}=-\frac{1}{2}A^*\cdot M\cdot X_2'\cdot|A|\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'-\frac{1}{2}\overline{K_1\cdot X_2'}\cdot K_2\cdot B\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'-\frac{1}{2}D_1\cdot q'\cdot \boldsymbol{q}'+g\cdot \boldsymbol{D}_2-g\cdot A^*\cdot \boldsymbol{z} \quad\cdots\cdots(32)$$

とおけば，式 (27) は次のようになる．ここに，P は $(e,\ e)$，Q は $(e,\ n-1)$，$\boldsymbol{O}$ は (e) なる行列あるいはベクトル．

$$P\cdot \boldsymbol{q}-Q\cdot \boldsymbol{h}+g\cdot(W_1+W_2)=\boldsymbol{O}+g\cdot \boldsymbol{H}+g\cdot(W_1'+W_2') \quad\cdots\cdots(33)$$

式 (29) において，

$$S=\frac{1}{2}B\cdot F\cdot L\cdot\overline{(|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L)\cdot \boldsymbol{X}_2'+\boldsymbol{C}\cdot|q'|} \quad\cdots\cdots(34)$$

$$T=\frac{1}{4}B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q'\cdot\{2\cdot(|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L)\cdot X_3'+|A^*|^U\cdot X_4'\}\cdots\cdots(35)$$

$$\boldsymbol{U}=-\frac{1}{4}B\cdot F\cdot L\cdot|q'|\cdot q'\cdot\{(|A^*|^U\cdot R'+|A^*|^L)\cdot \boldsymbol{X}_2'+|A^*|^U\cdot \boldsymbol{X}_3'-\boldsymbol{C}\}\cdots\cdots(36)$$

とおけば，式 (29) は次のようになる．ここに，S は (e, e), T は $(e, n-1)$, $\boldsymbol{U}$ は (e) なる行列あるいはベクトル．

$$S\cdot\boldsymbol{q}-T\cdot\boldsymbol{h}+g\cdot(W_1+W_2)=\boldsymbol{U}+g\cdot\boldsymbol{H}+g\cdot(W_1'+W_2')\cdots\cdots(37)$$

式 (33), (37) より

$$(P-S)\cdot\boldsymbol{q}-(Q-T)\cdot\boldsymbol{h}=\boldsymbol{O}-\boldsymbol{U}\cdots\cdots(38)$$

ここで，$P-S=I$, $Q-T=J$, $\boldsymbol{O}-\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}$ とおくと，

$$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{q}-J\cdot\boldsymbol{h}=\boldsymbol{V}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{q}=\boldsymbol{I}^{-1}\cdot(J\cdot\boldsymbol{h}+\boldsymbol{V})\cdots\cdots(39)$$

式 (39) を式 (6) に代入すると，

$$A\cdot\{I^{-1}\cdot(J\cdot\boldsymbol{h}+\boldsymbol{V})\}=\boldsymbol{Q}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{h}=(A\cdot I^{-1}\cdot J)^{-1}\cdot(\boldsymbol{Q}-A\cdot I^{-1}\cdot\boldsymbol{V})\cdots\cdots(40)$$

結局，式 (40) が水深の計算式であり，水深が求まれば式 (39) から流量が求まる．

(3) 計算機プログラム

input data :

A……………節点・枝接続行列．

$\boldsymbol{z}, L, B, B_0$…水路固有の形状に関するベクトルあるいは行列．

F……………損失係数に関する行列．

$\boldsymbol{Q}$……………境界流量に関するベクトル．

$D_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{C}$ …最下流点に関する行列あるいはベクトル．

M, K_1, K_2…解析上，導入された行列．

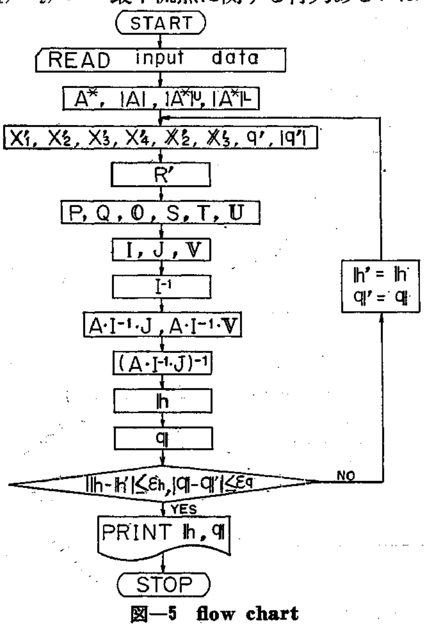
$\boldsymbol{h}', \boldsymbol{q}'$ ………$\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}$ の近似値に関するベクトル．

