

## 【ノート】

## 高速フーリエ変換による非定常確率過程の作成法

THE PRODUCTION OF NONSTATIONARY RANDOM PROCESS  
ON THE FAST FOURIER TRANSFORM

石 井 清\*

By Kiyoshi ISHII

## 1. はしがき

不規則に変動する外乱，たとえば，地震動・風などを確率過程でモデル化し，そのモデルを入力としてシステムの特性を調べたり，システムの応答を確率論的に評価する手法がある<sup>1)</sup>。この手法は，地震動・風などのように本来きわめて不規則に変動する外乱に対して1つの有力なアプローチとなる。

ここで，時系列の不規則変動に対して一般に広く用いられている確率過程として次式で示される調和関数型のモデルがある<sup>1)</sup>。

$$y(t) = \sum_{l=1}^M a_l \cos(\omega_l t + \phi_l) \dots\dots\dots (1)$$

確率過程  $y(t)$  は周波数  $\omega_l$  に対して振幅  $a_l$  と確率変数である位相角  $\phi_l$  の余弦関数との積の重ね合せによって与えられる。

この調和関数型のモデルは，任意の波形がフーリエ級数に展開可能であることから，重ね合わせの総数  $M$  が十分大きければ，多くの不規則変動を適確にモデル化できよう。

さらに，式(1)の確率過程  $y(t)$  はフーリエの逆変換に類似であることから，高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transformation, 以下FFTと呼ぶ) を用いてコンピュータによりきわめて効率よく作成可能である<sup>2)</sup>。

本報告は，コンピュータにより確率過程  $y(t)$  を効率よく作成するべくFFTへの使用方法を整理し，その適用性を検討したものである。なお，式(1)のモデルの中でも  $a_l$  が時間の関数としても変動する非定常確率過程の作成方法が，この報告の主題となっている。

## 2. 高速フーリエ変換 (FFT)

フーリエ変換あるいはFFTに関しては多くの文献および参考書があるので，本章では，FFTの基本となる離散系フーリエ変換の基本式のみを示す<sup>2)</sup>。

離散系フーリエ変換は連続系のフーリエ変換に対応して式(4)，(5)で与えられる。

## a) 連続系フーリエ変換

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt \dots\dots\dots (2)$$

—逆変換—

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df \dots\dots\dots (3)$$

## b) 離散系フーリエ変換

$$G\left(\frac{n}{N\Delta t}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k\Delta t) e^{-i2\pi n k/N} \dots\dots\dots (4)$$

—逆変換—

$$g(k\Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{N\Delta t}\right) e^{i2\pi n k/N} \dots\dots\dots (5)$$

$$k=0, \dots, N-1, n=0, \dots, N-1$$

ここで， $G(f)$  は時系列  $g(t)$  のフーリエ変換である。 $t$  は時間， $f$  は振動数であり，周波数  $\omega$  は  $\omega=2\pi f$  となる。なお周波数で表示する場合には  $\omega=2\pi f$  となり式(4)，(5)のいずれかに係数  $1/2\pi$  がかかる。

$g(k\Delta t)$  は時系列  $g(t)$  を時間間隔  $\Delta t$ ，総数  $N$  個サンプルし， $g(t)$  を  $N\Delta t$ (sec) の周期関数として近似する。また，フーリエ変換  $G(n/N\Delta t)$  は，振動数間隔  $\Delta f=1/N\Delta t$  で  $f=0$  より総数  $N$ ，すなわち， $G(f)$  を  $1/\Delta t$  (cycle/sec) の周期関数で近似することになる。したがって， $G(n/N\Delta t)$  の振動数領域は  $0 \sim N-1/N\Delta t$  (Hz) で与えられるが， $1/2\Delta t \sim 1/\Delta t$  は  $-1/2\Delta t \sim 0$  と等しくなり，信頼できる振動数領域は  $0 \sim 1/2\Delta t$  (Hz) となる。なお， $1/2\Delta t$  (Hz) は時系列  $g(k\Delta t)$  のサンプル時間間隔が  $\Delta t$  であることから，検出可能な最高の振動数  $1/2\Delta t$  (Hz) に等しい。

