

状態空間解析による枝わかれ管路の サージング減衰特性の評価

STATE SPACE ANALYSIS OF DAMPING OF SURGES IN BRANCHING PIPELINE SYSTEMS

鬼塚 宏 太 郎*
By Kotaro ONIZUKA

1. 緒 言

水資源の開発とその有効利用は現在ますます重要な問題となっている。農業用水もさらに合理化を求められているが、その一方策として、かんがい用水のパイプライン化が現在各地で急速に進められている¹⁾。これまでの開水路による送配水方式と比較して、水管理上の無効放流を防止し、水管理全般を合理化、省力化できること、路線計画の最適化の可能性、管路を地下に埋設することによる耕地の有効面積の増加、農業の機械化に有利なこと、環境汚染から水質を保護できることなど、多くの利点が考えられる。しかし一方では、大規模かつ複雑な送配水システムを計画・設計し、効率の高い、しかも安全な管理制御を行うという高度な技術的問題に直面している。現在建設されつつある、かんがい用のパイプラインは、これまでのわが国には例を見ない大規模なものである。最大流量は数 t から 20 t 毎秒以上に達し、管口径は 500 mm から 2000 mm、総延長は 50 km 以上に及ぶものもある²⁾。多数の調圧水槽、分土工、自動バルブ、ブースターポンプ、フェームポンド、取水条件によっては、大容量の揚水ポンプ場などを備えた、複雑なシステムであるために、電算機による集中監視制御を必要とする場合もある。技術上の問題を水理学的なものに限定するとしても、解決すべきものが多く、特に管水路系全体の非定常状態の解析が重要である。かんがい期間中の水利用では、流量の時間的変動が大きく、これに関係するバルブ操作、ポンプ運転制御に伴って、水撃、サージングの発生が予想される。設計段階でこれらの非定常特性を的確に予測するために、現在、電算機を駆使した数値解析、シミュレーションが行われ³⁾、この結果は管理制御の方策決定にも有効な指針をあたえている。しかし現状では、管送配水システムの理論的解析の不充分なこと

が痛感されている。現在の工学分野一般でのシステム制御理論の応用が目ざましい事実からすれば、これはやや意外なことでもあるが、しかし充分な理由がある。送配水システムを、多くの要素からなる流れのシステムと考えれば、電気回路に相似であり、回路理論を適用して送配水システムの非定常現象を電気回路での過度現象と同様に解析可能なはずである。問題は水の流れが本質的に非線形法則にしたがう場合が多い点にある。しかし、この困難も、現在急速に発展しつつある非線形システム理論を厳密に適用するならば、決して解決不可能ではないと思われる。著者はかねてから、非線形回路理論的な立場⁴⁾から送配水システムの理論を追求してきたが、最近きわめて限られてはいるが、基本的な結果を得て公表した⁵⁾。

本文の目的は、この結果を枝わかれ管路を含む送配水システムでのサージング現象に適用し、システム全体の減衰特性を論じ、一般的な評価関数を示すことにある。いうまでもなく、サージング現象については、すでに多くの研究がなされていて、文献を網羅することは不可能である。しかし、特に本研究に対して非常に大きな示唆をあたえてくれた研究として、本間・林⁶⁾、林による一連のすぐれた研究^{5), 6)}、機械工学での藤井の多くのすぐれた研究を挙げなければならない^{7), 8)}。またシステム理論では、回路理論での Brayton & Moser の研究⁹⁾に負うところが多い。グラフ理論的研究としては、Kesavan & Chandrashekar¹⁰⁾ と常松の最近の研究¹¹⁾を参考にした点が多い。

2. 管送配水系のシステム構造

本文で述べる理論は、複雑に枝わかれした管路と多数の水槽からなるシステムにかなり一般的に適用されるが、その取り扱い方を説明するために図-1に示すような簡単な系を例にとる。これは上流の貯水池 ① からの

* 正会員 農修 東京農工大学農学部助手 農業生産工学科

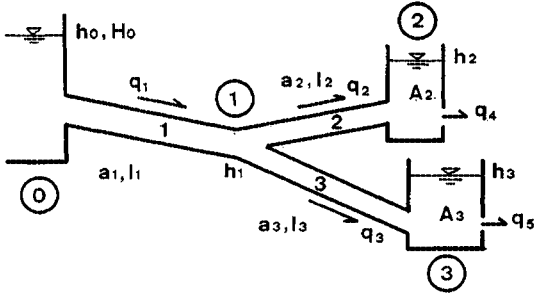


図-1 枝わかれ管路を含む送水系

管路1が分岐点①で管路2と3にわかれ、それぞれ末端の水槽②と③に連結された系である。記号 h_0, h_1, h_2, h_3 は適当な基準面からの貯水池水位、分岐点エネルギーレベル、各水槽水位である。各管路の流量を q_1, q_2, q_3 とし、各水槽からの流出量はそれぞれ q_4, q_5 とする。このような系の非定常状態一般を考える場合には、これらの量はすべてが時間の関数であるが、すべてが独立な量ではなく、これらのうち幾つかのみが、系の瞬間的な状態を決定する、系の状態変数であり、その数は系の力学的自由度に等しい。残りの量は、これらの状態変数によって決められてしまう。このような力学系としての観点から考察を進めよう。

(1) 系の連続方程式と有向グラフ

図-1の例では、流量に関して分岐点①、水槽②、水槽③で各1個の連続条件が成立する。水槽②と③のそれぞれの断面積を A_2, A_3 とすれば、系の連続方程式系として式(1)が成立する。

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_2 + q_3 \\ A_2 \dot{h}_2 &= q_2 - q_4 \\ A_3 \dot{h}_3 &= q_3 - q_5 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

記号 \dot{h}_2, \dot{h}_3 は h_2 と h_3 の時間に関する微分係数 $dh_2/dt, dh_3/dt$ などを示すものと約束しておく。ここで式(1)を書きなおして式(2)の形式にする。

$$\left. \begin{aligned} -q_1 + q_2 + q_3 &= 0 \\ A_2 \dot{h}_2 - q_2 + q_4 &= 0 \\ A_3 \dot{h}_3 - q_3 + q_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

次に式(2)の3式の代数和を作り、その符号を変えたものを式(3)とする。この式は系の連続条件について何も新しい情報をつけ加えるものではないが、系に対応する有向グラフ(システムグラフ)¹⁰⁾を定義するために役立つ³⁾。

$$q_1 - A_2 \dot{h}_2 - A_3 \dot{h}_3 - q_4 - q_5 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

