

ウェイト・マトリックス法の構造解析への応用とその考察

APPLICATIONS OF WEIGHT MATRIX METHOD TO STRUCTURAL ANALYSIS AND THEIR CONSIDERATIONS

新 関 茂*・佐 武 正 雄**

By Shigeru NIISEKI and Masao SATAKE

1. ま え が き

構造解析において解析解を求めることが困難な場合、連続的な場の性質を有限個の離散点で代表させて数值的に解析するマトリックス解析法が用いられている。マトリックス解析法では、力学的な場の離散化にともない、連続的に分布する荷重や反力は、その離散点での値、または分布力と等価な集中力に置き換えて取り扱われることになる。板の固定辺の反力などのように、本来、分布力であるものが、選点法で解析したために離散点での集中反力として求められた場合、この集中反力を再び分布力に置換することが必要となってくる。また、変位型の有限要素法では、通常応力マトリックスを用いて、各要素ごとに応力分布を解析しているが、このようにして求められた応力場は、一般に、要素境界で不連続で力学的に不自然なものとなるので、この不連続な応力場を連続化する手法が、Oden¹⁾ や Hinton²⁾ などによって提案されている。しかし、変位型の有限要素モデルでは、応力マトリックスによって個々の要素から得られる応力場は、要素境界で平衡条件を満足しないが、要素間で伝達される節点力は、各節点で平衡条件を満たしている。したがって、要素間で伝達される節点力（集中力）を仕事量に関して等価な分布力に置換することによっても、要素境界で連続な応力場を得ることができ、この方法の方が合理的ではないかと考えられる。

分布力から、ある力学量に関して等価な集中力へ置換するにはウェイト・マトリックスを、また逆に、集中力から分布力への等価置換は逆ウェイト・マトリックスを用いて行うことができる^{3)~7)}。このように、ウェイト・マトリックスまたは逆ウェイト・マトリックスを用い、分布力と集中力との等価置換を行って合理的な数値解

を求める方法をウェイト・マトリックス法と呼ぶことにする。本論文では、初めに、著者らが提案し、考察を行って来たウェイト・マトリックス法の第1種フレドホルム形積分方程式の数値解法および有限要素法への応用を例題を用いて説明し、他の手法との比較検討を行う。次に、仮想仕事の原理またはポテンシャル・エネルギー最小の原理によって定式化された有限要素モデルにウェイト・マトリックス法を応用することによって求められた応力場のもつ数学的意味を A^*A 形式の微分作用素の性質を用いて理論的に考察する。

2. 第 1 種フレドホルム形積分方程式の数値解析への応用

グリーン関数が既知である弾性体の一部で変形を拘束した場合、変形の拘束によって生じる反力などは、以下に述べるように、一般に第1種フレドホルム形積分方程式によって表現できる場合が多い。しかし、第1種フレドホルム形積分方程式の厳密解を容易に求め得るのは極めて少数の例に限られており、多くの場合、数値解析によって解を求めなければならない。この場合、線形第1種フレドホルム形積分方程式は、他の形式の積分方程式とは性質が異なり、分布力と集中力の置換の方法が解に直接的影響を及ぼすので、単純にニュートン・コーツの多分割公式やガウスの数値積分公式を用いて数値解析を行ったのでは、力学的に不自然な結果となってしま⁸⁾。このようなことをさけるためには、集中力と分布力の置換を合理的に行うことが必要で、ウェイト・マトリックス法を適用するのが妥当と考えられる。ここでは例として、荷重 $p(x_1, x_2)$ を受ける固定矩形板の周辺 Γ 上の分布モーメント反力 $m(t)$ を解析する問題を考える。同一の荷重 $p(x_1, x_2)$ によって固定板と同一形状の単純支持矩形板の周辺に生じるたわみ角を求め、これを $\theta(s)$ とすれば、荷重 $p(x_1, x_2)$ をうける矩形の固定板周辺

* 正会員 工修 東北大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

の分布モーメント反力 $m(t)$ は、線形第1種フレドホルム形積分方程式

$$\theta(s) = \oint K(s, t) m(t) dt \dots\dots\dots (1)$$

の解として与えられる。ここに、 s, t は矩形板の周辺に沿うパラメーターで、 $K(s, t)$ はグリーン関数である。単純支持された矩形の等方性板の辺 OA 上の任意の点 t に単位集中モーメント荷重をうける場合、各辺上の点 s に生じるたわみ角は、板の曲げ剛性を D 、辺 AB, CO および辺 OA, BC の長さをそれぞれ a, b とし Lévy の単級数解³⁾を用いて、それぞれの辺に対して次のように与えられる (図-1 参照)。

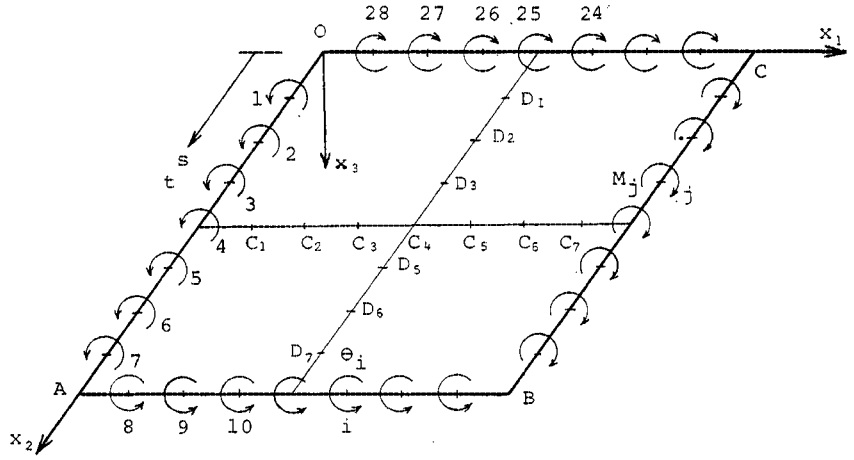


Fig. 1

に対して次のように与えられる (図-1 参照)。

$$K_{OA}(s, t) = \frac{1}{2\pi D} \sum \frac{\sin \frac{m\pi}{b} s \sin \frac{m\pi}{b} t}{m} [-\alpha_m \{ \tanh^2 \alpha_m + \coth^2 \alpha_m \} + \{ \tanh \alpha_m + \coth \alpha_m \} + 2\alpha_m] [0 \leq s, t \leq b]$$

$$K_{AB}(s, t) = \frac{1}{2\pi D} \sum \frac{(-1)^m \sin \frac{m\pi}{b} t}{m} \left[\frac{1}{\cosh \alpha_m} \left\{ \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi}{b} \left(s - b - \frac{a}{2} \right) - \frac{m\pi}{b} \left(s - b - \frac{a}{2} \right) \sinh \frac{m\pi}{b} \left(s - b - \frac{a}{2} \right) \right\} - \frac{1}{\sinh \alpha_m} \left\{ \alpha_m \coth \alpha_m \sinh \frac{m\pi}{b} \left(s - b - \frac{a}{2} \right) - \frac{m\pi}{b} \left(s - b - \frac{a}{2} \right) \cosh \frac{m\pi}{b} \left(s - b - \frac{a}{2} \right) \right\} \right] [b \leq s \leq a+b, 0 \leq t \leq b]$$

$$K_{BC}(s, t) = \frac{1}{2\pi D} \sum \frac{\sin \frac{m\pi}{b} (a-s) \sin \frac{m\pi}{b} t}{m} [\alpha_m (\tanh^2 \alpha_m - \coth^2 \alpha_m) - (\tanh \alpha_m - \coth \alpha_m)] [a+b \leq s \leq a+2b, 0 \leq t \leq b]$$

$$K_{CA}(s, t) = \frac{1}{2\pi D} \sum \frac{\sin \frac{m\pi}{b} t}{m} \left[\frac{1}{\cosh \alpha_m} \left\{ \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi}{b} \left(\frac{3}{2}a + 2b - s \right) - \frac{m\pi}{b} \left(\frac{3}{2}a + 2b - s \right) \sinh \frac{m\pi}{b} \left(\frac{3}{2}a + 2b - s \right) \right\} - \frac{1}{\sinh \alpha_m} \left\{ \alpha_m \coth \alpha_m \sin \frac{m\pi}{b} \left(\frac{3}{2}a + 2b - s \right) - \frac{m\pi}{b} \left(\frac{3}{2}a + 2b - s \right) \cosh \frac{m\pi}{b} \left(\frac{3}{2}a + 2b - s \right) \right\} \right] [a+2b \leq s \leq 2(a+b), 0 \leq t \leq b]$$