FFTは上記，離散系フーリエ変換を調和関数の周期性に着目して，式(2)，(3)を直接計算するのに要する

\* 正会員 工修 清水建設(株) 研究所力学研究部

演算回数を大幅に減少する手法である。

### 3. FFT の確率過程モデルへの適用性

式 (4), (5) の演算は FFT によれば, きわめて高速に処理できる. ここで, 式 (1) で示される確率モデル  $y(t)$  は式 (5) にきわめて類似している.

本章では, 式 (1) の計算が, 若干の変形後, FFT を用いて, きわめて効率よく計算できることを示そう.

いま, 式 (1) のモデルにおいて,  $a_l$  を定数として式 (1) のフーリエ変換を行ってみる.

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots(6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^M a_l \cos(\omega_l t + \phi_l) e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots(7)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^M a_l \{ \cos \phi_l \cos \omega_l t - \sin \phi_l \sin \omega_l t \} \cdot e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots(8)$$

$$= \sum_{l=1}^M a_l \left[ \cos \phi_l \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_l t e^{-i\omega t} dt - \sin \phi_l \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_l t e^{-i\omega t} dt \right] \dots\dots\dots(9)$$

$$= \sum_{l=1}^M a_l \pi [ \cos \phi_l \{ \delta(\omega - \omega_l) + \delta(\omega + \omega_l) \} - i \sin \phi_l \{ \delta(\omega + \omega_l) - \delta(\omega - \omega_l) \} ] \dots\dots\dots(10)$$

$$= \sum_{l=1}^M a_l \pi [ (\cos \phi_l + i \sin \phi_l) \delta(\omega - \omega_l) + (\cos \phi_l - i \sin \phi_l) \delta(\omega + \omega_l) ] \dots\dots\dots(11)$$

さらに, 複素数で表示すれば,

$$Y(\omega) = \sum_{l=1}^M a_l \pi [ e^{i\phi_l} \delta(\omega - \omega_l) + e^{-i\phi_l} \delta(\omega + \omega_l) ] \dots\dots\dots(11)'$$

となる.

したがって,  $a_l$  が定数の場合には, 式 (5) において, 周波数  $\omega_l$  に該当する振動数  $n/N\Delta t$  の係数  $G(n/N\Delta t)$  に式 (11) の係数をそれぞれ代入すれば, FFT の逆変換を用いて  $y(t)$  は直ちに算出される.

次に, 式 (1) において,  $a_l$  が時間の関数として与えられる場合を考えよう. すなわち, 式 (1) は次式で表わされる.

$$y(t) = \sum_{l=1}^M a_l(t) \cos(\omega_l t + \phi_l) \dots\dots\dots(12)$$

いま,  $t$  が  $t_i$  の近傍にあるとすれば,  $a_l(t)$  は  $t=t_i$  を中心とする 1 次のマクローリン展開として近似できる.

$$a_l(t) = a_l(t_i) + (t-t_i)a_l'(t_i) \dots\dots\dots(13)$$

ここで,  $a_l'(t_i)$  は時刻  $t_i$  における  $a_l(t)$  の 1 回微分である.

式 (13) を用いて式 (12) を書き換えれば,  $y(t)$  は

次式で表わされる.

$$y(t) = \sum_{l=1}^M [ a_l(t_i) + (t-t_i)a_l'(t_i) ] \cos(\omega_l t + \phi_l) \dots\dots\dots(14)$$

$$= \sum_{l=1}^M a_l(t_i) \cos(\omega_l t + \phi_l)$$

$$+ (t-t_i) \sum_{l=1}^M a_l'(t_i) \cos(\omega_l t + \phi_l) \dots\dots(15)$$

ここで, 式 (15) は  $a_l$  が定数の場合と比較すれば明らかなように, 2つのフーリエの逆変換を行うことにより算出できる.