以上の操作によって、図-1の系を図-2に示す閉じた有向グラフに対応させることが可能になる。図-2のグラフの節点①、②、③は貯水池①、分岐点①、水

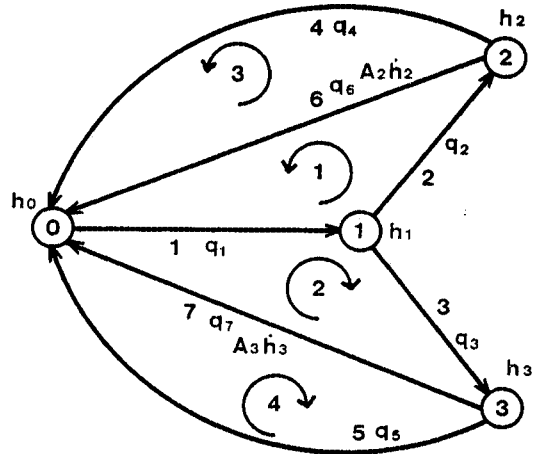


図-2 送水系(図-1)に対応する有向グラフ

槽②、水槽③に対応する。有向辺1, 2, 3, 4, 5は流量 q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 に対応し、流出量を正の向きに、流入量を負の向きにとることになる。有向辺6と7は水槽②と③に単位時間に貯留される量 $A_2 \dot{h}_2$ と $A_3 \dot{h}_3$ に対応している。連続条件式(2)と式(3)は各節点における連続条件であるが、式(3)に対応する節点①は、システム理論的な観点からは、図-1の開放系の外部環境を集約して表現したものと考えてよい³⁾。グラフの各辺の向きは、本来任意に決めてよいが、ここでは管送配水系として自然な流れの方向にしておく。ある瞬間において、各流量が辺の方向に一致していれば正の量とし、逆流していれば負であると約束する。 $A_2 \dot{h}_2$ と $A_3 \dot{h}_3$ の場合は、これらが正の場合には節点②、③からの流出量、負であれば節点②、③への流入量として取り扱うことになる。ともかく図-2の有向グラフは、系の瞬間的な流量連続条件式(2)と系の外部での連続条件式(3)を表現している。そこで、各辺に対応する流量を、その辺の流量であると定義する。

次に図-2のグラフが、対応する図-1の系におけるエネルギーの流れをも表現することができるようにしよう。このためにグラフの各節点のエネルギーレベルとして、対応する貯水池、分岐点、各水槽などの水位、エネルギーレベルを採用する。したがって、節点①のレベルは h_0 、節点①、②、③のレベルは h_1, h_2, h_3 と定義する。これによって、各有向辺に関する損失水頭を定義することが可能になる。すなわち、一つの有向辺について、その始点のレベルから終点のレベルを差し引いた量を、その辺の損失水頭であると約束する。以上で、図-2のグラフの各辺には、流量と損失水頭が明確に定義されたことになる。

(2) 系の流量ベクトルと損失水頭ベクトルの直交性

流量ベクトル Q と損失水頭ベクトル H を式 (4) で定義する。

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ A_2 \dot{h}_2 \\ A_3 \dot{h}_3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} h_0 - h_1 \\ h_1 - h_2 \\ h_1 - h_3 \\ h_2 - h_0 \\ h_2 - h_0 \\ h_3 - h_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

Q と H を用いて連続条件とエネルギー保存則を表現することができる。図-2 のグラフの接続行列 A と閉路行列 B を求めることにより、連続条件は式 (5)、エネルギー保存則は式 (6) で示される。ただし、エネルギー保存則とは、図-2 のグラフの各閉路に沿っての損失水頭の和が 0 に等しいことを意味するものである。

$$A \cdot Q = \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ A_2 \dot{h}_2 \\ A_3 \dot{h}_3 \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ただし、接続行列 A の要素 a_{ij} は行に節点をもち、列に有向辺をもつ行列の成分であり、次のように定義される¹¹⁾。

$$a_{ij} = \begin{cases} 1: \text{節点 } i \text{ が辺 } j \text{ の始点であるとき} \\ -1: \text{節点 } i \text{ が辺 } j \text{ の終点であるとき} \\ 0: \text{節点 } i \text{ が辺 } j \text{ に接続しないとき} \end{cases}$$

式 (5) はキルヒホフの節点法則の一般的表現である。

$$B \cdot H = \begin{matrix} / \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 - h_1 \\ h_1 - h_2 \\ h_1 - h_3 \\ h_2 - h_0 \\ h_3 - h_0 \\ h_2 - h_0 \\ h_3 - h_0 \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここで、閉路行列 B の要素 b_{ij} は行に基本閉路 (図-2 で 1, 2, 3, 4 で示されている) をもち、列に有向辺をもつ行列の成分であり次のように定義される¹¹⁾。

$$b_{ij} = \begin{cases} 1: \text{閉路 } i \text{ に辺 } j \text{ が同じ向きに含まれるとき} \\ -1: \text{閉路 } i \text{ に辺 } j \text{ が反対の向きに含まれるとき} \\ 0: \text{閉路 } i \text{ に辺 } j \text{ が含まれていないとき} \end{cases}$$

基本閉路の向きのみめ方は任意であるが、ここでは図-2 のようにしておく。関係式 (6) はキルヒホフの閉路法

則の一般的表現である。さて、ここで接続行列の各行をベクトルと考えると、全 4 行の和が 0 になることから、第 4 行は他の 3 行に対して一次従属であり、式 (5) において不要なものであることがわかる。そこで A から第 4 行を削除した行列を A^f とすれば、式 (5) の内容は式 (7) で表現できる。

$$A^f \cdot Q = \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot Q = 0 \dots\dots\dots (7)$$

削除された第 4 行は、補助的な連続条件式 (3) に対応し、式 (3) が本質的ではないことを示している³⁾。

以上の準備がなされたので、式 (4) で定義した流量ベクトル Q と損失水頭ベクトル H が互いに直交することを示すことができる。グラフ理論の基本的定理によれば、図-2 のようなグラフの接続行列 A または A^f と閉路行列 B は直交する。すなわち式 (8) が定理として成立する¹²⁾。

$$A \cdot B^T = 0 \text{ または } A^f \cdot B^T = 0 \dots\dots\dots (8)$$

ここで B^T は行列 B の転置行列を示す。式 (8) はわれわれの例でも正しく成立していることがわかる。

さて、行列 A^f (A の第 4 行を削除した行列) の 3 行を 7 次元ユークリッド・ベクトル空間の 3 個のベクトルと考えよう。これらは互いに一次独立なベクトルである。また接続行列 B の 4 行を同じベクトル空間の 4 個のベクトルとすれば、これらも一次独立である。したがって、合計 7 個の行ベクトルを、この 7 次元空間の基底ベクトルとして採用することができる。しかも式 (8) によれば、 A^f の張る 3 次元部分空間と B の張る 4 次元部分空間は互いに直交補空間となっている。ここで式 (4) の流量ベクトル Q と損失水頭ベクトル H を考えると、これらも同じ 7 次元ベクトル空間に属するベクトルであり、しかも式 (7) によって Q は A^f の張る 3 次元部分空間に直交し、 H は式 (6) によって B の張る 4 次元部分空間と直交する。これから Q は B の張る 4 次元部分空間に属し、 H は A^f の張る 3 次元部分空間に属することになる。したがって、流量ベクトル Q と損失水頭ベクトル H は常に直交関係にあることが結論される。この関係を式 (9) とする。式 (9) は電気回路理論において「Tellegen の定理」として知られている^{9), 13)}。

$$Q^T \cdot H = 0, H^T \cdot Q = 0 \dots\dots\dots (9)$$

これまでの結果からも推論されることであるが、この「Tellegen の定理」は、さらにより一般的な直交関係をも包含している。すなわち、次の諸関係が一般に成立する¹³⁾。

$$\dot{H}^T \cdot Q = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$H^T \cdot \dot{Q} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

$$\dot{H}^T \cdot \dot{Q} = 0 \dots\dots\dots(12)$$

\dot{H}, \dot{Q} は H, Q の時間微分を示し, \dot{H}^T は \dot{H} の転置を示す. ただし, これらの直交関係を満足するベクトル H と Q は, それぞれ, キルヒホフの閉路法則式 (6), 節点法則式 (5) を満足するものでなければならない. 以上で求められた関係式 (9), (10), (11), (12) は, 以下本文での理論的基礎となる重要なものである.