..... (2)

ただし

$$\alpha_m = m\pi a / 2b \dots\dots\dots (3)$$

上記のグリーン関数を離散化することにより、フレキシビリティ・マトリックス $K_{ij} = K(s_i, t_j)$ は容易に求められ、分割点 j における集中モーメント荷重 M_j による分割点 i のたわみ角 θ_i は、

$$\theta_i = \sum_j K_{ij} M_j \dots\dots\dots (4)$$

または

$$\theta = KM \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる。ただし、薄板の理論によるグリーン関数

$K(s, t)$ を直接離散化してフレキシビリティ・マトリックスを求めると、周知のように、その対角成分 K_{ii} は発散してしまうので、ここでは Appendix で詳述する手法により、単位集中モーメントと仕事量に関して等価な等分布モーメントを用い、対角成分 K_{ii} が有限値となるように修正を行っている。 $p(x_1, x_2)$ をうける矩形の単純支持板周辺のたわみ角 θ が求められれば、このたわみ角 θ を打ち消すために必要な各分割点における集中モーメント反力 M は式 (5) から

$$M = K^{-1}\theta \dots\dots\dots (6)$$

として得られる。この集中モーメント反力 M を、さらに逆ウェイト・マトリックスを用いて、等価な分布モーメントに置換することにより所要の分布モーメント反力を得ることができる。今、この場合のウェイト・マトリックスを導くために、グリーン関数 (2) が正弦関数で表現されていることを考慮し、補間関数

$$\varphi_i(s) = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sin \frac{n\pi}{a} ih \sin \frac{n\pi}{a} s \dots\dots\dots (7)$$

を用いることにする。ただし以下、辺長 a の一辺について考察をすすめるが、辺長 b の辺については a を b に置き換えたものを用いばよい。 N は矩形板の一辺の分割数、 $h=a/N$ である。上式の補間関数は各分割点で

$$\varphi_i(jh) = \delta_{ij} \dots\dots\dots (8)$$

を満たしている。一辺上のたわみ角 $\theta(s)$ および分布モーメント $m(s)$ はこの補間関数 $\varphi_i(s)$ を用いてそれぞれ

$$\theta(s) = \sum_{i=1}^{N-1} \theta_i \varphi_i(s) \dots\dots\dots (9)$$

$$m(s) = \sum_{i=1}^{N-1} m_i \varphi_i(s) \dots\dots\dots (10)$$

と近似することができる。ここに、 θ_i, m_i はそれぞれ分割点 i におけるたわみ角および分布モーメントの値である。したがって、分布モーメントを仕事量について等価な集中モーメントに置換するウェイト・マトリックス W_{ij} は仮想仕事の原理により

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \int_0^a \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds \\ &= \frac{a}{N} \delta_{ij} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

または

$$W = \frac{a}{N} I \dots\dots\dots (12)$$

によって与えられる*。ここに、 I は単位マトリックスである。したがって、集中モーメントを仕事量に関して等価な分布モーメントに置換する逆ウェイト・マトリックスは

$$W^{-1} = \frac{N}{a} I \dots\dots\dots (13)$$

となり、上式の W^{-1} を用いば、固定辺の分布モーメント反力 m は式 (6) の集中モーメント反力 M より

$$m = W^{-1} M$$

* 式 (8) を満足する補間関数 $\varphi_i(x)$ は、一般に

$$\varphi_i(x) = \sum_j^{-1} \psi_{ji} \psi_j(x) \dots\dots\dots (a)$$

ただし

$$\psi_{ji}^{-1} = [\psi_{ij}]^{-1} = [\psi_i(x_j)]^{-1} \dots\dots\dots (b)$$

と記すことができる。この場合、仕事を等価量とするウェイト・マトリックスは

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \int_0^a \varphi_i \varphi_j dx \\ &= \psi_{ki}^{-1} \psi_{lj}^{-1} \int_0^a \psi_k(x) \psi_l(x) dx \dots\dots\dots (c) \end{aligned}$$

で与えられる。

Table 1 bending moments acting along edge of clamped plate under uniform load p

division point	1	2	3	4	
concentrated moment ($\times 10^{-4} \cdot \text{pa}^2$)	-1.4779	-4.0421	-5.8125	-6.4140	
distributed moment ($\times 10^{-2} \cdot \text{pa}^2$)	(i)	-1.1823	-3.2337	-4.6500	-5.1312
	(ii)	-1.1592	-3.2485	-4.6442	-5.1373
	(iii)	-1.1978	-3.2374	-4.6484	-5.1334

(i) by inverse weight matrix (13), (ii) by inverse weight matrix (19), (iii) Timoshenko's method

Table 2 bending moments acting along edge of clamped plate under central concentrated load P

division point	1	2	3	4	
concentrated moment ($\times 10^{-2} \cdot \text{Pa}$)	-0.1385	-0.7191	-1.3173	-1.5687	
distributed moment ($\times 10^{-1} \cdot P$)	(i)	-0.1108	-0.5753	-1.0538	-1.2550
	(ii)	-0.1063	-0.5758	-1.0537	-1.2568
	(iii)	-0.1092	-0.5745	-1.0542	-1.2577

(i) by inverse weight matrix (13), (ii) by inverse weight matrix (19), (iii) Timoshenko's method

$$= \frac{N}{a} M \dots\dots\dots (14)$$

として求められる。表—1 および 表—2 は、それぞれ等分布荷重 p および中央集中荷重 P を受ける正方形固定板の各辺を 8 等分し、上述の方法によって求めた固定辺上の集中モーメント反力および分布モーメント反力を示したものである。ウェイト・マトリックス法によって求めた値は、Timoshenko⁸⁾ の方法による解とよい一致を示している。

次に、単純支持された矩形板周辺のたわみ角について等価置換を与えるウェイト・マトリックスを求める。分布モーメント反力 $m(s)$ の補間関数 $\varphi_i(s)$ による近似 (10) を式 (1) に代入して離散化すれば、

$$\theta_i = K'_{ij} m_j \dots\dots\dots (15)$$

または

$$\theta = K' m \dots\dots\dots (16)$$

を得る。ここに

$$K'_{ij} = \oint K(ih, t) \varphi_j(t) dt \dots\dots\dots (17)$$

である。式 (5) と式 (16) の θ を等置すれば、集中モーメント M をたわみ角 θ に関して等価な分布モーメント m に置換する逆ウェイト・マトリックス