$\varepsilon_h, \varepsilon_q$ ………収束判定値に関する行列．

output data :

$\boldsymbol{h}$ および $\boldsymbol{q}$

flow chart は 図—5 のごとくである．



図—5 flow chart

(4) 数値計算例

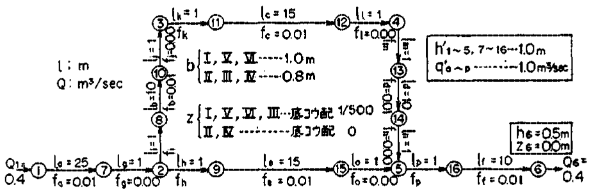
a) 計 算 例

本文に提示した計算法の適用性をしらべるために，次の条件において計算を行った．

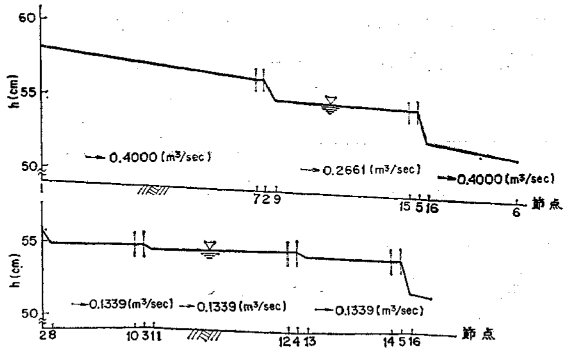
例—1：図—6(a) に示す開水路網．

例—2：図—7(a) に示す開水路網．

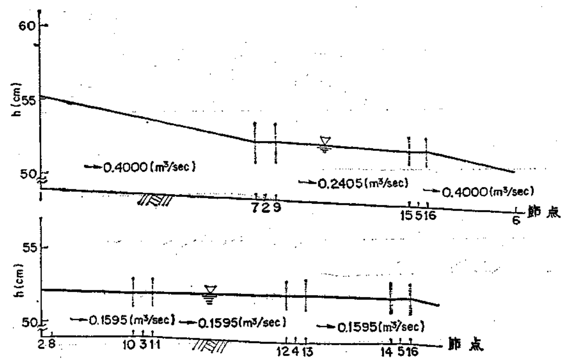
計算結果は，図—6 (b), (c) および 図—7 (b) のごと



(a) 計 算 条 件

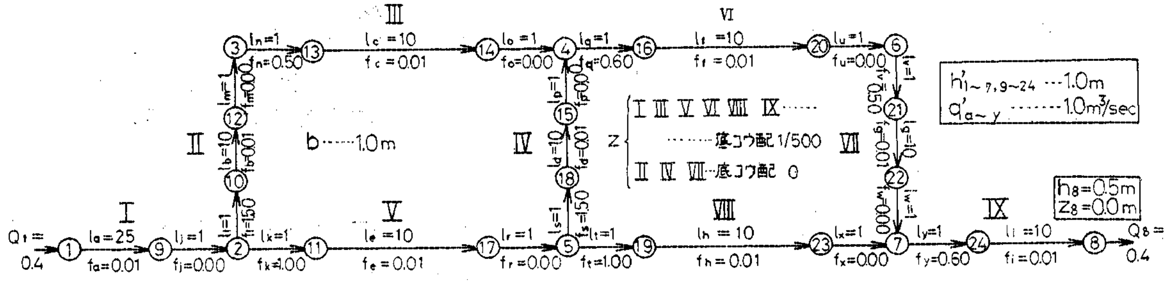


(b) 計 算 結 果



(c) 計 算 結 果

図—6 数値計算例—1



(a) 計 算 条 件

図—7 数 値

くである．ここに，図—6(b) は 図—6(a) において，遷移部の損失係数が，$f_h=1.0$, $f_i=1.5$, $f_k=0.5$, $f_m=0.5$, $f_p=0.6$, 図—6(c) は $f_h=f_i=f_k=f_m=f_p=0.0$ の場合である．