すなわち,  $a_l(t_i)$  を定数として式 (15) の第 1 項を FFT により求める. 次に,  $a_l'(t_i)$  を定数として, 第 2 項  $\Sigma$  以下を FFT により計算し,  $(t-t_i)$  の重みづけをして第 1 項に加え合えれば,  $t_i$  の近傍において  $y(t)$  が求まる.

以上  $y(t)$  の近似式の概説であるが, 次に,  $y(t)$  を実際どのように計算するかについて説明しよう.  $y(t)$  の波形を時刻  $t_i (i=0, 1, \dots, m)$  で  $(m-1)$  の区間に分割する. 次に,  $(t_i, t_{i+1})$  区間および  $(t_{i+1}, t_{i+2})$  区間におけるフーリエスペクトルの強度  $a_l(t_i)$  および  $a_l(t_{i+1}) (l=1, \dots, m)$  より,  $a_l'(t_i)$  を  $\{a_l(t_{i+1}) - a_l(t_i)\} / (t_{i+1} - t_i)$  により近似する.  $a_l(t_i)$  および  $a_l'(t_i)$  により式 (15) から時刻  $t_i$  から時刻  $t_{i+1}$  までの  $y(t)$  が計算される. 以上の手続きを  $(m-1)$  回繰り返せば, 全継続時間にわたって  $y(t)$  が計算できる. なお, 1 回の手続きでは  $t_i \sim t_{i+1}$  のデータしか役立たない. このことから, 式 (15) に FFT を適用するにあたっては, 原波形のデータ総数  $N$  を常に用いる必要はなく, データ解析で必要となる周波数分解能  $\Delta f = \Delta\omega / 2\pi$  を満足する最小のデータ総数  $N'$ , すなわち,  $\Delta f \leq 1/N'\Delta t$  となる  $N'$  を用いればよい.

次に, 式 (15) の精度について検討しておこう. 式 (14) の近似式は,  $a_l(t)$  の変動がなめらかであればよい近似式となる. たとえば,  $a_l(t)$  が後述する物理スペクトル  $b_l(t)$  の平方根として与えられる場合, 区間  $t_i \sim t_{i+1}$  の  $a_l(t)$  が  $b_l(t_i)$  と  $b_l(t_{i+1})$  の線形補間, すなわち

$$a_l(t) = [ b_l(t_i) + (t-t_i)\Delta b_l(t_i) ]^{1/2} \quad t_i < t < t_{i+1}, \quad i=1, \dots, m-1 \dots\dots(16)$$

ここで,

$$\Delta b_l(t_i) = \{ b_l(t_{i+1}) - b_l(t_i) \} / (t_{i+1} - t_i)$$

で与えられれば, 式 (14) の近似式は

$$a_l(t) = \sqrt{b_l(t_i)} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(t-t_i) \frac{\Delta b_l(t_i)}{b_l(t_i)} \right\} \dots(17)$$

となる. 式 (16), (17) の関係は  $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + 1/2 \cdot \epsilon$  の型の近似式であり,  $\epsilon = 1.0$  すなわち, 式 (16) において第 1 項と第 2 項が同じ大きさとなっても, 式 (17) の近似の誤差は 6.0% と小さい. なお,  $\epsilon$  が 2, 3 となる場合

には時刻  $t_{i+1}$  と  $t_i$  の添字を入れ換えれば  $\epsilon$  は  $\epsilon < 1$  となり上記近似式がそのまま適用できることに注意されたい。

