

## 【討 議】

小松 定夫 共著 “材料強度のばらつきを考慮した定常不規則振動体の  
初通過破壊確率の研究” への討議

(土木学会論文報告集第 250 号・1975 年 6 月掲載)

▶ 討議者 (Discussion)

藤野 陽 三 (Waterloo 大学)

By Yozo Fujino

構造物が、ランダム外力を受けるときの信頼性を求めることは、解析、設計に際して、非常に重要な関心事である。著者らは、定常ランダム外力を構造系が受けたときの、振動する構造系の信頼性を、構造系の材料強度のばらつきをも考慮に入れて解析を行った。同じ問題に関心をもつものとして、興味深く読ませて頂いた。

本文 5. 動的信頼性理論による材料強度の特性値の算出について、疑問と提案をもったので、ここに質問させていただきます。

本文で定義された材料強度の特性値を求めることの真意がよくつかめません。ただ単に、単一の特性値をもって、破壊確率が算出できるというだけでは工学的な意味に乏しいのではないのでしょうか。解析という立場から見て、式 (20)、(28) がそれほど複雑な式ではないわけですから、とりたてて式 (53) が実用上便利というわけではないように思われます。また信頼性理論に基づく構造設計法という立場から見たとき、求められた特性値は、あまり意味のないものになるのではないのでしょうか。なぜなら、設計においては、荷重、構造材料のランダム特性、そして要求される信頼性のレベル (破壊確率) が与えられて、構造物の断面等を決めていくのが普通だからです。

設計ということに重点をおいて、特性値を設計の中に活用させることを考えてみました。設計において、重要なことは、構築される一連の構造物の信頼性を一定に保つということです。信頼性の尺度としては本文で使われているように、破壊確率をもって表わすのが普通ですが実用的見地からはあまり好ましくないとされている。ここでは安全性指標  $\beta$  (Safety Index) を用いる。安全性指標  $\beta$  は、信頼性理論に基づく構造設計法の中で、これから重要な役割を果たすと考えられる<sup>1)~4)</sup>。

安全性指標  $\beta$  を次のように定義する<sup>1)</sup>。

“ $\beta$  は、設計に関与する  $n$  個の確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  から求められる正規化された、お互いに独立なガウス分

布に従う変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  から成るガウス確率平面における原点から破壊領域への距離 (norm) である”。

ここで例を示す。お互いに独立な 2 変数  $X_1, X_2$  がガウス分布をなし、破壊領域  $Z$  が

$$Z = X_1 - X_2 > 0 \dots \dots \dots (D \cdot 1)$$

で与えられるとする。正規化されたガウス確率変数  $x_1, x_2$  はおのおの

$$x_1 = \frac{X_1 - \bar{X}_1}{\sigma_{X_1}}, \quad x_2 = \frac{X_2 - \bar{X}_2}{\sigma_{X_2}} \dots \dots \dots (D \cdot 2)$$

で与えられ、破壊領域式 (D・1) は、2 次元ガウス平面で

$$Z = \bar{X}_1 + x_1 \sigma_{X_1} - \bar{X}_2 - x_2 \sigma_{X_2} > 0 \dots \dots \dots (D \cdot 3)$$

となる。ノルムである安全性指標  $\beta$  は、よって

$$\beta = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\sigma_{X_2}^2 + \sigma_{X_1}^2}} \dots \dots \dots (D \cdot 4)$$

となる (図-D・1)。ノルムを与える点 D を設計点 D (Design Point) と呼ぶ。点 D は、破壊するときのもっとも起こりやすい  $X_1$  と  $X_2$  の組合せである。正規化されたガウス確率平面において、破壊境界が、直線と与えられるならば、破壊確率  $P_f$  は

$$P_f = \Phi(-\beta) \dots \dots \dots (D \cdot 5)$$

ここで

$$\Phi(\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ell} e^{-x^2/2} dx \dots \dots \dots (D \cdot 6)$$