(3) 運動方程式と系の力学的自由度

ここで管路内の流れに関する運動方程式を導入すれば, 系の力学的自由度が求められるが, その前に, 流量ベクトル Q と損失水頭ベクトル H のそれぞれの成分について検討する. 結果として, 図-1 の系の形式的な自由度は, 対応するベクトル空間の次元, 7 に等しいことがわかる. まず式 (7) の A^f の要素配列を適当に整理するために, A^f の第 1 行の符号をかえて, 次に各列を適当に入れかえる. Q の行も A^f の列の入れかえに対応させて配列をかえて, これを Q' とすれば, 式 (7) は式 (13) で表現できる.

$$\begin{matrix} & 1 & 6 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \textcircled{1} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot Q' = 0 \\ \textcircled{2} & & & & & & & \\ \textcircled{3} & & & & & & & \end{matrix} \dots\dots\dots(13)$$

式 (13) の行列において, 列 1, 6, 7 に単位行列があり, このことは, 流量 q_1 と流量 q_6, q_7 に相当する $A_2 \dot{h}_2, A_3 \dot{h}_3$ は, 独立な変数ではなく, q_2, q_3, q_4, q_5 で決定されてしまうことを示している. したがって独立な流量は q_2, q_3, q_4, q_5 の 4 個である. 同様にして関係式 (6) は,

$$\begin{matrix} & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 \\ / & \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \cdot H' = 0 \\ 2 & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & \end{matrix} \dots\dots\dots(14)$$

となる. H' は H の各行を適当に入れかえたもの示す. 式 (14) の行列においても, 辺 2, 3, 4, 5 の位置に単位行列ができることから, 損失水頭 H の成分のうち, 辺 1, 6, 7 に対応する 3 個だけが独立であることになる. かくて系の形式的な自由度は, 流量が 4, 損失水頭 3 の計 7 であることがわかる. なお, グラフ理論に関連づけるならば, 独立な損失水頭 3 個は, 図-3 の木の 3 辺に対応し, 独立な流量 4 個は 図-3 の補木の 4 辺に対応する.

以上の準備がなされたので, 力学系としての実際の自由度を求めるために, 各管路についての運動方程式と,

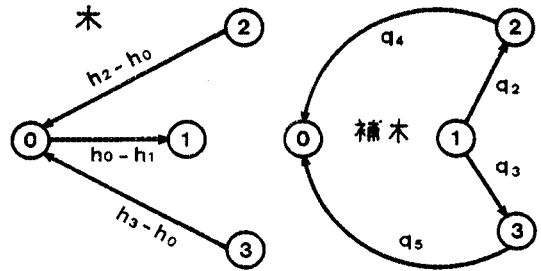


図-3 有向グラフ (図-2) の木と補木

各水槽からの流出量と水槽水位との関係などを導入しよう. これによって, 自由度はさらに小さくなる.

図-1 の系に含まれる管路 1, 2, 3 について, それぞれ断面積を a_1, a_2, a_3 とし, 長さを l_1, l_2, l_3 とするならば, 流れに対する抵抗係数を K_1, K_2, K_3 とし, 重力加速度を g として, 次の 3 式が成立する.

$$L_1 \dot{q}_1 = h_0 - h_1 - K_1 |q_1| q_1, L_1 = l_1 / a_1 g \dots\dots\dots(15)$$

$$L_2 \dot{q}_2 = h_1 - h_2 - K_2 |q_2| q_2, L_2 = l_2 / a_2 g \dots\dots\dots(16)$$

$$L_3 \dot{q}_3 = h_1 - h_3 - K_3 |q_3| q_3, L_3 = l_3 / a_3 g \dots\dots\dots(17)$$

上式の L_1, L_2, L_3 は電気回路でのインダクタンスに対応する量であり, 各水位は電位に, 流量は電流に対応している. 抵抗係数 K_1, K_2, K_3 は, 管路への流入損失その他の形状抵抗を含めたものとしておく.

次に水槽 ②, ③ からの流出量 q_4 と q_5 については, これらは, 一般に水槽水位の連続関数であるか, 適当な定数 (0 も含めて) であるとしてみよう. そこで次の 2 式を仮定する. $f_2(h_2)$ は h_2 の連続関数, $f_3(h_3)$ も同様として

$$q_4 = C_2 \cdot f_2(h_2) \dots\dots\dots(18)$$

$$q_5 = C_3 \cdot f_3(h_3) \dots\dots\dots(19)$$

ここで, C_2, C_3 は定数とするが, バルブ, オリフィス, せきなどの流量係数に対応する. サージング現象が継続している時間中に, 減衰を促進するためのバルブ操作が行われるならば, C_2, C_3 などは時間的に変化する制御変数となるが, 本文では, この場合を考えないことにする.

次に式 (15), (16), (17) の運動方程式を, 各右辺の損失水頭に注目して書き換えて式 (20) の形式とし, 式 (6) のエネルギー保存則の H の成分に代入すれば式 (21) を得る.

$$\left. \begin{matrix} h_0 - h_1 = L_1 \dot{q}_1 + K_1 |q_1| q_1 \\ h_1 - h_2 = L_2 \dot{q}_2 + K_2 |q_2| q_2 \\ h_1 - h_3 = L_3 \dot{q}_3 + K_3 |q_3| q_3 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$\left. \begin{matrix} L_1 \dot{q}_1 + L_2 \dot{q}_2 = (h_0 - h_2) - K_1 |q_1| q_1 - K_2 |q_2| q_2 \\ L_1 \dot{q}_1 + L_3 \dot{q}_3 = (h_0 - h_3) - K_1 |q_1| q_1 - K_3 |q_3| q_3 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

なお, 式 (21) は式 (15)+(16) と式 (15)+(17) の操作によっても直接に導かれる. 式 (21) において, q_1 は

連続条件式 (1) と、これから得られる、 $q_1=q_2+q_3$ の関係を使うことにより消去される。この結果として式 (21) は式 (22) となる。式 (22) は 図-2 の閉路 / と 2 に関するエネルギー保存則であり、回路理論的には閉路方程式を示している。

$$\begin{bmatrix} L_1+L_2 & L_1 \\ L_1 & L_1+L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0-h_2 \\ h_0-h_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1|q_2+q_3}+K_{2|q_2} & K_{1|q_2+q_3} \\ K_{1|q_2+q_3} & K_{1|q_2+q_3}+K_{3|q_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (22)$$

左辺の $L_i (i=1, 2, 3)$ で構成される行列は、管路系の枝わかれ構造を表現するものであるから、以下の本文ではこれを「L 行列」とよぶことにする。右辺の第 1 項は、貯水池と枝わかれ管路の各末端との間の損失水頭を成分とするベクトルである。右辺第 2 項の行列は、「L 行列」に対応する抵抗に関するものであり、以下では「K 行列」とよぶことにする。式 (22) では、管路の抵抗などが、流量（または流速）の 2 乗に比例するものとしているが、仮に抵抗が流量（または流速）の 1 乗に比例するような場合には、「K 行列」の各要素は、定数 $K_i (i=1, 2, 3)$ のみからなる行列となり、「L 行列」と対応した形式となる。後に説明するが、一般の多分岐管路の場合にも、以上と完全に対応する形式の方程式系が得られ、1本の管路が n 個の末端に分れるならば、式 (22) に対応する方程式系は、末端の n 個の流量 $q_j (j=1, \dots, n)$ に関する n 元の形になることが示される。

ここで、式 (22) の両辺に、「L 行列」の逆行列を乗じてより一般的な形式 (23) を導くことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = [L^{-1}] \begin{bmatrix} h_0-h_2 \\ h_0-h_3 \end{bmatrix} - [L^{-1}] [K(q_i)] \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (23)$$