次に  $y(t)$  の時間分割であるが、上記のように  $a_i(t)$  がなめらかに変動する場合には、 $a_i(t)$  は  $t_i < t < t_{i+1}$  において、十分小さい誤差で近似される。しかしながら、 $y(t)$  を  $t_i < t < t_{i+1}$  で区間定常と考えれば、その波に含まれる最低の振動数  $df$  は、 $1/2(t_{i+1}-t_i)$  Hz となる。また、物理スペクトルにより  $b_i(t_i)$  を算定する場合でも、解析に使用するウィンドウ関数：式 (18) に用いられるフィルター時間  $T_F$  により最低の振動数は限定される。したがって、時間長さ  $(t_{i+1}-t_i)$  は  $y(t)$  の非定常性の変動を十分とらえられるほど短く、かつ、 $y(t)$  に当然含まれており、データ解析にも必要となる最低の振動数  $df$  を解析できるように前者とのバランスを考えて選択しなければならない。

#### 4. 解析例

前章では、式 (1) によって表わされる確率過程の計算に FFT が適用できることを示した。

本章では、実際の時系列  $y(t)$  に FFT の手法を適用してみよう。

なお、時系列のデータとしては、振幅レベルおよび周波数の領域において、きわめて不規則に変動する例として、地震加速度波形を用いる。

まず、フーリエ変換によって、原波形が適確にとらえられるかについて検討しよう。

図-1 (a), (b) には、地震加速度波形 (TAFT, 1952, Dec. 30, EW 成分) および原波形をフーリエ変換し、さらに逆変換し元に戻した波形をそれぞれ示す。両波形はほぼ完全に一致しており、フーリエ級数により、不規

則な波形が十分とらえられていることを示している。

次に、本報告の主眼となっている式 (1) において  $a_i$  が時間の関数となっている場合について検討しよう。

式 (1) により表わされる非定常確率過程モデルとしては物理スペクトルを用いたモデルがある<sup>3)~5)</sup>。本報告では、このモデルを用いる。

この場合、 $a_i(t)$  は物理スペクトル  $S(\omega, t; W)$  を用いて次式で与えられる<sup>3)~5)</sup>。

$$a_i(t) = \sqrt{4 S(\omega, t; W)} d\omega \dots \dots \dots (16)$$

物理スペクトルは時間  $t$  の近傍における時系列  $y(t)$  のエネルギー (自乗和) の周波数分解の期待値として定義される。

$$S(\omega, t; W) = E \left[ \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u) y(u) e^{-i\omega u} du \right|^2 \right] \dots \dots \dots (7)$$

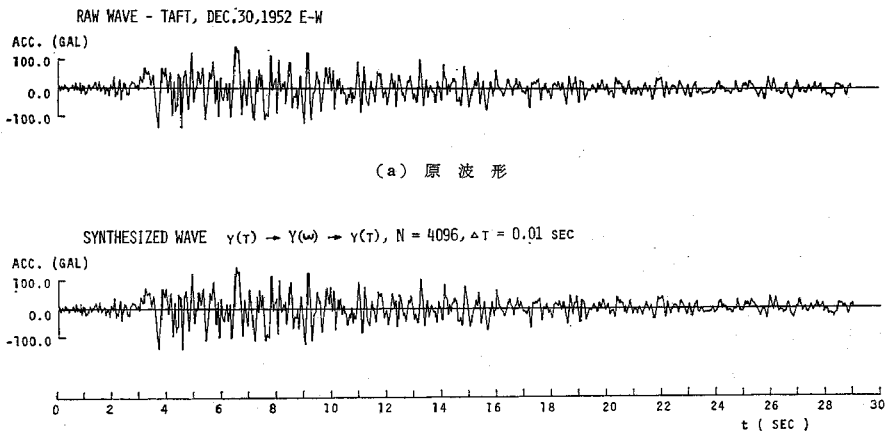
ウィンドウ関数  $W(t)$  はガウス型ウィンドウ関数を用いる。

$$W(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{T_F} \right)^{1/2} e^{-\pi t^2 / T_F^2} \dots \dots \dots (18)$$