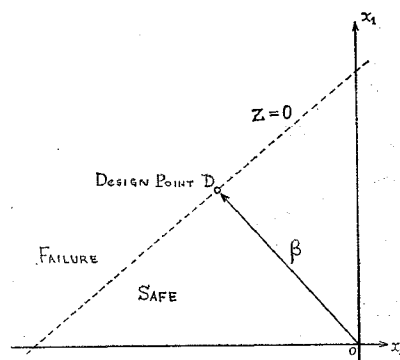


図-D・1 正規化されたガウス確率平面と安全性指標  $\beta$

または任意の  $\beta$  に対して,  $P_f$  の上界は

$$P_f \leq 1 - \chi_n^2(\beta)$$

ここで,  $\chi_n^2(t)$  は  $n$  自由度の二乗分布の分布関数である. 下界はもちろん, 零である<sup>3)</sup>.

材料強度にばらつきが伴うレベル超過問題の信頼性レベル表示に, ここで定義した安全性指標  $\beta$  を用いてみる. 単位時間に応答過程  $x$  が  $X$  をこえる確率  $\bar{F}(x)$  は, 式 (7) より

$$\bar{F}(x) = \frac{\sigma_x}{2\pi\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \dots\dots\dots(D.7)$$

これに対応する正規化されたガウス分布をもつ変数  $x^*$  は

$$x^* = -\Phi^{-1}[\bar{F}(x)] \dots\dots\dots(D.8)$$

という非線形変換によって求められる. 一方, 構造物の強度  $S$  がガウス分布をなすとすれば, 正規化された変数  $s$  は

$$s = \frac{S - \bar{S}}{\sigma_S} \dots\dots\dots(D.9)$$

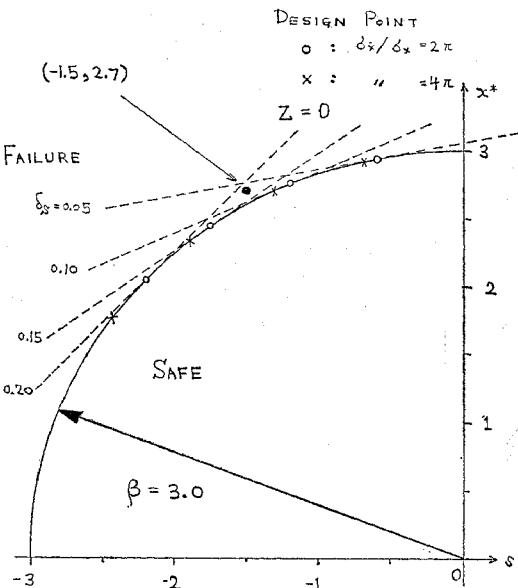
破壊領域  $Z$  は

$$Z = x - S > 0 \dots\dots\dots(D.10)$$

したがって, 式 (D.10) は, 2次元ガウス平面では,

$$Z = \bar{F}^{-1}[\Phi(-x^*)] - \bar{S} - s\sigma_S > 0 \dots\dots(D.11)$$

安全性指標  $\beta$  は, ノルムとして求められる. 要求される安全性指標  $\beta$  は, 前もって設計規準の中で規定される.  $\beta = 3.0$ ,  $\sigma_x/\sigma_x = \omega_0 = 2\pi (T = 1.0 \text{ sec})$  としたときの破壊領域 (破線) を, 2次元ガウス確率平面 ( $s, x^*$ ) で示したのが 図一D.2 である. 材料強度の変動係数  $\delta_S$  の違いにより, 破壊領域, 設計点 (○印で示される) は異なる.



図一D.2 正規化されたガウス確率平面における破壊境界と設計点

る. 同様に,  $\sigma_x/\sigma_x = \omega_0 = 4\pi (T = 0.5 \text{ sec})$  としたときの設計点をも求めた (図一D.2 において × 印で示す). 与えられた  $\delta_S$ ,  $\sigma_x/\sigma_x$  に対して破壊領域はただ1つ決まる. ここで代表的確率変数である強度  $S$ , 応答  $x$  の特性値をおのおの, 次のように定義する<sup>1), 3)</sup>.

$$S_c = \bar{S} + \xi\sigma_S = \bar{S}(1 + \xi\delta_S) \dots\dots\dots(D.12)$$

$$x_c = \eta\sigma_x \dots\dots\dots(D.13)$$

そして

$$\eta^* = -\Phi^{-1}[\bar{F}(\eta\sigma_x)] \dots\dots\dots(D.14)$$

としたとき, もし ( $\xi, \eta^*$ ) が正規化されたガウス平面の破壊境界上の点とする. このとき, 式 (D.12), (D.13) で与えられる特性値  $S_c$  と  $x_c$  を等しくするように設計を行えば, その構造物の信頼性を一定 ( $\beta = \text{一定}$ ) に保つことができる.