このようにして、運動方程式系は、分岐した末端の管 2 と 3 に対応する 2 個の方程式からなることがわかった。式 (23) の $[L^{-1}]$ と $[K(q_i)]$ は、それぞれ「L 行列」の逆行列と「K 行列」そのものを略記したものとす。

次に連続方程式系 (1) のうち、水槽 ② と ③ に関する 2 式に、 q_4 と q_5 に関する仮定式 (18) と式 (19) を代入すれば式 (24) となる。結果として、2 個の方程式を得たことになる。

$$\left. \begin{aligned} A_2 \dot{h}_2 &= q_2 - C_2 \cdot f_2(h_2) \\ A_3 \dot{h}_3 &= q_3 - C_3 \cdot f_3(h_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

最終的な結果としては、系の状態を表現する微分方程式系は、式 (23) の 2 式と式 (24) の 2 式の計 4 式からなることがわかった。式 (23) と式 (24) をまとめた形式式 (25) は、一般に力学系の状態方程式表示とよばれ、現代制御理論における標準的な形式である¹⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} &= [L^{-1}] \begin{bmatrix} h_0-h_2 \\ h_0-h_3 \end{bmatrix} - [L^{-1}] [K(q_i)] \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \\ \dot{h}_2 &= - \left[\begin{array}{c|c} C_2/A_2 \cdot f_2(h_2) & \\ \hline C_3/A_3 \cdot f_3(h_3) & \end{array} \right] + \begin{bmatrix} 1/A_2 & 0 \\ 0 & 1/A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

式 (25) においては、貯水池水位 h_0 は、サージング現象が継続する時間中には、一般に定数と考えられる場合が多いが、もし変動するならば、系に対しては変化する外力として作用する。このようにして、本文で例として取扱ってきた 図-1 の管送水系は、式 (25) の 4 式に対応する 4 個の自由度をもつことが示された。すなわち、分岐末端の管 2, 3 の流量と水槽 ②, ③ の水位の数の合計 4 である。

常微分方程式系 (25) は、一般に非線形方程式系であり、厳密解を求めることは難しい。しかし適当な数値積分法によるならば、初期条件として、管 2, 3 の流量 q_2^0, q_3^0 と水槽 ②, ③ の水位 h_2^0, h_3^0 をあてて、時間的に変動する系の状態を求めることができる。また貯水池水位が変動する場合には、これを時間の関数として、数値積分にくり入れることができる。しかし本文の目的は、系全体の減衰を理論的に考察することにあるから、これらの数値解法には立ち入らないこととする。

3. 系のパワー収支および状態関数

前章 2. では、系の流量ベクトル Q と損失水頭ベクトル H の直交関係、式 (9), (10), (11), (12) が示された。以下では、これらの基本的関係式の意義を明らかにし、系のエネルギー消費と、これに関係する 2 個の状態関数の存在を示すことにする。

(1) 系におけるパワー収支

まず最初に、 H と Q の直交関係、式 (9) から、系に流れ込むエネルギーと系から流れ出すエネルギーとの間の関係を求めよう。式 (4) で定義された損失水頭ベクトル H の第 1, 第 2, 第 3 成分を、運動方程式 (20) の右辺で置き換え、式 (9) に代入する。連続方程式 (1) を適当に利用して q_4, q_5 を消去すれば、管路 1, 2, 3 に関するエネルギー関係式 (26) が求められる。

$$q_1 h_0 - q_2 h_2 - q_3 h_3 = \sum_{i=1}^3 L_i q_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^3 K_i |q_i| q_i^2 \dots\dots (26)$$

また同じ式 (9) に、式 (4) の H, Q をそのまま代入し、連続方程式 (1) を利用して、 q_1 と h_0 を消去すれば、水槽 ②, ③ に関するエネルギー関係式 (27) が求められる。

$$q_2 h_2 + q_3 h_3 - q_4 h_2 - q_5 h_3 = \sum_{i=2}^3 A_i h_i \dot{h}_i \dots\dots (27)$$

式 (26) の左辺は管路 1, 2, 3 に単位時間に流入する正

味のエネルギーに対応し、右辺第1項は単位時間に増加した運動エネルギーの和、第2項は、単位時間に摩擦損失として失われる散逸エネルギーを示している。式(27)の左辺も同様に、水槽②、③に流れ込む単位時間あたりの正味のエネルギー、右辺は水槽②、③に貯留される位置エネルギーの単位時間あたりの増加量を示す。これら各項は単位時間あたりのエネルギー変化量に対応するもので、パワー(仕事率)の分配を示している。系の運動エネルギー T と位置エネルギー U を式(28)で定義すれば、系全体に関するパワー収支は、式(26)、(27)の代数和として式(29)で表現される。

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} L_i \dot{q}_i^2, \quad U = \sum_{i=2}^3 \frac{1}{2} A_i h_i^2 \dots \dots \dots (28)$$

$$q_1 h_0 - q_4 h_2 - q_5 h_3 = \dot{T} + \dot{U} + \sum_{i=1}^3 K_i |q_i| \dot{q}_i^2 \dots \dots \dots (29)$$

本文で考察している管送水系は、外部からのエネルギー流入と、内部でのエネルギー散逸、外部へのエネルギー流出を伴う、開放系としての力学系であるから、エネルギー保存則は、式(29)のようなパワー収支で表現される。

(2) 系のシステム・ポテンシャル関数⁹⁾

次に、 H, Q の直交関係は式(10)と(11)を用いて、系の状態方程式に密接な関係をもつ状態関数を導くことができる。式(10)に損失水頭ベクトルの時間微分 \dot{H} を代入すれば、連続方程式(1)を用いて整理することにより、式(30)を得る。

$$-(A_2 \dot{h}_2) \dot{h}_2 - (A_3 \dot{h}_3) \dot{h}_3 \\ = -q_2 \dot{h}_2 - q_3 \dot{h}_3 + q_4 \dot{h}_2 + q_5 \dot{h}_3 \dots \dots (30)$$

同様に、式(11)に流量ベクトル Q の時間微分 \dot{Q} を代入し、連続条件式(1)から得られる式(31)の関係をを用いて、 A_2, A_3 を含む項と、 q_1, \dot{q}_1 などを消去すれば、式(32)を得る。

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\ A_2 \dot{h}_2 &= \dot{q}_2 - \dot{q}_4 \\ A_3 \dot{h}_3 &= \dot{q}_3 - \dot{q}_5 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

$$\{L_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + L_2 \dot{q}_2\} \dot{q}_2 + \{L_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + L_3 \dot{q}_3\} \dot{q}_3 \\ = -K_1 |q_2 + q_3| (q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - K_2 |q_2| q_2 \dot{q}_2 \\ - K_3 |q_3| q_3 \dot{q}_3 + h_0 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - h_2 \dot{q}_2 - h_3 \dot{q}_3 \dots \dots (32)$$

次に式(30)と式(32)の代数和を求めて式(33)が導かれる。

$$-(A_2 \dot{h}_2) \dot{h}_2 - (A_3 \dot{h}_3) \dot{h}_3 + \{L_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + L_2 \dot{q}_2\} \dot{q}_2 \\ + \{L_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + L_3 \dot{q}_3\} \dot{q}_3 \\ = h_0 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - (\dot{h}_2 q_2 + \dot{h}_3 q_3) - (\dot{h}_3 q_3 + \dot{h}_2 q_2) \\ - K_1 |q_2 + q_3| (q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - K_2 |q_2| q_2 \dot{q}_2 \\ - K_3 |q_3| q_3 \dot{q}_3 + q_4 \dot{h}_2 + q_5 \dot{h}_3 \dots \dots \dots (33)$$

