

## 周期変動降雨に対する表面流出の応答 特性に関する基礎的研究

### A STUDY ON RESPONSE CHARACTERISTICS OF SURFACE RUNOFF DUE TO PERIODICALY FLUCTUATING RAINFALLS

日野 幹雄\*・砂田 憲吾\*\*  
By Mikio HINO and Kengo SUNADA

#### 1. はじめに

一般に、有効降雨強度の流域内における空間的分布は一様でない。事実、最近では Huff<sup>1)</sup> によれば直径 10 km にも満たない強降雨域の短時間内の移動・消長が観測されているし、わが国における局地性豪雨についてもこのことが従来より指摘されている。したがって、流域の規模によっては、平均降雨などにより有効降雨強度の非一様性を無視することは大いに疑問となる。

従来この点を考慮して検討された例はあまり多くない。Yen<sup>2)</sup>、室田<sup>3)</sup> は室内模型実験により雨域移動速度の変化による流域末端 Hydrograph の変化を観察しており、高橋<sup>4)</sup> は神流川における実例に即して雨域の移動による流出への影響を調べている。また、高棟<sup>5)</sup> は降雨の空間分布特性をガンマ分布で与え出水への効果を考察しており、Surkan<sup>6)</sup> は河道網の分布に対して雨域移動方向を中心に解析している。これらの研究はいずれも流域末端流量が問題とされるが、与えられた流域に対する相対的な雨域の規模を考慮して、流域内任意地点におけるより一般的な変動流量（水位）についても検討する必要がある。

さて、現在の水文学においては Dynamic Hydrology, Stochastic Hydrology および Parametric Hydrology の立場に基づいて発展した多くのモデルの提案と議論の展開がなされており、工学的見地からは量的な把握もかなり十分な段階に達しているものと思われる。こうした今日にあって筆者らは、流出機構解明のためにその重要性では量的な面に劣らぬ質的な面をもう一度見直す必要があると考えている。このためには、実際流域に対して本質を損なうことなく可能な限り単純化を行い、そこから得られる結果を通して質的理解を深めたいと思ってい

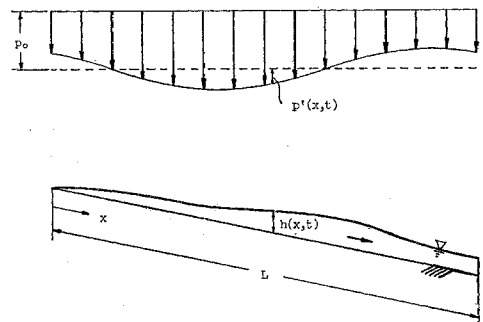
る。この場合には当然量的な面でのひずみが生ぜざるを得ないが、同時に質的な特徴が端的に表現され得ると考えられる。

以上の観点に立ち、本論文では、理想化された流域系への時間変動、移動および停滞する降雨に対する表面流出の応答特性について検討した。基礎方程式は Kinematic Wave Theory に基づく非線形方程式<sup>7)~9)</sup> である。これより変動成分に関して線形化される方程式を用いて級数解法を行った。流域特性パラメーター（斜面勾配・粗度）により変数を無次元化し、流域特性を生る形で含まないようにして、変動降雨域規模と移動速度を中心に基礎的考察を加えた。

#### 2. 基礎方程式と仮定

図—1 に示される理想化された一定勾配をもつ流れは Overland flow または Sheet flow と呼ばれる。このような流れは場所ごとに等流近似を適用した単純な力学モデル (kinematic wave theory) により表面流出解析にしばしば用いられる。

本論で扱うモデルについても kinematic wave の仮定を用いることにすれば、斜面流に関する連続および運動の方程式は次式で与えられる。



図—1 斜面流域

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = p_n - s \dots\dots\dots (1) \\ q = \alpha h^M \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

ここに、 $t$ : 時間,  $x$ : 斜面上流端からの距離,  $q$ : 斜面での単位幅当り流量,  $p_n$ : 降雨強度,  $s$ : 浸透能,  $h$ : 水深,  $\alpha, M$ : 抵抗則に關係する係数。

Manning 則に従うとすれば  $M=5/3$  であり, 斜面勾配を  $I$  として  $q$  は次式で与えられる。粗度係数を  $n$  として,

$$q = \frac{\sqrt{I}}{n} h^{5/3} \quad \left( \alpha = \frac{\sqrt{I}}{n} \right) \dots\dots\dots (3)$$

他方, 流れが層流状態にあれば  $M=3$  となるが, Horton<sup>9)</sup> によれば通常の表面状態では  $M \approx 2$  程度とされている。

いま,  $M=2$  をとり, Manning 則を変形した抵抗則として次式のようにおく,

$$q = \frac{\sqrt{I}}{n'} h^2 \quad \left( \alpha = \frac{\sqrt{I}}{n'} \right) \dots\dots\dots (3')$$