実際には, 材料強度の変動係数  $\delta_S$  は, 0.05~0.20 の間をとるとされ, 材料の種類によって異なる. 異なる  $\delta_S$  に対して, 単一の ( $\xi, \eta^*$ ) の組合せをとることを考える.  $\delta_S = 0.05 \sim 0.20$  による破壊境界の交錯する点付近の1点をとればよい. この例では ( $\xi, \eta^*$ ) = (-1.5, 2.7) をとることができよう (図一D.2 において ● 印で示す). 材料強度の特性値  $S_c$  は

$$S_c = \bar{S} - 1.5\sigma_S = \bar{S}(1 - 1.5\delta_S) \dots\dots\dots(D.15)$$

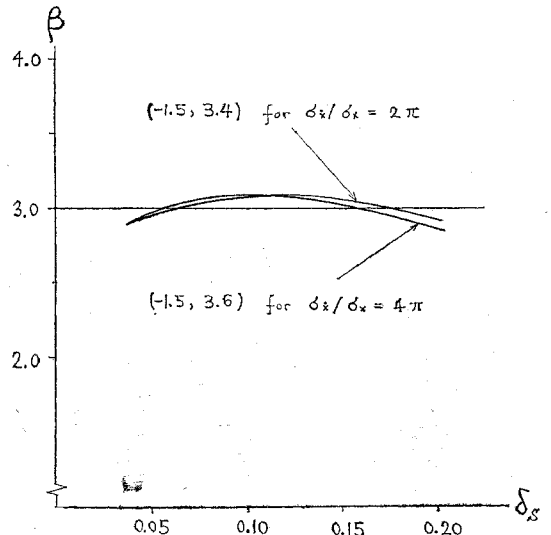
応答の特性値  $x_c$  は,  $\sigma_x/\sigma_x = 2\pi$  のとき,  $\eta^* = 2.7$  を逆変換することにより

$$x_c = 3.4\sigma_x$$

$\sigma_x/\sigma_x = 4\pi$  のとき

$$x_c = 3.6\sigma_x$$

となる. このようにして求められた特性値  $S_c, x_c$  を等しくおくことによって設計された構造物の安全性指標  $\beta$  を定義に従って求めたのが, 図一D.3 である. 変動係



図一D.3 特性値による設計より得られる安全性指標  $\beta$

数  $\delta_S$  にかかわらず、達成される  $\beta$  が、要求される  $\beta (= 3.0)$  に近く、比較的一定に保たれていることが分る。

強度  $S$  が対数正規分布に従うとされる場合は、式 (D・9) の代わりに

$$s = \frac{\ln S - \ln \bar{S}}{\sigma_{\ln S}} \dots \dots \dots (D \cdot 9)'$$

を使えばよい。  $\delta_S$  が小さいとき ( $< .20$ )、  $\ln \bar{S} \approx \ln S_c$ 、  $\sigma_{\ln S} \approx \delta_S$  だから、強度の特性値  $S_c$  は式 (D・12) の代わりに

$$S_c = \bar{S} \exp(\xi \delta_S) \dots \dots \dots (D \cdot 12)'$$

という形をとる。

以上のようにして求められる特性値を構造設計の中で用いることによって、信頼性の客観的基準を満たしながら設計を行うことができる。特性値を使う最大のメリットは、設計基準を簡単な形に保てるということである。

著者らが本文 5. で定義した特性値と、ここで定義さ

れた特性値とでは、目的がかなり違うと考えられるが、後者の方が、実際の設計ということを考えるとき、有用ではないだろうか。ここではレベル超過問題を例にとって考えたが、他の一般的な構造信頼性の問題に適用できることは明らかである。