$T_F$  はフィルター時間であり、本研究では、検討の結果<sup>3)~4)</sup>として  $T_F = 2.50$  sec を用いる。

なお、 $y(t)$  は式 (16) に示されるように各周波数に対して時間をパラメーターとして変動し、各周波数成分を重ね合わせることににより、ランダム変動の非定常性が表わされる。物理スペクトルの非定常確率過程への適用性は参考文献 3), 4) および 5) において検討されているので参照されたい。

図-2 には 図-1 (a) の波形に対する非定常確率過程のサンプル関数 ( $t = 0.0 \sim 5.0$  sec) を示す。図-2 (a) は式 (1) より直接重ね合わせの計算を行ったもの、(b) は FFT により単位の時間長を 2.5 sec として計算したものである。



(b) FFT により再合成したもの

図-1 地震加速度波形

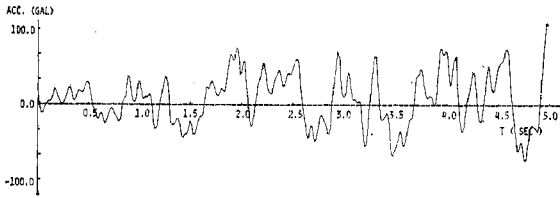


図-2 (a) 非定常確率過程, 直接計算,  $M=40$ ,  
 $F=0\sim 30$  Hz,  $\Delta T=0.01$  sec

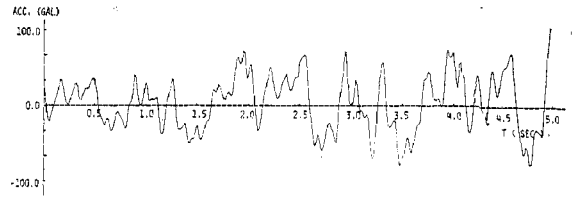


図-2 (b) 非定常確率過程, FFT,  $M=40$ ,  $N=1024$ ,  
 $F=0\sim 30$  Hz,  $\Delta T=0.01$  sec

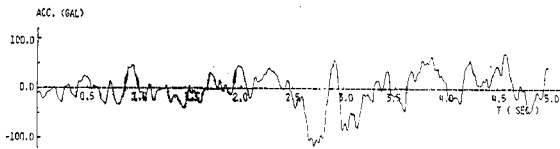


図-3 (a) 非定常確率過程, FFT,  $M=255$ ,  $N=1024$ ,  
 $F=0\sim 25$  Hz,  $\Delta T=0.01$  sec

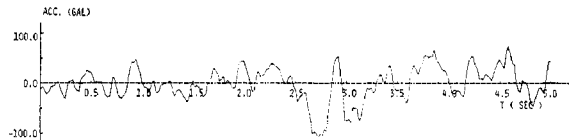


図-3 (b) 非定常確率過程, FFT,  $M=225$ ,  $N=512$ ,  
 $F=0\sim 25$  Hz,  $\Delta T=0.02$  sec

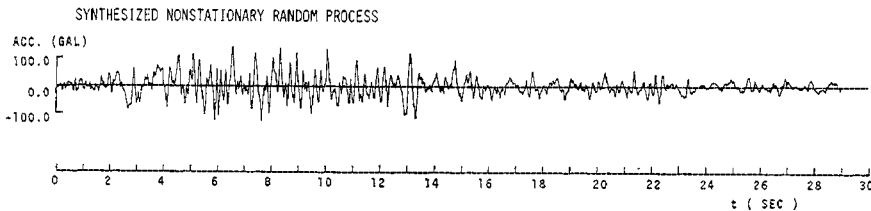


図-4 非定常人工地震波, FFT,  $M=255$ ,  $N=512$ ,  $F=0\sim 25$  Hz,  $\Delta T=0.02$  sec

ここで, 位相角  $\phi_i$  は  $0\sim 2\pi$  の一様乱数としてシュミレートしている. また, 物理スペクトルは 2.5 sec ごとに求められ, その間は直線補間とした. 振動数領域は  $0\sim 25$  Hz, 重ね合わせの総数は  $M=40$  である.