さて、ここで重要な仮定を設けてみよう。それは貯水池水位 h_0 が、時間的に変化しない定数と仮定すること

である。 H_0 をこの定数とし、式(34)を仮定する。

$$(仮定) \quad h_0 = H_0 \dots \dots \dots (34)$$

次に、前章で設定した、水槽②、③からの流出量 q_4, q_5 に関する仮定(18)と(19)を用いるが、ここでは例としてより具体的なものとするため、式(18)と(19)を次の式(35)で示す仮定で置き換えることにする。

$$(仮定) \quad \left. \begin{aligned} q_4 &= C_2 (h_2 - H_{c2})^m, \quad h_2 > H_{c2} \\ q_5 &= C_3 (h_3 - H_{c3})^n, \quad h_3 > H_{c3} \end{aligned} \right\} \dots \dots (35)$$

ここで、 C_2, C_3 は定数とし一般的な流出係数、 H_{c2}, H_{c3} は定数で、溢流ぎきからの流出ならば、せきの頂上の高さを示し、オリフィスなどからの流出であれば、外部の水位等に相当する。べき指数、 m, n は正の数またはゼロとする。 m, n がゼロならば、 $q_4 = C_2, q_5 = C_3$ である。

以上の仮定を用いると、式(33)の右辺は完全微分の形式となり、これを積分して、一つの状態関数 P を式(36)として定義することができる。

$$P(h_2, h_3, q_2, q_3) = H_0 (q_2 + q_3) - h_2 q_2 - h_3 q_3 \\ - \frac{1}{3} K_1 |q_2 + q_3| (q_2 + q_3)^2 - \frac{1}{3} K_2 |q_2| q_2^2 - \frac{1}{3} K_3 |q_3| q_3^2 \\ + \frac{C_2}{m+1} (h_2 - H_{c2})^{m+1} + \frac{C_3}{n+1} (h_3 - H_{c3})^{n+1} \\ \dots \dots \dots (36)$$

この関数 P を用いると、式(33)は式(37)の形式で表現される。

$$-(A_2 \dot{h}_2) \dot{h}_2 - (A_3 \dot{h}_3) \dot{h}_3 + \{L_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + L_2 \dot{q}_2\} \dot{q}_2 \\ + \{L_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + L_3 \dot{q}_3\} \dot{q}_3 \\ = \frac{\partial P}{\partial h_2} \dot{h}_2 + \frac{\partial P}{\partial h_3} \dot{h}_3 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial P}{\partial q_3} \dot{q}_3 \dots \dots (37)$$

式(37)から直接式(38)が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} A_2 \dot{h}_2 &= -\frac{\partial P}{\partial h_2} \\ A_3 \dot{h}_3 &= -\frac{\partial P}{\partial h_3} \\ L_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + L_2 \dot{q}_2 &= \frac{\partial P}{\partial q_2} \\ L_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + L_3 \dot{q}_3 &= \frac{\partial P}{\partial q_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

この方程式系の最初の2個は、水槽②と③に関する連続方程式であり、他の2個は、図-2の閉路1と2に関する運動方程式である。前章で得られた、系の状態方程式を完全に表現していることは明らかである。関数 P は、電気回路理論において、Mixed Potential として知られ、Brayton & Moser によって導かれたものである⁹⁾。著者は、すでにこの関数 P を水理学的な系について導き、基本的な系についての例を公表したが²⁹⁾、式(38)は枝わかれ管路の場合への拡張となっている。

さて、この関数 P の意義を簡単にまとめておく。関数 P から、系の連続方程式と運動方程式が得られるこ

とはあきらかである。また関数 P の次元は、系に流入、または系から流出するパワーに対応していて、系におけるエネルギー散逸率を表現していると解釈することができる。

ここで式 (38) を見ると、系の定常状態においては、 $\dot{h}_2, \dot{h}_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ がすべてゼロであることから、右辺の各偏微分係数もゼロとなり、関数 P が停留値をとることを示している。すなわち、系の定常状態は、この関数 P の停留値で定義されることがわかる。

(3) 系のリアプノフ関数と漸近的安定性¹⁵⁾

この節では、流量ベクトル Q と損失水頭ベクトル H の直交関係式 (12) を用いて、系の漸近的安定性に関するもう一つの状態関数を求める。前節と同様に、(仮定)式 (34) と (35) を用いるが、(仮定)式 (34) が本質的な意味をもつ。まず、 Q と H の時間微分 \dot{Q} と \dot{H} を式 (39) の形式にしておく。

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ A_2 \dot{h}_2 \\ A_3 \dot{h}_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{H} = \begin{bmatrix} L_1 \dot{q}_1 + 2 K_{1|} q_{1|} \dot{q}_1 \\ L_2 \dot{q}_2 + 2 K_{2|} q_{2|} \dot{q}_2 \\ L_3 \dot{q}_3 + 2 K_{3|} q_{3|} \dot{q}_3 \\ \dot{h}_2 - \dot{h}_0 \\ \dot{h}_3 - \dot{h}_0 \\ \dot{h}_2 - \dot{h}_0 \\ \dot{h}_3 - \dot{h}_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (39)$$

この \dot{Q} と \dot{H} の直交関係式 (12) を求めると、(仮定)式 (34) によって $\dot{h}_0=0$ となることから、式 (40) が導かれる。

$$\sum_{i=2}^3 A_i \dot{h}_i \dot{h}_i + \sum_{i=1}^3 L_i \dot{q}_i \dot{q}_i = - \sum_{i=1}^3 2 K_{i|} q_{i|} \dot{q}_i^2 - \dot{q}_4 \dot{h}_2 - \dot{q}_5 \dot{h}_3 \dots\dots\dots (40)$$

ここで(仮定)式 (35) の時間微分を求めて式 (41) とし、式 (40) に代入すれば式 (42) となる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_4 &= m C_2 (h_2 - H_{c2})^{m-1} \dot{h}_2 \\ \dot{q}_5 &= n C_3 (h_3 - H_{c3})^{n-1} \dot{h}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

ただし重複をさけて式 (40) の右辺のみを示しておく。

$$\begin{aligned} \text{式 (40) の右辺} &= - \sum_{i=1}^3 2 K_{i|} q_{i|} (\dot{q}_i)^2 \\ &\quad - m C_2 (h_2 - H_{c2})^{m-1} (\dot{h}_2)^2 \\ &\quad - n C_3 (h_3 - H_{c3})^{n-1} (\dot{h}_3)^2 \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

ここで式 (40) の左辺に注目すると、これは完全微分の形式であるから、これを積分した関数 V を式 (43) で定義すれば、式 (40) は式 (44) の形式で表現される。

$$V = \sum_{i=2}^3 \frac{1}{2} A_i (\dot{h}_i)^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} L_i (\dot{q}_i)^2 \dots\dots\dots (43)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \sum_{i=1}^3 2 K_{i|} q_{i|} (\dot{q}_i)^2 - m C_2 (h_2 - H_{c2})^{m-1} (\dot{h}_2)^2 \\ &\quad - n C_3 (h_3 - H_{c3})^{n-1} (\dot{h}_3)^2 \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