参 考 文 献

- 1) Cornell, C.A. : Structural Safety Specifications Based on Second-Moment Reliability Anglysis, IABSE Report, London, 1969.
- 2) Hasofer, A.M. and Lind, N.C. : Exact and Invariant Second-Moment Code Format, ASCE, EM 1, Feb., 1974.
- 3) 伊藤 学 : 構造設計における安全性の規範, 土木学会誌, 8月号, 1975.
- 4) Lind, N.C. : Formulation of Probabilistic Design, SM Report No. 128, Solid Mechanics Division, Univ. of Waterloo, 1974.
- 5) Hasofer, A.M. : Reliability Index and Failure Probability, Jour. of Structural Mechanics, Vol. 3, No. 1, 1974.

▶ 回答者 (Closure) ----- 小松定夫 (大阪大学) ・ 中山隆弘 (広島工業大学)

By Sadao Komatsu and Takahiro Nakayama

拙文に深い関心を寄せられ、討議まで賜ったことに対し、厚く感謝申し上げる次第である。しかし著者らが示した材料強度の特性値  $S_c$  の意義を含めて、本文の内容および目的が討議者に十分理解して頂けなかったことをきわめて残念に思っている。

まず著者らが導入した特性値  $S_c$  に関連して、補足的に説明すれば、次のとおりである。

(1.1) 材料強度および応答値がともに不規則変数であるような、いわゆる 2 変数問題は、 $S_c$  の導入によって、1 変数問題と同様に簡明に取扱えるという実用的意義を有するものである。2 変数問題におけるレベル超過率の算定式 (17), (20), (25), (28) は、複雑で、ことに材料強度のばらつきが対数正規分布の場合の式 (25), (28) は純解析的処理が不可能な無限積分を含んでいる。それで本文で述べたようにあらかじめ材料強度の代表的分布型に応じて、表-2 のような特性値  $S_c$  のデータを準備しておくことにより 1 変数問題に帰着できるので、実用的に十分意義がある。

(1.2) 一般にレベル超過率 および 初通過破壊確率はともに、変数の分布型によって異なった値をとる。ところが特性値  $S_c$  を使用することによって分布型にかかわらず標準式 (53) を適用して、画一的にレベル超過率を算定することが可能となる。

(1.3) 特性値  $S_c$  は、確率論的に等価で、材料強度にばらつきのない理想材料の強度を表わす尺度であって、その工学的意味はきわめて明快である。

(1.4) 「信頼性理論に基づく構造設計法という立場から見たとき、求められた特性値は、余り意味がないものになる。なぜなら、設計においては、荷重、構造材料のランダム特性、そして要求される信頼性のレベルが与えられて、構造物の断面などを決めていくのが普通である」と討議者は批判している。しかし著者らが定義した特性値  $S_c$  は決して無意味でない。それを立証するために、定常不規則振動する構造物の部材断面の設計に特性値  $S_c$  を応用してみる\*。

さて振動の継続時間  $\tau$  における初通過破壊確率を  $P_f$  に抑えるように部材断面を設計する場合について述べる。すると式 (40) よりレベル超過率は、

$$\nu_{x, a^+}(S_c) = \frac{-1}{2\tau} \ln(1 - P_f) \dots \dots \dots (A \cdot 1)$$