$$W^{-1} = K'^{-1} K \dots\dots\dots (18)$$

が得られる。一辺の長さ a の単純支持正方形板の各辺を 8 等分した場合について

$$W^{-1} = \frac{8}{a} \begin{bmatrix} A & D & C & B \\ B & A & D & C \\ C & B & A & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned}
 A = & \begin{pmatrix} 1.0611 & -0.0572 & 0.0262 & -0.0130 & 0.0076 & -0.0035 & 0.0010 \\ -0.0443 & 1.0715 & -0.0557 & 0.0248 & -0.0102 & 0.0048 & -0.0017 \\ 0.0215 & -0.0570 & 1.0780 & -0.0588 & 0.0259 & -0.0108 & 0.0050 \\ -0.0085 & 0.0254 & -0.0581 & 1.0785 & -0.0581 & 0.0254 & -0.0085 \\ 0.0050 & -0.0108 & 0.0259 & -0.0588 & 1.0780 & -0.0570 & 0.0215 \\ -0.0017 & 0.0048 & -0.0102 & 0.0248 & -0.0557 & 1.0715 & -0.0443 \\ 0.0010 & -0.0035 & 0.0076 & -0.0130 & 0.0262 & -0.0572 & 1.0611 \end{pmatrix} \\
 B = & \begin{pmatrix} -0.0024 & 0.0052 & -0.0085 & 0.0127 & -0.0174 & 0.0294 & -0.0373 \\ 0.0006 & -0.0011 & 0.0019 & -0.0025 & 0.0045 & -0.0063 & 0.0066 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0000 \\ 0.0001 & -0.0001 & 0.0002 & -0.0002 & 0.0003 & -0.0006 & 0.0007 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0001 \end{pmatrix} \\
 C = & \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix} \\
 D = & \begin{pmatrix} -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0007 & -0.0006 & 0.0003 & -0.0002 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0003 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0006 & -0.0063 & 0.0045 & -0.0025 & 0.0019 & -0.0011 & 0.0006 \\ -0.0373 & 0.0294 & -0.0174 & 0.0127 & -0.0085 & 0.0052 & -0.0024 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

となる。表-1 および 表-2 には、それぞれ式 (19) に示す逆ウェイト・マトリックスを用い、等分布荷重および中央集中荷重を受ける正方形固定板の分布モーメント反力を求めた結果も示してある。

3. 有限要素解析への応用

ウェイト・マトリックス法の有限要素モデルによる応力解析への応用について説明する。通常、変位型の有限要素モデルでは、変位関数の導関数を用いて導かれる応力マトリックスによって応力解析が行われている。元来、変位関数はスティフネス・マトリックスを導くために仮定されたものであると考えられるため、応力マトリックスから得られる応力場は、要素境界で一般に不連続となり、変位に比較し精度もあまりよいとは言えない。このような性質があるにもかかわらず、定式化の容易さ等のために、各種の有限要素モデルのなかで変位型モデルはもっとも頻繁に応用されているので、不連続な応力場の smoothing は重要な問題である。現在提案されている smoothing 手法の主なものとしては、要素の図心における応力値を用いる方法⁹⁾ や、一つの節点における応力値としてその節点に接続しているいくつかの要素について、応力マトリックスを用いて求めた応力を単純

に平均化した値を用いる方法⁹⁾、また応力マトリックスから求めた不連続な応力場を最小 2 乗法的に平均化する方法などがある¹⁴⁻⁵⁾。応力マトリックスから求められた応力場の不連続性やその精度の低さは、有限個の要素集合体で近似した不完全な連続体に対し、完全な連続体の場合と同様に構成方程式によって応力場を計算していることによるとも考えられる。

有限要素モデルでは、要素間の変形量および力の伝達はずべて節点を通じて行われるものとしている。したがって、各節点力はすべて集中力で、分布荷重も等価な集中力に置き換えて取り扱われるが、これらすべての節点力は各節点で平衡条件を満たしている。ここで、変形量とスティフネス・マトリックスを用いて求めた節点力から、荷重による等価節点力を減じたものを修正節点力と呼ぶことにする。この修正節点力は、要素間で伝達される集中力と考えられる。等分布荷重を受けるはりの数値計算例において、Martin¹⁰⁾ は上述の修正節点力から求めたモーメントおよびせん断力は各節点で厳密解と一致することを示した。また、Tong¹¹⁾ は、はりの支配微分方程式の斉次形に対する厳密解を形状関数として用いた場合、このような性質は任意の荷重状態に対して成り立つことを変分原理を用いて論じている。また、Turner¹²⁾ らは節点力を作用面積によって単純に平均化し、板やシ

エルの応力解析を行っている。

本論文では、逆ウェイト・マトリックスを用いて、修正節点力を仕事量に等価な分布力に置換し、応力分布を求める手法を板の応力解析を例として説明する。数値計算には 12 自由度非適合矩形要素 (ACM 要素)⁹⁾ を使用し、変形量および分布力を近似するために、連続関数のうちでもっとも単純な補間関数

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\xi) &= -\xi + 1 & (0 \leq \xi \leq 1) \\ \varphi_i(\xi) &= \xi - i + 1 - 2(\xi - i)u(\xi - i) \\ & & (i - 1 \leq \xi \leq i + 1) \\ \varphi_N(\xi) &= \xi - N + 1 & (N - 1 \leq \xi \leq N) \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

を用いるものとする。ただし、 $\xi = x/h$, $Nh = a$, $1 \leq i \leq N - 1$, $u(\xi)$ はヘビサイドの階段関数で、 $\varphi_i(\xi)$ は上記の定義域以外では恒等的に 0 とする。また、式 (21) は後に述べるように、ACM 要素集合の境界上では曲げモーメントに対応するたわみ角の補間関数と同一のものとなっている。仕事量について等価置換を与える逆ウェイト・マトリックスを $N=4$ の場合について計算すれば、

$$W^{-1} = \frac{2}{7a} \begin{bmatrix} 97 & -26 & 7 & -2 & 1 \\ & 52 & -14 & 4 & -2 \\ & & 49 & -14 & 7 \\ \text{Sym.} & & & 52 & -26 \\ & & & & 97 \end{bmatrix} \dots (22)$$

となる^{6),7)}。表-3 および 表-4 は、それぞれ等分布荷重 p をうける一辺の長さ a の正方形の単純支持板および固定板 (図-2 参照) の中央線上のモーメントをこの逆ウェイト・マトリックスを用いて求めた値と種々の方法によって求めた値とを比較して示したものである。(ii) は Turner らによって提案された方法に相当し、この場合には分割長 $a/8$ で節点力を単純に平均化したものである。また (iv) は (iii) の応力マトリックスによって求めた不連続な応力場を共役射影理論によって最小 2 乗法的に近似したものである。従来、共役射影理論による手法^{1)~4)} から求めた応力場の値がもっともよい値を与える

Table 3 bending moments on central line of clamped plate under uniform load p

nodal point		4	5	6	7	8
concentrated moment ($\times 10^{-2} \cdot pa^2$)		0	3.083	4.809	5.651	5.900
distributed moment ($\times 10^{-2} \cdot pa^2$)	(i)	0.004	2.507	3.921	4.614	4.820
	(ii)	0	2.467	3.847	4.521	4.720
	(iii)	0.118	2.603	4.015	4.693	4.892
	(iv)	0.117	2.605	4.009	4.688	4.891
	(v)	0	2.488	3.891	4.582	4.789

(i) weight matrix method, (ii) simply averaged values, (iii) by stress matrix, (iv) least square average by theory of conjugate projections, (v) analytical solution

とされているが、この表をみるとウェイト・マトリックス法によって求めた応力場は連続であり、他の手法から求めた応力場と比較し、変位と同程度の高い精度を示していることがわかる。表-5 および表-6 は、同様にそ

Table 4 bending moments on central line of simply supported plate under uniform load p

nodal point		4	5	6	7	8
concentrated moment ($\times 10^{-2} \cdot pa^2$)		-6.244	-1.232	1.341	2.476	2.789
distributed moment ($\times 10^{-2} \cdot pa^2$)	(i)	-5.241	-1.027	1.110	2.060	2.322
	(ii)	-4.995	-0.986	1.073	1.981	2.231
	(iii)	—	-0.833	1.241	2.156	2.405
	(iv)	-5.028	-0.888	1.211	2.144	—
	(v)	-5.012	-0.858	1.221	2.148	2.403
		-5.133	-1.009	1.092	2.030	2.291

(i) weight matrix method, (ii) simply averaged values, (iii) by stress matrix, (iv) least square average by theory of conjugate projections, (v) analytical solution