以上の考察によって得られた関数 V の意義を考える。

いま、系が定常状態から、はずれた状態にあるとしよう。この場合、関数 V は式 (43) の右辺が正值 2 次形式であるから常に正の値を示す。一方、 \dot{V} を示す式 (44) を考えると、定常状態を除いて、常に負の値を示すから、 V の値は時間とともに減少しなければならない。したがって、 V の値は減少を続けて、ついには最小値ゼロに限りなく漸近する。この場合、 \dot{h}_i と \dot{q}_i はすべて限りなくゼロに漸近することがわかるから、系は定常状態に漸近してゆくことが示される。このようにして、われわれの考察してきた管送水系は、適当な仮定のもとにあっては、一般的な形式 (45) で定義される状態関数 V を持ち、漸近的な安定性を示すことがわかる。この関数 V は、力学系におけるリアプノフ関数として知られている^{15), 16)}。

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} A_i (\dot{h}_i)^2 + \sum_{j=1}^r \frac{1}{2} L_j (\dot{q}_j)^2 \dots\dots\dots (45)$$

ただし、 n は枝わかれ管路の各末端の水槽の数を示し、 r は管路系を構成する全管路の数を示す。ここで注意すべきことであるが、式 (45) には独立ではない流量 q_j が含まれているが、これらの流量は、各連続条件を用いると、各末端の管路流量 $q_i (i=1, \dots, n)$ で置き換えられて消去されるから、 V が状態関数となるのである。すなわち、系のリアプノフ関数は、形式的に式 (45) で定義されるが、本質的には、末端の水槽水位と末端管路流量の集合である状態変数によって定義される、系に固有の状態関数であり、系の漸近的安定性を示すものである。系の定常状態は V の最小値すなわち 0 に対応している。

4. サージング減衰特性と評価関数

これまでの考察によって、枝わかれ管路を含む送水系の状態方程式と、これに対応するシステム・ポテンシャル関数 P 、および系の非定常状態での減衰に関するリアプノフ関数 V を導いた。これらの取り扱いにおいては、系を閉じた有向グラフに対応させ、グラフの各辺について定義される流量ベクトル Q と損失水頭ベクトル H の直交性を用いて、系のパワー収支、漸近的安定性などを導いた。例として図-1 の簡単な系を使用し、また幾つかの仮定を導入したが、理論的解析法としては、かなりの一般性を持つことが示されたと考えてよいであろう。

以下の本文では、系のリアプノフ関数 V を応用して、系のサージング減衰特性を定量的に評価する方法を説明する。

(1) 状態空間での系の運動と減衰率

リアプノフ関数 V の意義をさらに明確にするため、

状態方程式 (25) について考えよう。系の非定常状態を表現する式 (25) は、4 個の状態変数を座標軸とする 4 次元状態空間 (または 4 次元相空間) における系の運動を示している。すなわち、ある瞬間における系の状態は、この空間の 1 点で表わされ、時間の経過とともにこの点は空間内を移動する。この場合に、系が前章で示されたようなリアプノフ関数 V を持っているならば、この 4 次元空間内の点の運動は時間とともに次第に減速され、最終的には系の定常状態に対応する 1 点、すなわち定常点において停止することがわかる。

このような観点からすれば、式 (43) であたえられた図一1 の系のリアプノフ関数 V の形式は、4 次元空間内を運動している 1 点としての系の一般的な運動エネルギーを示していると解釈してよいであろう。したがって、式 (44) で示される \dot{V} は、系の一般化された運動エネルギーの散逸率を表現している。したがって、図一1 の管送水系でのサージング現象の減衰を評価するために、次のような状態関数 D を定義することが可能になる¹⁷⁾。

$$D = -\frac{\dot{V}}{V} \dots\dots\dots(46)$$

D は、状態変数の関数であり、 $V=0$ となる定常点を除いた空間の領域で定義される。定常点を除いては、 V は正であり、 \dot{V} は負であるから、関数 D は次の式 (47) を満足することがわかる。

$$D > 0 \dots\dots\dots(47)$$

いま仮に、状態空間の適当な領域 (状態方程式の定義域) において、 D の最小値が存在するとしよう。この値を $2/\tau$ とすれば式 (48) が成立する。

$$D = -\frac{\dot{V}}{V} \geq \frac{2}{\tau} > 0 \dots\dots\dots(48)$$

したがって、次の式 (49) が導かれる。

$$V \leq V_0 e^{-2/\tau \cdot t} \dots\dots\dots(49)$$

V は系の状態空間での運動エネルギーに対応するものであるから、 V の 1/2 乗を考えると、これは系の状態空間での運動速度に対応すると解釈してよい。したがって、式 (49) から式 (50) が導かれ、これは系全体の運動の減衰を表現するものとしてよいであろう。

$$V^{1/2} \leq V_0^{1/2} e^{-t/\tau} \dots\dots\dots(50)$$

なお、 V_0 は V の適当な初期値とする。式 (50) は、系全体が減衰する場合の一つの評価をあたえている。また τ は系全体の減衰に関する時定数を示すものである¹⁷⁾。

以上の結果から、式 (46) で定義された関数 D は系の減衰を評価するために重要な意義を持つことが示された。なお式 (46) の定義を、式 (43) と (44) に対応させれば、 D が系に関係するすべての定数、 A_i, L_i, K_i, C_i, m, n などを含む形式で定義されていることは明らかで

あろう¹⁶⁾。また式 (46) から、 D の次元は時間の逆数であることもわかる。

(2) 計画設計のための時定数計算法

前節において定義された評価関数 D は、力学系としての管送水系の減衰について、解析力学的な意義は大きいと考えられる。しかし、実際の管送水系の計画設計段階において、系のサージング減衰特性を評価するためには、一般に非常に多変数の複雑な関数 D の最小値を求めなければならない。さらに、状態空間の 1 点を代表する最小値から、系全体の減衰特性を評価することは適切ではないと考えられる。

われわれが、具体的な管送水系を計画する場合には、普通、幾つかの定常的な流況、たとえば計画最大流量時の状態、最小流量時の状態、中間的な状態などを想定して、水理計算を実行し、この結果を参考にして、設計案の改善を行うことが多い。これらのことを考慮するならば、系の減衰特性を求めめる場合にも、考えられる多くの定常状態について、それらの定常状態の近傍での減衰特性を具体的に数値として求め、設計上の検討資料にすべきであろう。すなわち、なるべく多くの異なった定常状態を n 個想定し、この定常状態付近での系の減衰特性値 (D の値または時定数 τ の値) を n 個計算し、結果を総合的に評価すべきであると考えられる。このような方法を採用するならば、式 (50) で示されるような絶対的な評価は望めないが、以下に示すような、系の線形化による見通しのよい計算法が可能になる。これは評価関数を 2 個の正值 2 次形式の比に帰着させ、単純な代数的計算によって時定数を求める方法である。

まず最初に、系の状態方程式 (25) をある定常点の近傍で線形化した場合に対応する、リアプノフ関数 V の形式と、その場合の \dot{V} の形式を求めよう。リアプノフ関数 V は、式 (43) から $\dot{h}_i (i=2, 3)$ と $\dot{q}_i (i=1, 2, 3)$ の正值 2 次形式であることがわかるから、線形化によって変化しない。これに対して、式 (44) で示される \dot{V} は非線形の管路抵抗と非線形の水槽流出量の時間微分を含むから、線形化によって変化する。

まず管路抵抗の線形近似を考えよう。管路 i についての抵抗を f_{ri} とすれば、定常状態での流量を q_i^s として、次の式 (51) が得られる。

$$f_{ri} = -K_i |q_i^s| |q_i^s - 2 K_i |q_i^s| (q_i - q_i^s) \dots\dots(51)$$

ここで、 q_i は定常状態に近い非定常流量である。 f_{ri} の時間微分を求めれば、式 (52) となる。

$$\dot{f}_{ri} = -2 K_i |q_i^s| \dot{q}_i \dots\dots\dots(52)$$

同様に水槽からの流出量について線形近似を求めれば、たとえば水槽 ② からの q_2 については、定常状態での水位を h_2^s として、次の式 (53) が得られる。

$$q_4 = C_2(h_2^s - H_{c2})^m + mC_2(h_2^s - H_{c2})^{m-1} \cdot (h_2 - h_2^s) \dots \dots \dots (53)$$

h_2 は, h_2^s に近い非定常水位である. q_4 の時間微分 \dot{q}_4 は, 式 (54) となる.

$$\dot{q}_4 = mC_2(h_2^s - H_{c2})^{m-1} \dot{h}_2 \dots \dots \dots (54)$$

これらの式 (52), (54) を考慮すれば, 線形化した場合の \dot{V} は, 式 (44) に対応して, 次の式 (55) の形式となる.