式 (53) と式 (A・1) を等置することによって次式をうる。

$$\frac{S_c}{\sigma_x} = f(\tau, P_f) \dots \dots \dots (A \cdot 2)$$

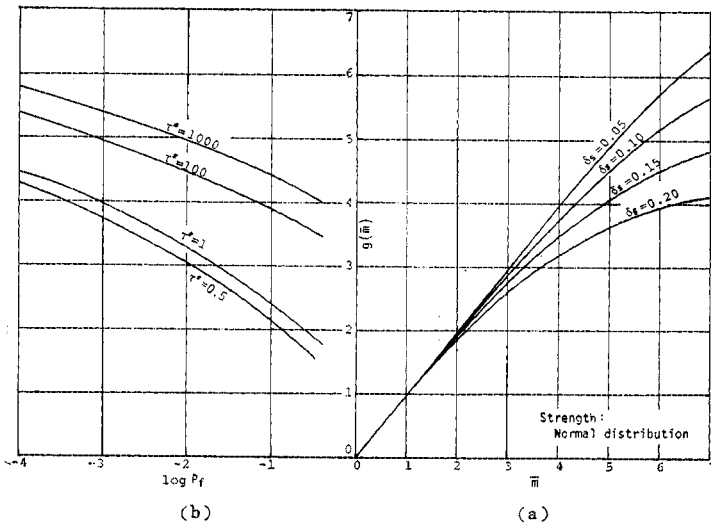
ここに、

$$f(\tau, P_f) = \sqrt{-2 \ln \left[ \frac{-1}{2\tau n} \ln(1 - P_f) \right]} \dots \dots \dots (A \cdot 3)$$

$$n = \frac{\sigma_x}{2\pi\sigma_x} \dots \dots \dots (A \cdot 4)$$

式 (A・2) の分母をともに材料強度の平均値  $\bar{S}$  で

\* 設計に関連する問題は、本文の当初の目的の範囲外であるが、討議に対応して考え方のみを述べる。



図一A・1

除すと、無次元特性値  $\lambda = S_c/\bar{S}$  を導入して、

$$g(\bar{m}) (= \lambda(\bar{m})\bar{m}) = f(\tau^*, P_f) \dots\dots\dots (A.5)$$

ここに  $\tau^* = \tau/T_0$

$T_0$ : 固有振動周期

上式の左辺は式 (14) で定義した無次元量  $\bar{m}$  の関数であって、あらかじめ鋼種および分布型に応じて  $\bar{m}$  の関数として 図一A・1 (a) のように図表化することができる。一方振動継続時間  $\tau$  内の初通過破壊確率  $P_f$  の値が設計基準によって与えられたとすれば、式 (A.5) の右辺が 図一A・1 (b) または式 (A.3) から決まる。したがって、図一A・1 (a) から容易に  $\bar{m}$  の許容値  $\bar{m}_a$  をうる。すると式 (14) から応答の r.m.s. の許容値  $\sigma_{xa}$  が次のように求められる。

$$\sigma_{xa} = \frac{\bar{S}}{\bar{m}_a} \dots\dots\dots (A.6)$$

したがって動的応力度の r.m.s.  $\sigma_x$  が  $\sigma_x \leq \sigma_{xa}$  になるように部材断面を設計すればよいわけである。以上は応答過程について例示したが、包絡線過程を取扱う場合も同様である。

次に討議者が提示された討議の内容について気付いた点を述べる。

(2.1) まず討議文に次のような初歩的な誤りがある。

(i) 「 $P_f$  の上界は零である」と述べているが、 $P_f$  の上界は明らかに 1 である。

(ii)  $x^* = \Phi^{-1}[\bar{F}(x)] \dots\dots (D.8)$  となっているが、式 (D.5) から判断すれば、 $x^* > 0$  に対しては、 $x^* = -\Phi^{-1}[\bar{F}(x)]$  とすべきである。

(iii) したがって式 (D.11) は次のように記すべきである。

$$\bar{F}^{-1}[\Phi(-x^*)] - \bar{S} - s\sigma_s \geq 0 \dots\dots\dots (D.11)_A$$

(iv)  $S_c = \bar{S} - \xi\sigma_s \dots\dots (D.12)$  は  $\xi < 0$  に対して

$$S_c = \bar{S} + \xi\sigma_s = \bar{S}(1 + \xi\delta_s)$$

と訂正すべきである。

(2.2) 討議者は、単位時間に応答過程  $x$  がある値を正の勾配で横切る確率すなわちレベル超過率の許容値を与えた場合の設計の問題について論じている。しかし実際の設計の基準としてレベル超過率を取扱うことは不適當であって、振動継続時間  $\tau$  における初通過確率を基準量とする方が実際的である。ところが継続時間を考慮した初通過破壊確率を基準量とすれば、レベル超過率は、非常に小さい値となり、安全性指標  $\beta$  にきわめて大きな値を指定しなければならなくなる。すると後述するように、討議者の手法の短所が顕著にクローズアップされて現われることになる。