図-2 (a), (b) において, 両波形の差は最大 8 gal 程度であり, その傾向はよく一致している. なお, FFT による方法では時間  $t=2.5$  sec において不連続になるがその差はほとんどない. さらに, 図-3 では FFT による方法において振動数の分解能  $1/N\Delta t$  を変えずにサンプル総数  $N$  を (a) 1024 から (b) 512 に変更した例を示す. 図-3 (b) では時間間隔  $\Delta t$  が 0.01 sec より 0.02 sec となったために, (a) と比較して波形は若干あらかくなっているが, 両者はほぼ完全に一致する.

最後に, 全継続時間  $t=0.0\sim 29$  sec にわたる非定常確率過程のサンプル関数を 図-4 に示す. 図-4 の波形は, 原波形の物理スペクトルを 1.5 sec ごとに求め, FFT により求めたものである. なお, 単位の時間長さを 1.5 sec としたのは, 物理スペクトル算出のフィルター時間に  $T_F=2.5$  sec を用いており, 時間長さ 1.5 sec 程度までならば, なめらかな物理スペクトルがほぼ線形で近似されることによる<sup>3),4)</sup>. なお, 図-4 と直接計算の波形の差は最大 6 gal 程度であり, 単位の時間長さ 2.5 sec の図-2 の例より改善されている. サンプル関数は原波形 (図-1 (a)) の特徴をよくとらえている.

#### 4. あとがき

本報告は, FFT による調和関数型確率過程の作成方法について検討したものである.

FFT には, ホワイトノイズ, 定常確率過程が適用できるだけではなく, 調和関数型の係数  $a_i(t)$  に 1 次のマクローリン展開による近似式を用いることによって非定常確率過程に対しても適用可能である.

FFT の適用性については, 振幅レベルおよび周波数の領域においてきわめて不規則に変動する例として地震加速度波形を用いて, その適用性を確認した.