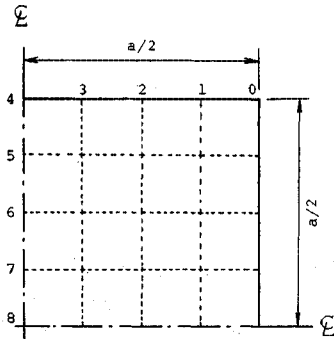


Fig. 2

Table 5 bending moments acting along edge of clamped plate under uniform load p

nodal point		0	1	2	3	4
concentrated moment ($\times 10^{-2} \cdot pa^2$)		-0.206	-1.687	-3.997	-5.734	-6.244
distributed moment ($\times 10^{-2} \cdot pa^2$)	(i)	-0.122	-1.230	-3.303	-4.745	-5.241
	(ii)	-0.165	-1.350	-3.198	-4.587	-4.995
	(iii)	0	-1.140	-3.124	-4.538	-5.028
	(iv)	0	-1.198	-3.237	-4.648	-5.133

(i) weight matrix method, (ii) simply averaged values, (iii) by stress matrix, (iv) analytical solution

Table 6 bending moments acting along edge of clamped plate under central concentrated load P

nodal point		0	1	2	3	4
concentrated moment ($\times 10^{-2} \cdot P$)		-0.009	-0.210	-0.742	-1.233	-1.505
distributed moment ($\times 10^{-1} \cdot P$)	(i)	-0.034	-0.112	-0.594	-1.074	-1.271
	(ii)	-0.007	-0.168	-0.594	-1.026	-1.204
	(iii)	0	-0.139	-0.593	-1.048	-1.233
	(iv)	0	-0.109	-0.575	-1.054	-1.258

(i) weight matrix method, (ii) simply averaged values, (iii) by stress matrix, (iv) analytical solution

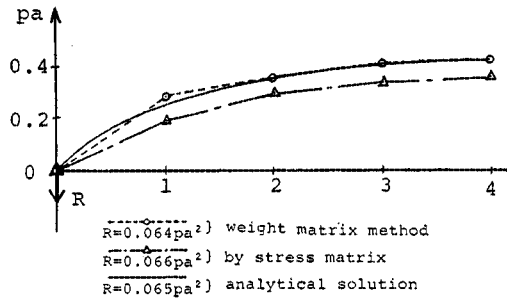


Fig. 3

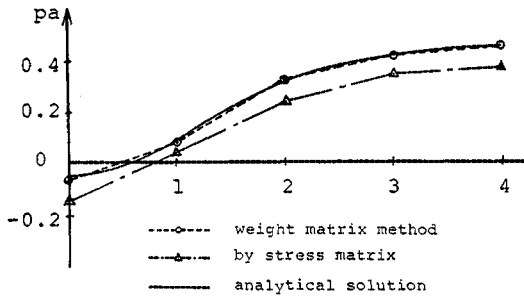


Fig. 4

それぞれ等分布荷重 p および中央集中荷重 P を受ける固定板周辺のモーメント反力を種々の方法によって求めたものを比較したものである。固定辺上では応力マトリックスによって求めたモーメント分布は連続であり、ウェイト・マトリックス法によるものと比較し同程度の精度を有している。

図-3 は、等分布荷重をうける正方形の固定板周辺の反力を種々の方法によって計算した結果を示したものである。この場合にも、逆ウェイト・マトリックスとしては式 (22) を使用している。図-4 は同様に等分布荷重をうける正方形の単純支持板周辺の反力を種々の方法で計算した結果を示したものであるが、単純支持板の場合、薄板の理論では振りモーメントにより隅角部に集中反力が生じるので、ウェイト・マトリックス法では、節点 0 では一般の場合と異なる取り扱いを必要とする。すなわち、節点 0 の修正節点力 R' を振りモーメントによって生じる集中反力 R の一部と考え、分布反力はその他の節点 1~4 の集中反力を逆ウェイト・マトリックス

$$W^{-1} = \frac{48}{a} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{48}{97a} \begin{bmatrix} 26 & -7 & 2 & -1 \\ -7 & 28 & -8 & 4 \\ 2 & -8 & 30 & -15 \\ -1 & 4 & -15 & 56 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(23)$$

によって等価に置換することによって求めている。この分布反力を補間関数 (21) と仮想仕事原理によって、仕事量について等価な集中反力に置換した場合、節点 0 には上向きの集中反力 R'' が生じるので、隅角部の集中反力は $R=R'-R''$ によって与えられる。ウェイト・マトリックス法を用いて求めた分布反力は、解析解とよい一致を示しているが、応力マトリックスによる反力は解析解と比較し、かなり小さな値となっており、わずかではあるが、節点で不連続である。Oden の提案に従って、上記の応力マトリックスから求めた応力場に、共役射影理論を適用し、最小 2 乗法的に平均化することによって、consistent な応力場を求めても、精度の向上を期待することはできないように思われる。

4. 考 察

(1) ウェイト・マトリックス法の数学的意味

A^*A 形式の微分作用素^{13)~15)}の性質を用い、仮想仕事の原理またはポテンシャル・エネルギー最小の原理によって定式化した有限要素モデルによる応力解析にウェイト・マトリックス法を応用した場合の数学的意味について考察する。

a) 3次元連続体の場合

初めに、 A^*A 形式の作用素と変分原理を用い、3次元弾性体の場合について考察する。3次元ユークリッド空間内の領域 R を有限要素の集合 \bar{R} でおきかえ、代表的要素 e の占める領域を \bar{R}_e とすれば、 \bar{R} は、

$$\bar{R} = \cup \bar{R}_e \dots\dots\dots(24)$$

と表わされる。 \bar{R} 内の任意の点 $x=(x_1, x_2, x_3)$ における変位ベクトル、ひずみベクトルおよび応力ベクトルをそれぞれ

$$u = {}^t(u_1, u_2, u_3) \dots\dots\dots(25)$$

$$\epsilon = {}^t(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{21}, \epsilon_{13}, \epsilon_{31}, \epsilon_{23}, \epsilon_{32}) \dots\dots\dots(26)$$

$$\sigma = {}^t(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}) \dots\dots\dots(27)$$

と表わす。ここに、 ϵ_{ij} は工学ひずみで σ_{ij} は応力テンソルの成分である。 $\partial/\partial x_i = \partial_i$ と記し、微分作用素 A を

$$A = {}^t \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(28)$$

と定義すれば、平衡条件およびひずみと変位の関係はそれぞれ、

$$A^* \sigma - \hat{f} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

$$\epsilon = Au \dots\dots\dots(30)$$

と表現される。ここに、 \hat{f} は物体力、 A^* は A の共役作用素を示し、いまの場合

$$A^* = -^t A \dots\dots\dots (31)$$

である。ベクトル関数 u と v の内積を

$$\langle u, v \rangle = \int_{\bar{R}_e} {}^t u v dR \dots\dots\dots (32)$$

$$[u, v]_{\partial \bar{R}_e} = \int_{\partial \bar{R}_e} {}^t u v dS \dots\dots\dots (33)$$

と定義し、 n_i を $\partial \bar{R}_e$ 上の単位法線ベクトルとして、

$$B = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

とおけば、 A と A^* との間には

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle + [u, Bv]_{\partial \bar{R}_e} \dots\dots\dots (35)$$