(2.3) 討議者の手法においては、図一

D・2 のようにあらゆる  $\delta_s$  値に対して点線で示されているような曲線群を描き (図一D・2 では直線になっているが実際には曲線である) それらの交錯するあたりの 1 点 ( $\xi_0, \eta_0^*$ ) を設計点として直観的に選定することになっている。それで次のようないくつかの問題点が含まれる。

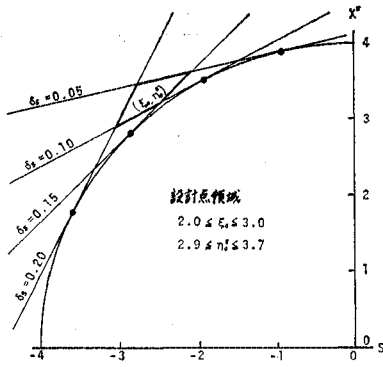
(i) 付録 A・1 に示すように多数の複雑な試行錯誤的計算を繰り返して、軌跡としての曲線群を描く手間は膨大であって、(1.4) で述べた著者の手法に比して決して簡明であるとはいえない。特に材料強度のばらつきが対数正規分布 (式 (D.9)) の場合には、いっそう、計算が複雑となることは自明である。

(ii) 討議者が例示した  $\beta=3.0$  はレベル超過率  $\nu_x, d^+$   $= 1.35 \times 10^{-3}$  に相当する。この値はきわめて大きく実際的でない。

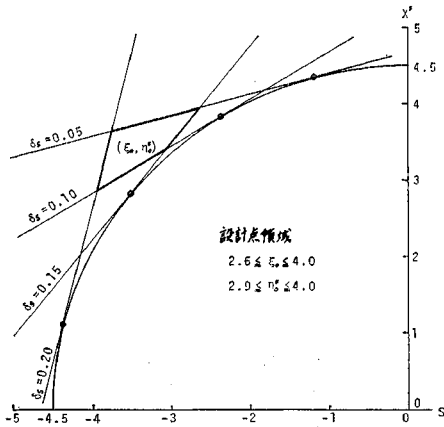
実際には、構造物の耐用年数の期間の振動継続時間  $\tau$  を考慮すれば、 $\beta$  はかなり大きくとらなければならないと考える。 $\beta$  が大きくなれば、図一D・2 に示されている  $s-x^*$  平面上の  $\delta_s = 0.05 \sim 0.20$  に対応する曲線群の交錯する範囲が拡大されると同時に、所定の  $\beta$  値を半径とする円から離れる傾向がある。したがって基準となる許容破壊確率に適合する設計が必ずしも達成できなくなるおそれがある。ちなみに超越方程式 (D.11)<sub>A</sub> を適用して (付録 A・1 参照)  $\beta=4$  (レベル超過率  $3.2 \times 10^{-4}$ ) の場合、 $\beta=4.5$  (レベル超過率  $0.66 \times 10^{-5}$ ) の場合について設計点 ( $\xi_0, \eta_0^*$ ) が含まれる領域を太線で囲むと、それぞれ図一A・2 および図一A・3 のとおりである。 $\beta$  が大きくなるにつれて、設計点領域が拡大され、 $\beta=3$  を半径とする円から次第に遠ざかってゆくことがわかる。

(2.2) で述べたように、設計の見地から重大な問題を包含しているものとする。

(iii) 包絡線過程の問題を討議者の手法により取扱う



図一A.2  $\beta=4.0$  の場合の設計点領域



図一A.3  $\beta=4.5$  の場合の設計点領域

場合

境界線の方程式 (D・11) を 付録 A・1 のように解析的に定式化することはできない。したがって設計点を決定するための数値計算の具体化はきわめて困難となる。

以上を総合して、むしろ著者らの定義した特性値の方が工学的意義ならびに実用性において優れているといえる。

さて一般に、応力や変位が弾性学において欠くことのできないもっとも重要な基本量であるように、破壊確率は構造物の信頼性工学において常に尺度となるべき最も基本となる量である。換言すれば安全性評価のためのもっとも一般性のある論理的基盤を与えるものである。それゆえに破壊確率の計算精度の向上は信頼性工学の発展にとって重要な問題である。現に、この方面の研究が将来とも多数発表されるものと思われる。本文は主としてこの種の問題に関連する事項について論じたものである。そのようなわけで本文においては、特性値  $S_c$  の実用化についての考察を行わなかった。