#### 参考文献

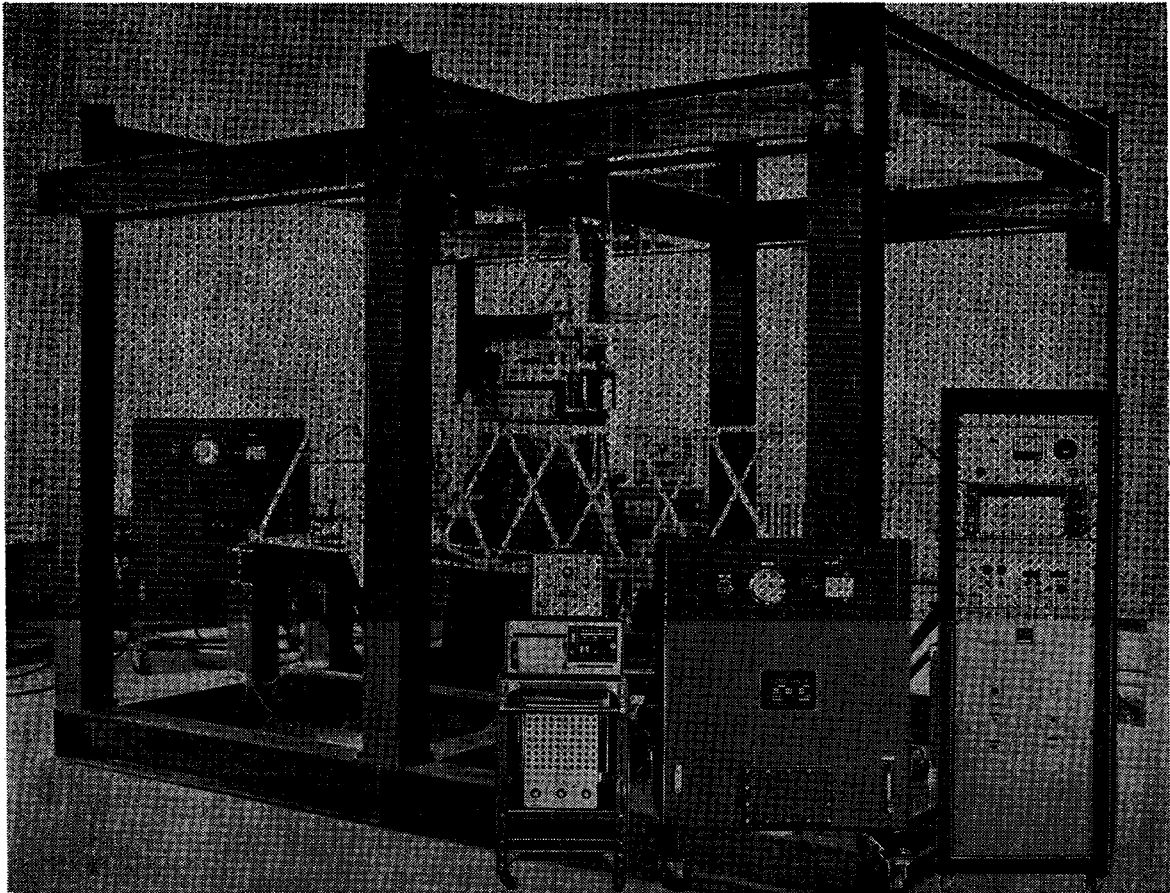
- 1) 星谷 勝: 確率論手法による振動解析, 鹿島出版, 1973.
- 2) Brigham, E.O.: The Fast Fourier Transform., Prentice-Hall, Inc., 1974.
- 3) 星谷 勝・石井 清: 非定常周波数特性を有する最悪人工地震波, JSCE, No. 242, pp. 1~14, 1975.10.
- 4) 星谷 勝・千葉利晃・草野直幹: 地震加速度波の非定常性とそのシュミレーション, JSCE, No. 245, pp. 51~58, 1961.1.
- 5) Hoshiya, M. and Chiba, T.: Physical Spectrum of Earthquake Acceleration, the Proceedings of the Fourth Japan Earthquake Engineering Symposium, pp. 1051~1058, 1975.

(1976.9.11・受付)

MARUI

MIV-4600 電気油圧サーボシステム

# 電気油圧式 振動疲労試験機



MIV-4600シリーズは中小規模・材料・構造物・構造物模型  
部品等の実働波による振動・疲労試験に最適品です。

**特長** ◆振動、疲労波形を任意の波形運転することができます。

(正弦・三角・矩形・複合・ランダム・磁気テープ入力による運転も可能)

- ◆制御方式を広い範囲に選択することができます(荷重・変位・加速度の制御が可能)
- ◆複数の加振器を組合せて同時に運転できます(振巾・位相等を変えて運転が可能)
- ◆出力は±50ton～±100kg各種製造いたしています。
- ◆任意の場所で設置し試験が可能です。