の関係が成り立つ。一般的な弾性係数マトリックス E を用い、応力-ひずみ関係は

$$\sigma = E \epsilon \dots\dots\dots (36)$$

と表わされるものとすれば、3次元弾性体の基礎微分方程式は式 (29), (30), (36) より

$$Lu - \hat{f} = 0 \dots\dots\dots (37)$$

ただし

$$L = A^*EA \dots\dots\dots (38)$$

と表現される。 L は自己共役作用素で

$$L^* = L \dots\dots\dots (39)$$

である。また、境界条件は

$$t - \hat{t} = 0 \quad \partial \bar{R}_{eo} \text{ 上} \dots\dots\dots (40)$$

$$u - \hat{u} = 0 \quad \partial \bar{R}_{eu} \text{ 上} \dots\dots\dots (41)$$

ただし、

$$t = B\sigma \dots\dots\dots (42)$$

で、 $\partial \bar{R}_{eo}$ および $\partial \bar{R}_{eu}$ は、それぞれ個々の要素 e の応力および変位の与えられた境界で $\partial R_{eo} + \partial R_{eu} = \partial R_e$ とする。 \bar{u} を許容関数として、微分方程式 (37) および境界条件 (40) をオイラーの方程式とする汎関数は、

$$J[\bar{u}] = \frac{1}{2} \langle A\bar{u}, EA\bar{u} \rangle - \langle \hat{f}, \bar{u} \rangle - [t, \bar{u}]_{\partial \bar{R}_{eo}} \dots\dots\dots (43)$$

と記されるが、 u を正解とすれば、式 (37) と作用素 A および L の性質を用いて、上式は、

$$\begin{aligned} J[\bar{u}] &= \frac{1}{2} \langle A(\bar{u} - u), EA(\bar{u} - u) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle Au, EAu \rangle + [t, \hat{u}]_{\partial \bar{R}_{eu}} \dots\dots\dots (44) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\bar{R}_e} {}^t (\bar{\sigma} - \sigma) E^{-1} (\bar{\sigma} - \sigma) dR \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\bar{R}_e} {}^t \sigma E^{-1} \sigma dR + \int_{\partial \bar{R}_{eu}} {}^t \hat{u} dS \\ &\quad \dots\dots\dots (45) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\bar{R}_e} {}^t (\bar{\sigma} - \sigma) (\bar{\epsilon} - \epsilon) dR \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\bar{R}_e} {}^t \sigma \epsilon dR + \int_{\partial \bar{R}_{eu}} {}^t \hat{u} dS \dots\dots\dots (46)$$

の形式に書き換えることができる。ここでは、作用素 A と L の性質を用いたが、式 (45) は Hermann⁽⁶⁾ がエネルギー的考察によって導いた式の一般化と考えることができる。 $J[\bar{u}]$ はポテンシャル・エネルギーであるから、力学的平衡点では、その第1変分は0とならなければならない。正解 u に関する力学量は変分に対しては定数と考えられるので、 $J[\bar{u}]$ の第1変分をとり、グリーンンの定理を用いれば、

$$\begin{aligned} 0 &= \delta J \\ &= \int_{\partial \bar{R}_e} {}^t (\delta \bar{u}) (\bar{t} - t) dS + \int_{\bar{R}_e} {}^t (\delta \bar{u}) (\bar{f} - \hat{f}) dR \\ &\quad \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

$$= \int_{\partial \bar{R}_e} \delta \bar{u}_i (\bar{t}_i - t_i) dS + \int_{\bar{R}_e} \delta \bar{u}_i (\bar{f}_i - \hat{f}_i) dR \dots\dots\dots (48)$$

ただし、ここでの表示は総和規約に従うものとする。したがって、 \bar{R} の部分集合 \bar{R}_b に対しては

$$\sum_e \left\{ \int_{\partial \bar{R}_e} \delta \bar{u}_i (\bar{t}_i - t_i) dS + \int_{\bar{R}_e} \delta \bar{u}_i (\bar{f}_i - \hat{f}_i) dR \right\} = 0 \dots\dots\dots (49)$$

が成り立つ。ここに、 \sum_e は要素集合 \bar{R}_b 全体に対する和を表わすものとする。要素 e の形状関数 $\bar{u}(x)$ を補間関数 $\psi_\alpha^{(e)}$ を用いて

$$\bar{u}_i(x) = \bar{u}_{ij} \psi_\alpha^{(e)}(x) \dots\dots\dots (50)$$

と近似する。ただし、 $\bar{u}_i(x)$ は適当な形状関数とする。式 (50) を式 (49) に代入し、 $\delta \bar{u}_{ij} \neq 0$ で、 $\psi_\alpha^{(e)}$ は連続な関数とすれば、 \bar{R}_b 内の隣接要素の共通境界上では積分 $\int_{\partial \bar{R}_e} {}^t \psi_\alpha^{(e)} dS$ は相殺され、 $\partial \bar{R}_b$ 上の節点 α では次式が成立する、

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \sum_e \left\{ \int_{\partial \bar{R}_e} {}^t \psi_\alpha^{(e)} \bar{t} dS + \int_{\bar{R}_e} (\bar{f} - \hat{f}) \psi_\alpha^{(e)} dR \right\} \\ &= \sum_e \left\{ \int_{\partial \bar{R}_e} {}^t \psi_\alpha^{(e)} dS \right\} \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

ここに、 T_α は修正節点力である。式 (51) は T_α と正解 t_i との関係を表わしていると考えられる。要素集合の節点 α に関する大域的な補間関数 $\chi_\alpha(x)$ を用いれば、式 (51) は、

$$T_\alpha = \int_{\partial \bar{R}_b} {}^t \chi_\alpha dS \dots\dots\dots (52)$$

と書き換えられる。厳密な応力ベクトル t_i を要素集合 \bar{R}_b の境界上で、有限要素モデルの変位と同一の補間関数 χ_α を用いて

$$t'_i = t_{ij} \chi_\alpha \dots\dots\dots (53)$$

と近似的に表現し、式 (52) に代入すれば

$$T_\alpha = W_{\alpha\beta} t'_\beta \dots\dots\dots (54)$$

ここに、 $W_{\alpha\beta}$ はウェイト・マトリックスであり、

$$W_{\alpha\beta} = \int_{\partial \bar{R}_b} \chi_\alpha \chi_\beta dS \dots\dots\dots (55)$$

によって与えられる。式 (52), (54), (55) の関係は正解 t_i の最小二乗近似

$$\oint_{\partial \bar{R}_b} (t - t_i)^2 dS = \text{Min.} \quad (56)$$

から導かれる関係に等価である。また、 t_i を $\partial \bar{R}_b$ 上で x_α と異なる補間関数 x_α' を用いて近似し、ウエイト・マトリックスを導いた場合には、正解 t_i の重みつき残差法による近似

$$\oint_{\partial \bar{R}_b} (t - t_\alpha' x_\alpha') x_\alpha dS = 0 \quad (57)$$

に等価となる。

仮想仕事の原理を用いることによって上記と同様な考察を行うことが可能である。すなわち、仮想仕事の原理は一般に

$$\int_{\bar{R}_e} {}^t \sigma \delta \bar{\epsilon} dR - \int_{\bar{R}_e} {}^t \hat{f} \delta \bar{u} dR - \int_{\partial \bar{R}_{eu}} {}^t \hat{t} \delta \bar{u} dS = 0 \quad (58)$$

と記すことができ、 σ を正解、 $\delta \bar{u}$ を幾何学的境界条件を満足する任意の微小変位増分、 $\delta \bar{\epsilon}$ を $\delta \bar{u}$ に対応するひずみ増分とした場合にも、仮想仕事の原理

$$\int_{\bar{R}_e} {}^t \sigma \delta \bar{\epsilon} dR - \int_{\bar{R}_e} {}^t \hat{f} \delta \bar{u} dR - \int_{\partial \bar{R}_{eu}} {}^t \hat{t} \delta \bar{u} dS = 0 \quad (59)$$

が成り立つ。式 (58), (59) より

$$\int_{\partial \bar{R}_e} {}^t (\delta \bar{\epsilon}) (\bar{\sigma} - \sigma) dR = 0 \quad (60)$$