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^3 2 K_i |q_i^s| (\dot{q}_i)^2 - mC_2 (h_2^s - H_{c2})^{m-1} (\dot{h}_2)^2 - nC_3 (h_3^s - H_{c3})^{n-1} (\dot{h}_3)^2 \dots \dots \dots (55)$$

このようにして, \dot{V} も V と同様に, $\dot{h}_i (i=2, 3)$ と $\dot{q}_i (i=1, 2, 3)$ の 2 次形式となることがわかる. \dot{V} は負値の 2 次形式であるから, $-\dot{V}$ は V と同様に正值 2 次形式である.

以上の結果から, 系の状態方程式をある定常状態の近傍で線形化した場合には, 系の減衰率を示す関数 D は, 2 個の正值 2 次形式の比となることがわかる. したがって, この比の最小値を求めることができれば, 前節の式 (50) に対応する, 定常状態の近傍での時定数 τ が得られる.

これを実行するためには, 線形代数を応用するために, 正值 2 次形式の行列による表現が必要である¹⁴⁾. そこで系の状態変数, h_2, h_3, q_2, q_3 をまとめて状態ベクトル X とし, その時間微分を \dot{X} とし式 (56) で定義する.

$$X = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (56)$$

また, 連続条件, $q_1 = q_2 + q_3$ から導かれる $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3$ を用いて, 式 (43) の \dot{q}_1 を消去すれば, V は次の形式になる.

$$V = \frac{1}{2} \{ A_2 \dot{h}_2^2 + A_3 \dot{h}_3^2 + (L_1 + L_2) \dot{q}_2^2 + 2 L_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (L_1 + L_3) \dot{q}_3^2 \} \dots \dots \dots (57)$$

ここで, 行列 M を式 (58) で定義する. この M を用いると, 式 (43) は式 (59) となる.

$$M = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 + L_2 & L_1 \\ 0 & 0 & L_1 & L_1 + L_3 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (58)$$

$$V = \frac{1}{2} \dot{X}^T M \dot{X} \dots \dots \dots (59)$$

式 (55) で示される \dot{V} の形式も, 同様の形式にまとめられるが, このために, 式 (55) の右辺に含まれる \dot{q}_i^2, \dot{h}_i^2 などの係数をあらためて, 次の式 (60) に整理する.

$$\left. \begin{aligned} K_1' &= 2 K_1 |q_1^s| = 2 K_1 |q_2^s + q_3^s| \\ K_2' &= 2 K_2 |q_2^s|, \quad K_3' = 2 K_3 |q_3^s| \\ C_2' &= mC_2 (h_2^s - H_{c2})^{m-1}, \quad C_3' = nC_3 (h_3^s - H_{c3})^{n-1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (60)$$

これによって式 (55) の \dot{V} は, \dot{q}_1 を消去して式 (61) となる.

$$\dot{V} = - \{ C_2' \dot{h}_2^2 + C_3' \dot{h}_3^2 + (K_1' + K_2') \dot{q}_2^2 + 2 K_1' \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (K_1' + K_3') \dot{q}_3^2 \} \dots \dots \dots (61)$$

ここで, 行列 R を式 (58) の M に対応するものとして式 (62) で定義すれば, $-\dot{V}$ は式 (59) の V に対応する形式 (63) となることがわかる. なお, 行列 M と R は両方とも対称な実数行列であることに注意すべきである.

$$R = \begin{bmatrix} C_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1' + K_2' & K_1' \\ 0 & 0 & K_1' & K_1' + K_3' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (62)$$

$$-\dot{V} = \dot{X}^T R \dot{X} \dots \dots \dots (63)$$

このようにして, 定常状態の近傍で線形化した系の状態方程式に対応する減衰率を示す関数 D は, 次の式 (64) で示される 2 個の正值 2 次形式の比の 2 倍となる.

$$D = \frac{-\dot{V}}{V} = 2 \frac{\dot{X}^T R \dot{X}}{\dot{X}^T M \dot{X}} \dots \dots \dots (64)$$

この式 (64) においては, 分母に含まれる行列 M は式 (58) から明らかなように, 系のエネルギー貯留に関係する定数から構成されている. 同様に分子に含まれる行列 R は, 式 (62) からわかるように系のエネルギー散逸に関係する定数から構成され, 各要素の配列も完全に M と対応している. したがって, 関数 D は, 系の状態空間での散逸エネルギーと運動エネルギーの比であると解釈され, 力学的にも妥当な形式を持っている.

さて, 式 (64) の D の最小値を求めるためには, 式 (64) の正值 2 次形式の比の最小値を求める問題を解決すればよい.

しかし, この問題は線形代数学での基本的問題の一つとして解決済みのものである. すなわち, 証明は省略するが, 行列 M と R がともに対称な実数行列であることから, M と R のそれぞれの固有値はすべて実数であり, この条件を利用すると, 最終的に次の式 (65) で示される行列式の根 (α の値) のうち最小のものを求める問題となる¹⁴⁾.

$$|R - \alpha M| = 0 \dots \dots \dots (65)$$

これまでの例について具体的に示せば, 式 (58) の M と式 (62) の R を用いて, 式 (66) の行列式の根の問題となる.

$$\begin{vmatrix} C_2' - \alpha A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3' - \alpha A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (K_1' + K_2') - \alpha(L_1 + L_2) & K_1' - \alpha L_1 \\ 0 & 0 & K_1' - \alpha L_1 & (K_1' + K_3') - \alpha(L_1 + L_3) \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (66)$$

式 (66) の根のうち最小のものを α_{\min} とすれば、関数 D の最小値を D_{\min} として、式 (67) が成立し、前節の式 (50) に対応する系の時定数 τ は式 (68) で求められる。

$$D_{\min} = 2\alpha_{\min} = \frac{2}{\tau} \dots\dots\dots (67)$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha_{\min}} \dots\dots\dots (68)$$

式 (66) の場合は、行列 $[R - \alpha M]$ が左上に対角行列を含み、右下に対称行列を持つ一つの対称行列であるから、式 (66) は式 (69) と等価であり、4 個の根のうち 2 個は自明であり、他の 2 個は式 (69) の行列式の根に等しい。

$$(C_2' - \alpha A_2)(C_3' - \alpha A_3) \begin{vmatrix} (K_1' + K_2') & K_1' - \alpha L_1 \\ -\alpha(L_1 + L_2) & \\ K_1' - \alpha L_1 & (K_1' + K_3') \\ & -\alpha(L_1 + L_3) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (69)$$