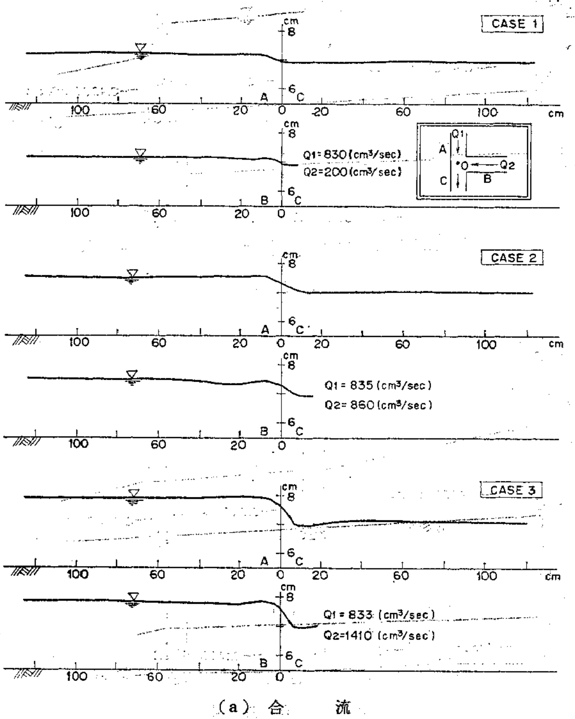
図に示すとおり，遷移部での損失係数がゼロである枝では水位変化はなく，ゼロでない枝では水位差が生じている．一方，模型実験による遷移部での水面形の例を示せば 図—8(a),(b),(c) のごとくであり，これらの図から 図—6,7 に示した計算結果は水理学的にほぼ満足し得るものと考えられる．

計算手法については，反復計算における解の収束性はすぐれており，上記の例では反復回数はそれぞれ，5,5,4回，計算時間はそれぞれ 2.7, 2.4, 3.0 秒であった(京都大学大型計算機センター，FACOM 230-75)．

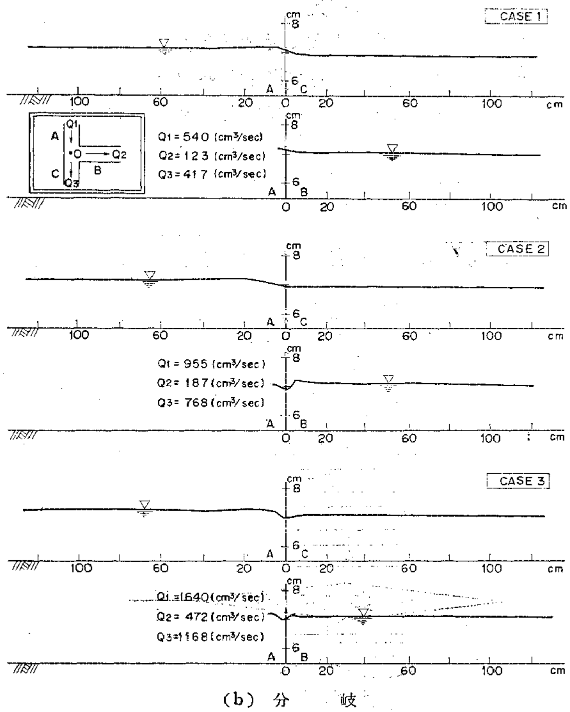
b) 他の計算法との比較

前に引用した 文献 1), 10) などでは 分合流点の条件を組み込んではいるものの，その水理特性や計算法に特に検討がなされておらず，このままでは本文で対象とする開水路網には適用し難い．著者は本文とは別の観点から開水路網の流れに対する逐次計算法を試みて，ほぼ所要の結果を得ている．すなわち，システムの大規模化に伴うディメンジョン増大の問題を克服するために，まず本文に示したように開水路網システムをサブ・システム(水路部，分・合流部，曲がり部，など)に分解し，各サブ・システムの計算を反復収束させる方法である．計算手順の概要は次のとおりである(詳細は文献 12) を参照されたい)．