となり、上式にグリーンの定理を用いれば、式 (47) が得られる。仮想仕事の原理は、任意の応力-ひずみ関係に対して成立するので、上述のウエイト・マトリックス法に関する考察は、非弾性材料に対しても適用し得るものと考えられる。

b) 板の場合

薄板の有限要素法による応力解析にウエイト・マトリックス法を応用した場合について説明する。座標系は図-1 に示したものをを用いるものとし、また前節と同様に、代表的な要素 e の占める領域を \bar{R}_e 、要素集合を \bar{R} で表わすものとする。 \bar{R} の任意の点 $x = (x_1, x_2)$ における曲率ベクトル ρ およびモーメントを表わすベクトル m をそれぞれ

$$\rho = {}^t (\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{12}) \quad (61)$$

$$m = {}^t (m_{11}, m_{22}, m_{12}) \quad (62)$$

と記し、微分作用素 A を

$$A = {}^t (-\partial_1^2, -\partial_2^2, 2\partial_1\partial_2) \quad (63)$$

と定義すれば、平衡条件および曲率と板のたわみ w との関係はそれぞれ

$$\hat{p} - A^* m = 0 \quad (64)$$

$$\rho - A w = 0 \quad (65)$$

と表現される。ここに、 \hat{p} は板の受ける横荷重である。

また A^* は A の共役作用素で、この場合

$$A^* = {}^t A \quad (66)$$

である。弾性係数マトリックスを E とすれば、モーメントと曲率の関係は、

$$m = E \rho \quad (67)$$

と記される。式 (64), (65), (67) により、板の基礎微分方程式は、

$$L w - \hat{p} = 0 \quad (68)$$

ただし、

$$L = A^* E A \quad (69)$$

と表わされ、この場合も L は自己共役作用素である。幾何学的境界条件を満たす許容関数を \bar{w} とすれば、微分方程式 (68) に対する汎関数は

$$J[\bar{w}] = \frac{1}{2} \langle A \bar{w}, E A \bar{w} \rangle - \langle \hat{p}, \bar{w} \rangle - [\hat{F}, G]_{\partial \bar{R}_{eu}} \quad (70)$$

と記される。ただし、

$$\hat{F} = {}^t (-\hat{m}_n, \hat{m}_t, \hat{q}) \quad (71)$$

$$G = {}^t (\bar{w}_n, \bar{w}_t, \bar{w}) \quad (72)$$

とし、 n, t はそれぞれ板周辺の法線および接線方向、 $\hat{m}_n, \hat{m}_t, \hat{q}$ は、それぞれ板周辺の曲げモーメント、ねじりモーメントおよびせん断力、 \bar{w}_n, \bar{w}_t は、それぞれ n および t 方向の w の導関数、また、 $[\hat{F}, G]_{\partial \bar{R}_{eu}}$ の積分は板の周辺に沿って右回りに行うものとする。 w を正解とすれば、式 (68) および作用素 A と L の性質を用い、式 (70) は、

$$J[\bar{w}] = \frac{1}{2} \langle A(\bar{w} - w), E A(\bar{w} - w) \rangle - \frac{1}{2} \langle A w, E A w \rangle + [\hat{F}, \hat{G}]_{\partial \bar{R}_{eu}} \quad (73)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\bar{R}_e} {}^t (\bar{m} - m) E^{-1} (\bar{m} - m) dR - \frac{1}{2} \int_{\bar{R}_e} {}^t m E^{-1} m dR + \int_{\partial \bar{R}_{eu}} {}^t \hat{F} \hat{G} ds \quad (74)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\bar{R}_e} {}^t (\bar{m} - m) (\bar{\rho} - \rho) dR - \frac{1}{2} \int_{\bar{R}_e} {}^t m \rho dR + \int_{\partial \bar{R}_{eu}} {}^t \hat{F} \hat{G} ds \quad (75)$$

と書き換えられる。ここに、 $\bar{m}, \bar{\rho}$ はそれぞれ、 \bar{w} に対応するモーメントおよび曲率を表わすベクトルである。

$J[\bar{w}]$ の第1変分をとり、グリーンの定理を用いれば

$$0 = \delta J = \int_{\bar{R}_e} {}^t (\bar{m} - m) \delta \rho dR \quad (76)$$

$$= \oint_{\partial \bar{R}_e} \{ (\bar{m}_n - m_n) \delta \bar{w}_n + (\bar{m}_t - m_t) \delta \bar{w}_t + (\bar{q} - q) \delta w \} - \int_{\bar{R}_e} (\bar{p} - \hat{p}) \delta \bar{w} dR \quad (77)$$

$$= \oint_{\partial \bar{R}_e} [(\bar{m}_n - m_n) \delta \bar{w}_{,n} + \{ -(\bar{m}_n - m_n)_{,t} + (\bar{q}_n - q_n) \} \delta w] - \int_{\bar{R}_e} (\bar{p} - \hat{p}) \delta \bar{w} dR \dots (78)$$

を得る。ここに、 $L\bar{w} = \bar{p}$ である。式 (76) は前節 4 (1) a) の場合と同様、仮想仕事の原理からも導くことができ、材料の性質や幾何学的境界条件に依存しない形式となっていることに注意する。

次に本論文で数値計算に使用した ACM 要素の形状関数を \bar{w} とした場合について考察する。ACM 要素 e の節点 α における補間関数を $\psi_{\alpha}^{(e)}$, $\psi_{1\alpha}^{(e)}$, $\psi_{2\alpha}^{(e)}$ とすれば、たわみの形状関数は、

$$\bar{w}(x) = w_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(e)} + \theta_{1\alpha} \psi_{1\alpha}^{(e)} + \theta_{2\alpha} \psi_{2\alpha}^{(e)} \dots (79)$$

と表わされる。ここに、 θ_i は x_i 軸まわりの角度である。式 (79) を式 (77), (78) に代入すれば、正解に関する積分 $\oint_{\partial \bar{R}_e} m \psi_{\alpha, n}^{(e)} ds$ などは隣接要素の共通境界上で相殺されるので、補間関数の性質を考慮し、要素集合 \bar{R} の部分集合の境界 $\partial \bar{R}_b$ 上の節点 α における修正節点力は、それぞれ、

$$M_{\alpha} = \sum_e \left[\oint_{\partial \bar{R}_e} (\bar{m}_{n_2} \psi_{\alpha, n}^{(e)} + \bar{m}_{n_2, t}^{(e)} + \bar{q}_{n_2} \psi_{\alpha}^{(e)}) ds + \int_{\bar{R}_e} \hat{p} \psi_{\alpha}^{(e)} dR \right] = \sum_e \oint_{\partial \bar{R}_e} m \psi_{\alpha, n}^{(e)} ds \dots (80)$$

$$M_{n_1} = \sum_e \left[\oint_{\partial \bar{R}_e} (\bar{m}_{n_1} \psi_{\alpha, n}^{(e)} + \bar{m}_{n_1, t}^{(e)} + \bar{q}_{n_1} \psi_{\alpha}^{(e)}) ds + \int_{\bar{R}_e} \hat{p} \psi_{\alpha}^{(e)} dR \right] = \sum_e \oint_{\partial \bar{R}_e} (m \psi_{\alpha, n}^{(e)} + m_{n_1, t}^{(e)} + q_{n_1} \psi_{\alpha}^{(e)}) ds \dots (81)$$

$$Q_{\alpha} = \sum_e \left[\oint_{\partial \bar{R}_e} (\bar{m}_{n_1} \psi_{\alpha, n}^{(e)} + \bar{m}_{n_1, t}^{(e)} + \bar{q}_{n_1} \psi_{\alpha}^{(e)}) ds + \int_{\bar{R}_e} \hat{p} \psi_{\alpha}^{(e)} dR \right] = \sum_e \oint_{\partial \bar{R}_e} (m \psi_{\alpha, n}^{(e)} + m_{n_1, t}^{(e)} + q_{n_1} \psi_{\alpha}^{(e)}) ds \dots (82)$$

$$= \sum_e \left[\oint_{\partial \bar{R}_e} \{ (\bar{Q}_{n_1} - \bar{m}_{n_1, t}) \psi_{\alpha}^{(e)} + \bar{m}_{n_1} \psi_{\alpha, n}^{(e)} \} ds + \int_{\bar{R}_e} \hat{p} \psi_{\alpha}^{(e)} dR \right] = \sum_e \oint_{\partial \bar{R}_e} \{ (Q_{n_1} - m_{n_1, t}) \psi_{\alpha}^{(e)} + m_{n_1} \psi_{\alpha, n}^{(e)} \} ds \dots (83)$$