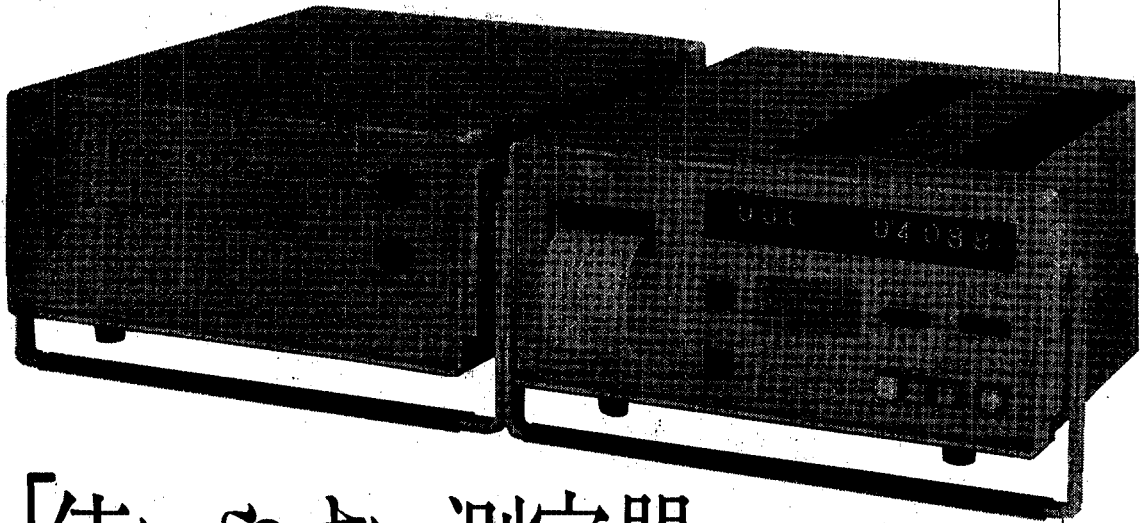


土木建築用材料試験機

株式会社

マルイ

東京営業所 東京都港区芝公園2丁目9-12 ☎東京 (03) 434-4717  
大阪営業所 大阪市城東区中央1丁目11-1 ☎大阪 (06) 934-1021  
名古屋営業所 名古屋市中村区牧野町5丁目10 ☎名古屋(052)452-1381  
九州営業所 福岡市博多区北意町4番17 ☎福岡 (092)411-0950



「使いやすい測定器」と  
 ご好評をいただいております。

初期値記憶式—バランス調整不要

## 共和の携帯型デジタルひずみ測定器 SD-500A, ASB-50A

計測開始時に測定点の初期不平衡出力をコアメモリに記憶し、次に負荷時のひずみを測定し、すでに記憶している初期不平衡分を演算し、真のひずみを求めます。ひずみ値は、デジタル表示すると共に、内蔵プリンタでプリントアウトします。  
 小型、軽量、可搬型で現場向。実験室用としてラックタイプもあります。また自動無人計測用のオプション機器の準備があり、データ解析処理のためのパーソナルコンピュータにも接続できます。

**特長**

- 調整時間が大幅に短縮できる
- 計測時間は1点あたり0.5秒以下
- 直流ブリッジ電源採用により、高精度な測定ができる
- 測定点の開始、終了の任意設定可能
- オプション機器が豊富

**仕様**

- 測定範囲……………0～±39999×10<sup>-6</sup>ひずみ
- 計測時間……………0.5秒/点
- 多点切換点数……………20点(カスケード接続10台)  
50点(カスケード接続4台)
- ゲージブリッジ ……
- 回路切換……………1、2、4枚ゲージ法、全点共通または単独切換
- 精度……………±(指示値0.1%+2数値)
- 電源……………AC100V
- 寸法……………350×160×400mm

**オプション機器**

- デジタルクロック ……ASC-50A
- スタータ ……AST-50A
- 紙テープさん孔装置 ……OPC-50A
- ケーブルアダプタ

未来をひらく電子計測器メーカー

株式会社 **共和専業**

本社・工場  
 東京都調布市調布ヶ丘3の5の1  
 電話=0424-87-2111(大代)

東京営業所  
 東京都港区芝西久保保舟町19  
 電話=03-502-3551(大代)

大阪営業所  
 大阪市東区森之宮東之町544(三双ビル)  
 電話=06-942-2661(代)

名古屋営業所  
 名古屋市中区千種区田代町字瓶丸1の57(東山大木ビル)  
 電話=052-782-2521(代)

福岡営業所  
 福岡市博多区博多駅東2の5の20(松永ビル)  
 電話=092-411-6744(代)

広島営業所  
 広島市東白島町5の9((にまさビル)  
 電話=0822-21-9536

札幌営業所  
 札幌市中央区南四条西9丁目(観光ビル)  
 電話=011-261-7629

水戸営業所  
 水戸市上水戸2の6の5  
 電話=0292-25-1074