1) 流量の連続式を満足するように各水路部に仮定流

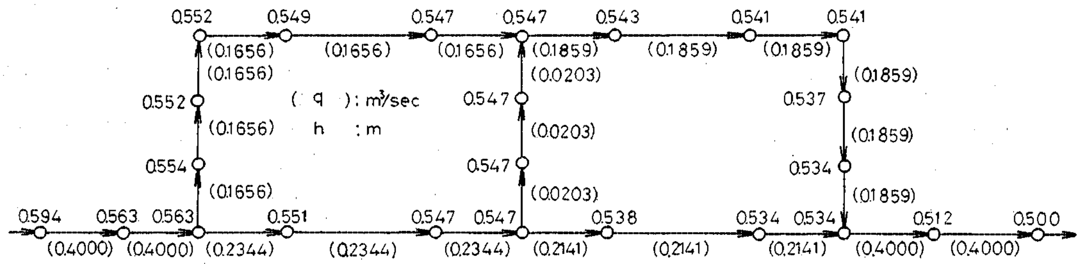


(a) 合 流



(b) 分 岐

図—8 水理実験による遷移部の水面形



(b) 計 算 結 果

計 算 例—2

量を与える．

2) 最下流点での既知水深から上流に向かって順に水深を求めていく．その際，水路部，分・合流部，曲がり部ではおのおののサブ・システムの計算式を用いる．

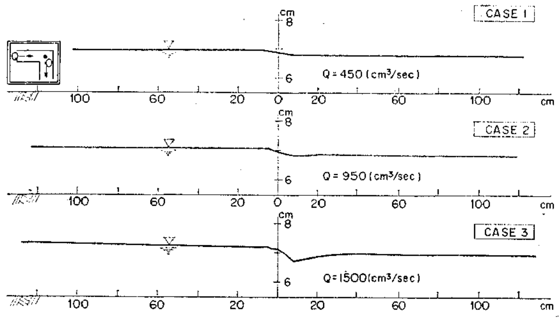
3) 2) で求まった水深を用いて，最上流点から下流に向かって流量配分を行う．その際，分岐部と合流部でおのおのの計算式を用いる．

4) 上記の 2) と 3) を繰り返し，各水路で流量と水深が収束するまで計算を行う．

この方法によれば小容量の計算機で充分計算可能である．神戸大学計算センター，FACOM 230-35 による計算結果は，収束性は良好で，計算時間は例—1 : 13 秒，例—2 : 20 秒であった．

これに類した計算法は他にも考えられるが，この種の逐次収束法では毎回の計算のディメンジョンはきわめて小さくてすむが，解の収束性に問題が残されており，このために大規模システムでは計算はかなり煩雑になることが予想される．

これに対して，本文に示した方法では方程式の非線形特性は解の収束性に重大な影響を与えないと考えられるから，システムの規模の大小を問わずまったく同様のアルゴリズムを使用できるのが最大の特長である．



(c) 曲 が り

5. 結 論

本文はマトリックス・ベクトルを用いた開水路網定常流の解析法について述べたものであるが，得られた結果を要約すれば次のとおりである．

(1) 開水路網を遷移部と水路部の 2 つのサブ・システムから成るシステムとしてモデル化した．これによって遷移部の水理特性を導入することを試みた．

(2) この開水路網システムに対する基礎方程式を行列表示した．この行列は遷移部のサブ・マトリックスと水路部のサブ・マトリックスで構成される．とくに，前者において導入された行列 K_1 および K_2 を遷移部に対する unit として使用すればこの計算法の特色を生かすことができる．

(3) 得られた行列表示は開水路網の形状に関して一般性が高い．また，計算機のプログラミングはきわめて系統的であり，かつ簡単である．

(4) Newton 法による逐次近似解法の収束性は良好で，解の精度も充分であった．したがって本研究で提示された計算法はその適用性に関して，システムが複雑な場合，すなわち比較的大きな行列に対しても有力な手法であると言えよう．

本計算法に関して今後検討すべき問題点としては，(i) 基礎方程式の行列表示をさらに洗練されたものにする可能性が残されていること，(ii) 遷移部の流況および損失係数に関して実験，実測などによる成果を導入すること，(iii) 解の収束性，行列の次元と計算時間の関係など本計算法の実用性を検討すること，である．

謝 辞

おわりに，本研究において適切なご指導をいただいた大阪大学工学部，室田 明教授ならびに神戸大学工学部，篁 源亮教授に深謝の意を表する次第である．また，本研究にあたって文部省科学研究費（自然災害特別研究，代表者—京都大学防災研究所，角屋 睦教授）の援助を

受けた．記して謝意を表する．

参考文献

1) 伊藤秀夫：低平地開水路網の定常流に関する研究，土木学会論文報告集，第181号，1970年9月．
2) 岩佐義朗・綾 史郎：グラフ理論による開水路網不定流の解析法について（第2報），土木学会第29回年次学術講演会講演概要集，昭和49年10月．
3) 常松芳昭：管路水輸送システムのグラフ理論的解析，土木学会論文報告集，第229号，1974年9月．
4) Kesavan, H.K. and M. Chandrashekar : Graph-Theoretic Models for Pipe Network Analysis, Proc. ASCE, Hydraulics Division, Vol. 97, Feb., 1972.
5) 神田 徹・山崎 篤：合流点近傍の流れに関する実験的研究，土木学会第31回年次学術講演会講演概要集，昭和51年10月．
6),7),8) 水理公式集，pp. 176～179，pp. 252～253，土木学会，昭和46年．
9) 板倉忠興：河川合流点における流れの機構の研究，第16回水理講演会講演集，昭和47年．
10) Wylie, E.B. : Water Surface Profiles in Divided Channels, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 10, No. 3, 1972.
11) 合田 健・雄倉幸昭：1次化連立式による新管網解法とその応用，土木学会論文集，第138号，昭和42年2月．
12) 神田 徹・山崎 篤：開水路網における流れの解析（第一報），建設工学研究所報告，No. 18，昭和51年5月．

（1975.5.24・受付）