式 (69) の右下の行列式の 2 根を α_3, α_4 、自明な 2 根を α_1, α_2 とすれば、この 4 個の根の最小のものを α_{\min} とすればよい。証明は省略するが α_3, α_4 も必ず正である¹⁴⁾。

しかし、この線形化による手法には重大な欠点がある。すなわち、式 (69) の自明な 2 根を式 (70) で示せば、

$$\alpha_1 = \frac{C_2'}{A_2}, \alpha_2 = \frac{C_3'}{A_3} \dots\dots\dots (70)$$

であるが、 C_2' と C_3' は場合によっては 0 となり得るものである。すなわち、水槽 ②、③ からの流出量的一方または両方が 0 になるような完全遮断の場合には、 α_1, α_2 などが 0 となり、時定数は無限大となってしまう。実際には、前節の式 (50) で示されたように、系の運動はこの場合にも減衰を続けていることは明らかである。

(3) 集中監視制御における関数 D の利用¹⁹⁾

前節においては、計画設計における、系の減衰率または時定数 τ の具体的計算法を考えたが、最後に関数 D を系の集中監視制御に応用する可能性について考察する。

関数 D は式 (46) で定義されるが、この式 (46) の分母、分子は、両方とも、系の状態変数のみの関数である。本文での 図-1 の系の場合には、状態方程式 (25) によって決定される $\dot{h}_2, \dot{h}_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ が求められれば、関数 D のある瞬間の値が確定する。したがって、図-1 のような系において、各水槽の水位 h_2, h_3 と管路 2, 3 の流量 q_2, q_3 が、適当な時間間隔で計測されて、集中監視制御用電算機に入力されるならば、系の非正常現象の減衰を知ることができることになる。もちろん、このためには、系に関係する諸定数 A_i, L_i などのほかに、系の減衰に決定的な影響をあたえる K_i, C_i などの実際の

値 (設計時の仮定値ではない) が知られなくてはならない。これは実際上非常に困難な問題である¹⁹⁾。しかし理論上は、系の状態変数の計測を行い、関数 D またはリアプノフ関数 V などの関数値を時々刻々、オンライン制御用電算機で計算しつつ、系の監視を行う事は可能であり、最適な運転制御のために一つの基礎をあたえることになるであろう。

すなわち、評価関数 D 、またはリアプノフ関数 V などは、系の非正常状態を巨視的に集約して表現する状態量であるから、系の状態を監視する場合には、基本的な意義を持つものであると考えられる。

5. 結 言

本文では、枝わかれ管路を含む送水系のサージング現象を、非線形回路理論によって解析し、系全体としての減衰特性を考察した。結果として、系全体の減衰率を一般的に示す評価関数を導き、その応用について考察した。

これらの過程において、以下の諸結果が示された。

(1) 系の連続方程式系に対応する有向グラフと、このグラフについて定義される、系の流量ベクトル Q と損失水頭ベクトル H を用いて、系の状態方程式を導いた。

(2) ベクトル Q と H が、それぞれ、キルヒホフの節点法則と閉路法則を満足する事実から、 Q と H の直交性を示し、この直交性から、系に関係する 3 個の状態関数を導いた。まず最初に系の状態方程式と定常状態に関係するシステム・ポテンシャル関数 P を示した。次に系の漸近的安定性を示す、リアプノフ関数 V を導き、その意義を状態空間における系の運動の減衰に対応させて考察した。最後に、リアプノフ関数 V と、その時間微分 \dot{V} によって、系の減衰率を示す関数 D を定義した。

(3) 関数 D の最小値から、系全体の減衰に関する時定数 τ が求められることを示した。多くの要素からなる送水系のサージング現象の減衰を、理論的に 1 個の時定数によって評価できることは、システム設計およびシステム制御の観点からすると非常に興味深い。

(4) 評価関数 D の最小値を、より具体的に計算するための手法として、系の線形化を導入し、関数 D を 2 個の正值 2 次形式の比の形式に帰着させ、代数的な計算法をあたえた。ただし、この方法では、系における水槽からの流出量を完全に遮断した場合の時定数は求めることができない。これは残念ながら重大な欠点である。

(5) システムを電算機で集中監視制御する場合に、本文で示した評価関数 D が利用できる可能性について

言及した。

以上の諸結果を導くにあたり、例として簡単な系を用いたが、取り扱い方法はまったく一般的のものであり、より複雑な枝わかれ管路系への適用が可能である。

また本文の内容は純粋に理論的なものであるから、実際問題に対する有効性は、これから検証されなければならない。これに関しては、現在研究中であり、結果は次の機会にゆずりたいと考える。

終りに、本研究を進める過程において、多くの示唆をあたえて下さった東京大学農学部の緒形博之教授に心からの感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 白石英彦・岩崎和己・伊藤喜一：長大な幹線管路系における過渡水理現象の解析，農業土木試験場技報 B, No. 37, 1976.3.
- 2) 高橋利衛：流体輸送プロセスの非線形回路論的考察，自動制御 Vol. 8, No. 1, 1961.
- 3) Onizuka, K. : Potential Function and Stability of Non-Linear Water Distribution Systems, Theoretical and Applied Mechanics, Univ. Tokyo Press, Vol. 23, 1975.
- 4) 本間 仁・林 泰造：調圧水槽の安定条件について（第1報），同（第2報），土木学会論文集 No. 5, 1950.
- 5) Hayashi, T. : The Governing Equation for Surging at the Surge Chamber of the Tail-Race Tunnel due to Load Rejection, 土木学会論文集 No. 56, 1958.
- 6) Hayashi, T. : Dynamical Similitude of Surge Tanks, 土木学会論文集 No. 61・別冊 3-2, 1959.
- 7) 藤井澄二：遠心式ポンプの安定性およびサージングについて（第1報），同（第2報），機械学会論文集 Vol. 13, No. 44, 1947.
- 8) 藤井澄二：同上（第3報），同（第4報），機械学会論文集，Vol. 14, No. 48, 1948.
- 9) Brayton, R.K. and J.K. Moser : A theory of Nonlinear Networks I, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 22, No. 1, 1964 : do. II, ibid. Vol. 22, No. 2, 1964.
- 10) Kesavan, H.K. and M. Chandrashekar : Graph-theoretic Models for Pipe Network Analysis, Jour. Hydraulic Div. Proc. ASCE, Vol. 98, No. HY 2, 1972.
- 11) 常松芳昭：管路水輸送システムのグラフ理論的解析，土木学会論文報告集 No. 229, 1974.
- 12) Henley, E.J. and R.A. Williams : Graph Theory in Modern Engineering, Academic Press, New York, 1973.
- 13) Penfield, Jr. P., R. Spence and S. Duinker : Tellegen's Theorem and Electrical Networks, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.
- 14) Ogata, K. : State Space Analysis of Control Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- 15) Lasalle, J.P. : Stability and Control, Jour. of SIAM Control Ser. A, Vol. 1, No. 1, 1962.
- 16) 高橋利衛：リアプノフの第2の方法について，計測と制御，Vol. 3, No. 10, 1964.
- 17) Kalman, R.E. and J.E. Bertram : Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapunov I Continuous-time Systems, Jour. of Basic Engineering, June, 1960.
- 18) Carstens, M.R. and J.E. Roller : Boundary-shear Stress in Unsteady Turbulent Pipe Flow, Jour. of Hydraulic Div. Proc. ASCE, Vol. 85, No. HY 2, 1959.
- 19) 高橋安人：システムと制御，岩波書店，1968.

(1976.8.26・受付)