討議者は安全性指標 (Safety Index) の意味について

述べていられるが、このことに関しては、伊藤学教授が文献 c) において明快かつ懇切丁寧に解説しておられるし、また Cornell, Hasofer, Ang らによって貴重な論文が発表されているので、信頼性工学に関心を寄せるわが国の研究者諸氏は、安全性指標の意義と実用性については、すでに十分に理解しておられるものと思う。著者らもその中の 2 人であると考えていただきたい。

今回の拙文はどちらかという基礎的研究に属するもので次の点に着目して考察を加えたものである。すなわち、(1) 材料強度のもつ確率分布型の相違による破壊確率の差異、(2) Clump の問題に対する方策、(3) 材料強度に金属材料学的上界、下界を考慮した場合の破壊確率、(4) 材料強度の特性値の提案というような、基本事項について論じることを目的としている。

討議者が主張する安全性指標は、以上の問題に対して何一つ明確な回答を与えることができないと考える。むしろ上述の問題点から眺めた場合、安全性指標の適用においても、多大の本質的問題を内蔵しているのではあるまいかという反省が必要であると考える。

実用性という観点から安全性指標を提案された先駆者の偉業に敬意を表するとともに、安全性指標の実用化が促進されることを大いに期待するものである。しかし討議の内容に述べられたような短絡的アプローチに対しては必ずしも賛意を表しえない次第である。

以上を総合して拙文の意義が討議者に理解されることを切に期待する次第である。

なお本論文に次のような誤植があります。読者諸氏に対して謹んでお詫び申し上げます。

ページ	式、図	誤	正
27	式 (21) 右辺分母	$Erf*(\beta_1/\sqrt{2})$	$Erf(\beta_1/\sqrt{2})$
31	図-5, 図-7	図-5 と 図-7 のグラフを入れかえる。	

付録 A・1 設計点領域の設定

式 (D・11)<sub>A</sub> は境界曲線を与えるが、これは具体的に次のように表わすことができる。

$$\sigma_x \sqrt{-2 \ln \left[ \frac{2 \pi \sigma_x}{\sigma_x^2} \phi(-x^*) \right]} - \bar{S} - \sigma_s s = 0 \dots\dots\dots(a.1)$$

また所定の  $\beta, \delta_s, n$  に対して、次の超越方程式を満足する根  $x^*=x_D^*$  を求める。

$$\sqrt{\beta^2 - x^* (1 - \delta_s \sqrt{\beta^2 - x^{*2}})} \frac{d\phi(-x^*)}{dx^*} + 2 \delta_s x^* \phi(-x^*) \ln \{ \phi(-x^*) / n \} = 0 \dots\dots(a.2)$$

また

$$s_D = -\sqrt{\beta^2 - x_D^{*2}} \dots\dots\dots(a.3)$$

かくて所定の  $\beta, \delta_s, n$  に対して 図-D・2 において 0

または×で記した点の座標  $(s_D, x_D^*)$  を決定することができる。

次に点  $D$  を通る境界曲線を描くには、 $x_D^*$  の値を

$$\bar{m} = \frac{\sqrt{-2 \ln \{ \Phi(-x_D^*) / n \}}}{1 - \delta_s \sqrt{\beta^2 - x_D^{*2}}} \dots\dots\dots (a.4)$$

に代入して  $\bar{m}$  を計算し、式 (a.1) を変形した境界曲線の方程式

$$\Phi(-x^*) = n \exp \left\{ -\frac{\bar{m}^2}{2} (1 + \delta_s s)^2 \right\} \dots\dots (a.5)$$

を満足する点  $(s, x^*)$  を求める。そしてこれらの点をプロットし、その軌跡として、ある特定の  $\delta_s$  値に対する境界曲線を描くことができる。4つの  $\delta_s$  値に対して、いちいちこの曲線を求めなければならないわけである。