と表現することができる。これらの式 (80)~(83) は、修正節点力と正解との関係を表わしているものと考えられる。要素集合 \bar{R}_b の節点 α における大域的補間関数を ψ_{α} , $\psi_{1\alpha}$, $\psi_{2\alpha}$ とした場合 $\partial \bar{R}_b$ 上で $\psi_{\alpha, n}$ は式 (21) の φ_{α} と同一の関数となるので、式 (80) は、

$$M_{\alpha} = \oint_{\partial \bar{R}_b} m \varphi_{\alpha} ds \dots (84)$$

と書き換えることができ、上式に対しても式 (52) と同様な考察を行うことができる。 m' を φ_{α} を用いて表わした正解 m の近似的表現とすれば、 φ_{α} が一次の補間関数であることを考慮し、 h を分割長、 c を正の定数として

$$\|m - m'\| \leq ch^2 \dots (85)$$

と記すことができる。上式はウェイト・マトリックス法によって求められた近似解 m' の誤差のオーダー評価を示している。

ここでは、棒およびはりに対する考察を省略したが、まったく同様にして、修正節点力から求めた節点における軸力、曲げモーメントおよびせん断力の値は正解と一致することを示すことができる。

(2) ウェイト・マトリックス法による応力解析と Oden の consistent な応力場との相異について

仮想仕事の原理によって求めた分布力の等価節点力は、変形量に対する補間関数のつくる部分空間へ分布力を射影したものと考えられるので、Oden の共役射影理論とウェイト・マトリックス法との間には数学的な関連性もある^{6,7)}。しかし、有限要素解析において、応力マトリックスによって求められた不連続な応力場から、共役射影理論を応用し、consistent な応力場を得る方法とウェイト・マトリックス法によって連続な応力場を求める方法の間には、次に述べるような相異点がある。

(i) Oden の consistent な応力場は応力マトリックスによって求めた不連続な応力場を基礎としているのに対し、ウェイト・マトリックス法では修正節点力を基礎としている。

(ii) 応力マトリックスを用いて求めた応力場 $\bar{\sigma}$ および \bar{m} は不連続であるが、それぞれ式 (45) と式 (74) に示したように、個々の要素上で弾性係数マトリックスをウェイトとする真の応力場の最小 2 乗近似としての意味を有している。Oden の consistent な応力場は、上記の不連続な応力場を再び要素集合 (集合全体または部分集合) 上、またはその境界上でさらに最小 2 乗近似したものである。一方、要素間で伝達される修正節点力にウェイト・マトリックス法を適用して求めた応力場は、4. (1) で述べたように、二次元および三次元の弾性体の有限要素モデルでは、応力場を直接に要素集合の境界上で最小 2 乗近似したものとしての意味を有している。また、ACM 要素による板の解析にウェイト・マトリックス法を応用した場合には、補間関数の性質によって最小 2 乗近似としての意味をもつ応力場と必ずしも最小 2 乗近似としての意味を有しない応力場とがある。

(iii) 薄板の有限要素解析の場合、Oden の consistent な応力場は、モーメント分布の近似に対してのみ有意なものと思われるが、ウェイト・マトリックス法による近似はモーメント分布と同様、汎関数の中に含まれないせん断力の解析に対しても有効と考えられる。応力マトリックスを用いて求めた板の周辺反力の精度がモーメント値に比較し、極端に低下する原因は、汎関数(70)の中に、せん断力または換算せん断力の計算に必要なたわみ w の3次導関数が直接含まれていないことが原因となっていると考えられる。一方、板の場合、たわみ w とせん断力およびたわみ角とモーメントは、ひずみエネルギーに関して互いに共役な関係にある力学量と考えられる。仕事量に関して等価な置換を行うウェイト・マトリックスおよび逆ウェイト・マトリックスは、このような共役関係を応用しているため、ウェイト・マトリックス法を用いれば、せん断力に対しても高い精度の応力が得られるものと考えられる。棒やはりの場合、要素間で伝達される修正節点力から求めた節点での軸力、モーメントおよびせん断力は、正解値に一致し、これはウェイト・マトリックス法の特殊な場合に相当していると考えられる。一方、Oden の consistent な応力場は、はりなどの場合に対しても正解値には一致しない。

(3) ウェイト・マトリックスおよび逆ウェイト・マトリックスの適用性

ウェイト・マトリックスおよび逆ウェイト・マトリックスの性質は、等価置換を与える力学量の選び方などによる導入法や変形量や分布力に対する補間関数の選び方によって決定される。仮想仕事原理によってウェイト・マトリックスを導く場合、変形量と分布力または集中力は、力学的に共役な関係をもつので、補間関数としては、その解析で変形量または分布力の表現に使用されている関数と同一または可能な限り類似な関数を用いるのが適当なように思われる。分布力が未知関数である場合、変形量と同一の補間関数を用いて近似するのも一つの方法である。別の方法からウェイト・マトリックスを作成する場合でも、補間関数の選び方は解の精度に大きな影響を与えることになるので注意しなければならない。たとえば式(13)または式(19)の逆ウェイト・マトリックスを有限要素法に適用し表—5および表—6の集中モーメント反力から、分布モーメント反力を求めた場合、式(22)を用いた場合よりも精度の低いものとなる。また、この逆に式(22)を式(13),(19)の代わりに、積分方程式(1)の解析に使用した場合も同様である。したがって、その場合に応じて適切な導入法によりウェイト・マトリックスを作成して使用することが重要である。

5. あとがき

ある力学量を等価量として、分布力と集中力間の置換を行って、応力分布などの解析を行う手法であるウェイト・マトリックス法の第1種フレドホルム形積分方程式の数値解法や有限要素法に対する応用を例題を用いて説明し、比較的精度の高い合理的な解が得られることを示した。また、ウェイト・マトリックスおよび逆ウェイト・マトリックスの適用性やウェイト・マトリックス法を連続体の有限要素解析に応用した場合の数学的意味を考察し、この方法によって求められた応力場は、有限要素モデルおよびその補間関数によっては、正解の最小2乗近似となっていることを示した。 A^*A 形式の作用素は一般に自己共役作用素であり、この形式の作用素によって支配される微分方程式に対応する汎関数は常に存在し、変分法の重要な根拠となっている。したがって4.の式(25)~(46)までの議論は上記のような汎関数を用いて求めた近似解の数学的意味を考察する場合に一般に適用することができる。たとえば、吉田ら^{17),18)}によって提案された時間積分アルゴリズムで解析した変位は、正解の時間軸方向に関する最小二乗近似となっていることを容易に示すことが可能である。

本論文では、主として、構造解析における線形問題へのウェイト・マトリックス法の応用について説明を行ったが、ウェイト・マトリックス法は適当な導入法を用いれば、非線形問題や構造解析以外の問題への応用も可能であると考えられる。

Appendix 集中モーメントと等価な等分布モーメントについて

薄板の理論では、よく知られているように、集中荷重載荷点におけるモーメントや集中モーメント載荷点におけるたわみ角は発散する。こうした困難をさけるために、集中荷重あるいは集中モーメントを受ける点の近傍を剛体領域と考えた取り扱いがしばしば行われている⁹⁾。本論文の第2章では、単純支持板周辺のモーメントとたわみ角に関するグリーン関数 $K(s, t)$ からフレキシビリティ・マトリックスを求めるとき、その対角成分 K_{ii} を有限値とするために、単位集中モーメントと仕事量に関して等価な等分布モーメントを使用した。ここでは、仮想仕事原理を用い、単位集中モーメントと仕事量に関して等価な等分布モーメントを求める方法について説明し若干の考察を行う。

まず、ヘビサイドの階段関数 $u(s)$ を用い、単純支持板周辺の分割点 i における等分布モーメントを

$$m_i(s) = \left[u \left\{ s - \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right\} - u \left\{ s - \left(i + \frac{1}{2} \right) h \right\} \right] \dots \dots \dots (A.1)$$

とおく。この等分布モーメントによって、単純支持板の辺上に生じるたわみ角を $\theta(s)$ 、集中モーメント M_i によってその作用点に生じるたわみ角を θ_i とすれば、仮想仕事の原理により

$$\delta \theta_i M_i = \int_{\left(i-\frac{1}{2}\right)h}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)h} \delta \theta(s) m_i(s) ds \dots \dots \dots (A.2)$$

が成立する。ここで、式(7)の補間関数 $\varphi_i(s)$ を用いて

$$\theta(s) = \sum_{i=1}^{N-1} \theta_i \varphi_i(s) \dots \dots \dots (A.3)$$

と近似し、式(A.1)、(A.3)を式(A.2)に代入し、 $\delta \theta_i \neq 0$ を考慮すれば、等分布モーメント $m_i(s)$ と仕事量に関して等価な集中モーメントは、

$$M_i = \alpha_i h \dots \dots \dots (A.4)$$

ただし

$$\alpha_i = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sin^2 \frac{j\pi}{N} i \sin \frac{j\pi}{2N} \right) \frac{1}{j} \dots \dots \dots (A.5)$$

によって与えられる。ここで、さらに単位集中モーメントと分布モーメントの積分値が等しくなければならないという条件を考慮し、図-A・1に示のようにモーメントの分布幅を修正し、単位集中モーメントと等価な分布モーメントとして

$$m_i'(s) = \frac{1}{\alpha_i} \left[u \left\{ s - \left(i - \frac{\alpha_i}{2} \right) h \right\} \right]$$

$$- u \left\{ s - \left(i + \frac{\alpha_i}{2} \right) h \right\} \right] \dots \dots \dots (A.6)$$

を与えることとする。式(A.5)の係数間には $\alpha_i = \alpha_{N-i}$ の関係がある。分割数を $N=8$ とすれば、表-A・1を得る。単位集中モーメントの代わりに、式(A.6)の等分布モーメントを用い、フレキシビリティ・マトリックスの対角成分 K_{ii} を計算すれば、合理的で有限な値が得られるものと思われる。

荷重 $p(x_1, x_2)$ をうける単純支持板の周辺に生じるたわみ角 θ を打ち消すために必要な集中モーメント反力 M を計算し、この M による単純支持板のたわみと荷重 $p(x_1, x_2)$ による単純支持板のたわみを重ね合わせるによって、固定板のたわみを求めることができる。上述の等価置換の合理性を示すために、このようにして求めた等分布荷重および中央集中荷重をうける固定正方形板の中央線上のたわみをそれぞれ表-A-2(a)、(b)に示す(図-1参照)。表の値は Timoshenko の方法で解析した値とよく一致し、上記の考え方が合理的であることを示している(実際の数値計算には、単純化のため、係数 α_i はすべての分割点で同一の値 α_i を使用した)。なお、単純に集中モーメントと等価な等分布モーメントとして、 $\alpha=1$ の場合に相当する式(A.1)の $m_i(s)$ を用いた場合には、固定板の中央線上のたわみは上述の解析結果と比較し、極端に精度が低下する。同様に、 $m_i(s)$ を用いて計算した分布モーメント反力も精度の低いものとなる。

参考文献

- 1) Oden, J.T. and Brauchli, H.J. : On the Calculation of Consistent Stress Distributions in Finite Element Application, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3, pp. 317~325, 1971.
- 2) Oden, J.T. and Reddy, J.N. : Note on an Approximate Method for Computing Consistent Conjugate Stress in Elastic Finite Elements, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 6, pp. 55~61, 1973.
- 3) Oden, J.T. : Theory of Conjugate Projections in Finite Element Analysis, Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics (ed. by J.T. Oden and E.R.A. Oliveira), UAH Press, pp. 41~75, 1973.
- 4) Oden, J.T. : Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1972.
- 5) Hinton, E. and Campbell, J.S. : Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 8, pp. 461~480, 1974.
- 6) Niiseki, S. and Satake, M. : Some Applications of Topological Consideration and Weight-Matrix Method to Finite Element Analysis, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis (ed. by Y. Yamada and R.H. Gallagher) University of Tokyo Press, pp. 61~73, 1973.
- 7) 佐武正雄・新関 茂 : 構造解析におけるけウェイト・マトリックスの研究, 土木学会論文報告集, 第233号, 25~34, 1975.

Table A-1

α_1	0.88941
α_2	0.87684
α_3	0.87475
α_4	0.87432

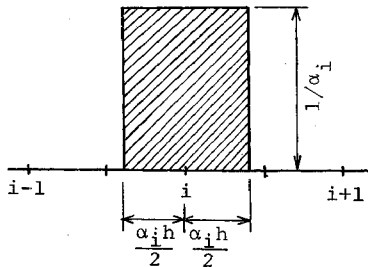


Fig. A-1

Table A-2 plate deflections on central line

(a) uniform load p

division point	C_1	C_2	C_3	C_4
$A(\times 10^{-3} \cdot \text{pa}^2/D)$	0.2781	0.7582	1.1299	1.2651
$B(\times 10^{-3} \cdot \text{Pa}^2/D)$	0.2782	0.7583	1.1302	1.2653

(b) central concentrated load P

division point	C_1	C_2	C_3	C_4
$A(\times 10^{-2} \cdot \text{Pa}^2/D)$	0.7703	2.4684	4.4013	5.6103
$B(\times 10^{-2} \cdot \text{Pa}^2/D)$	0.7701	2.4684	4.4014	5.6104

A: by equivalent uniformly distributed moments
B: Timoshenko's method

- 8) Timoshenko, S. : Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill, pp. 113~116, pp. 197~205, pp. 287~289 1959.
- 9) Zienkiewicz, O.C. (吉識雅夫・山田嘉昭 監訳) : 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, pp. 62~63, pp. 178~184, 1975.
- 10) Martin, H.C. (吉識雅夫 監訳) : マトリックス法による構造力学の解法, 培風館, pp. 105~110, 1970.
- 11) Tong, P. : Exact Solution of Certain Problems by Finite Element Method, AIAA, Vol. 7, No. 1, pp. 178~180, 1969.
- 12) Turner, M.J., Martin, H.C. and Weikel, R.C. : Further Development and Applications of the Stiffness Method, Matrix Method of Structural Analysis, *AGARDograph* 72, Pergamon Press, pp. 203~266, 1964.
- 13) Neumann, J. von : Über Adjungierte Funktionaloperatoren, *Ann. Math. Bd.* 33, pp. 294~310, 1932.
- 14) Kato, T. : On Some Approximate Methods Concerning the Operators T^*T , *Math. Ann. Bd.* 126, pp. 253~262, 1953.
- 15) Oden, J.T. and J.N. Reddy : On Dual-Complementary Variational Principles in Mathematical Physics, *Int. J. Eng. Sci.* Vol. 12, pp. 1~29, 1974.
- 16) Hermann, L.R. : Interpretation of Finite Element Procedure as Stress Error Minimization Procedure, *ASCE*, Vol. 98, EM 5, pp. 1330~1335, 1972.
- 17) 吉田 裕・村田 修 : 構造物の動的応答解析における時間積分のアルゴリズム, 日本鋼構造協会第9回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 107~112, 1975.
- 18) 吉田 裕・増田陳紀・村田 修 : 運動方程式と等価な変分汎関数と時間積分の有限要素スキーム, 土木学会論文報告集, 第254号, pp. 27~36, 1976.

(1976.5.22・受付)