ここに  $n'$  は  $[T]$  の次元を持つ定数であり,  $n$  との關係は  $n'/n = h^{1/3}$  である。

式 (3), (3') から  $q/\sqrt{I} \sim h$  の關係を示せば図-2 のようになる。単純化された式 (3') は式 (3) に対して量的な面には多少のひずみを与えるが, 非線形抵抗則としての本質は残されている。

浸透能  $s$  については一般に未知の部分が多いために, ここでは表面流についての有効降雨強度として,

$$p(x, t) = p_n - s$$

を定義し, これをあらためて単に降雨(強度)と呼ぶことにする。

式 (1), 式 (2) より式 (4) を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \alpha M h^{M-1} \frac{\partial h}{\partial x} = p(x, t) \dots\dots\dots (4)$$

非線形方程式 (4) は右辺の降雨が特別な場合には解析解が得られるが, 一般の場合には特性曲線法あるいは差分法などの数値計算を施して解かれる。

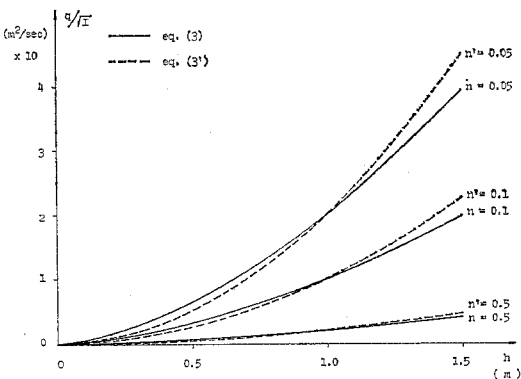


図-2 Manning 抵抗則と近似抵抗則

本論文では式 (4) の線形化などの近似を行い, より一般的な降雨に対してもできるだけ解析解が得られる形にまで進めようとしている。

方程式 (4) において, 降雨による入力  $p$  と出力としての水深  $h$  を定常成分と変動成分とに分けて,

$$p = p_0(x) + p'(x, t), \quad h = h_0(x) + h'(x, t)$$

とおく。  $h' \ll h_0$  として高次の微小項を省略すれば,  $h'$  に関する線形方程式 (5) を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h'}{\partial t} + \alpha M h_0^{M-1} \frac{\partial h'}{\partial x} \\ + \alpha M(M-1) h_0^{M-2} h' \frac{\partial h_0}{\partial x} = p' \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここで, 定常水位  $h_0$  は  $p_0(x) = p_0 = \text{const}$  のとき式 (6) となる<sup>9)</sup>。

$$h_0(x) = \left( \frac{p_0 x}{\alpha} \right)^{1/M} \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) を用いて式 (5) を整理し, あらためて  $h = h'$ ,  $p = p'$  とおけば式 (7) を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + f_1 \frac{\partial h}{\partial x} + f_2 h = p(x, t) \dots\dots\dots (7)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= M \alpha^{1/M} (p_0 x)^{1-1/M} \\ f_2 &= (M-1) \alpha^{1/M} p_0^{1-1/M} x^{1/M-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

上式 (7), (8) の解の特性を調べるためには方程式の線形性から,  $p$  の時間的に周期変化する成分を取り出してこれに対する  $h$  の変化を調べればよい。すなわち,

$$p(x, t) = \Re \{ p_\omega(x) \cdot e^{i\omega t} \} \dots\dots\dots (9)$$

とする。ここに  $p_\omega(x)$  は複素関数である。このとき  $h$  は,

$$h(x, t) = \Re \{ \eta(x) e^{i\omega t} \} \dots\dots\dots (10)$$

の形の解をもつ。ここに  $\eta(x)$  は未知の複素関数である。式 (7), (9), (10) より基礎方程式 (11) を得る。

$$f_1 \cdot \frac{d\eta}{dx} + \{ f_2 + i\omega \} \eta = p_\omega(x) \dots\dots\dots (11)$$

### 3. 全域に一様な時間変動降雨

この場合,  $p_\omega(x) = A$  で式 (11) は式 (12) になる。

$$f_1 \cdot \frac{d\eta}{dx} + \{ f_2 + i\omega \} \eta = A \dots\dots\dots (12)$$

ただし,  $A = \text{const}$ 。

式 (12) は  $\eta(x)$  に関する線形一階の常微分方程式であり式 (8) の  $M$  の値が適当な場合には解析解を求めることができるが,  $f_1, f_2$  が  $x$  の単純な関数とならない  $M$  の場合には簡単には積分が実行できず, Runge-Kutta-Gill 法<sup>10)</sup>などによる数値解によらざるを得ない。

#### a) $M=2$ の場合

このとき, 式 (8) は,

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 2\sqrt{\alpha p_0} x^{1/2} \\ f_2 &= \sqrt{\alpha p_0} x^{-1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

となる。M=2 は前述したように自然の斜面状態における概略値として妥当な値でもある。これ以後の節でも M=2 として議論を進めることになる。

式 (12), (13) より、正弦波変動降雨入力として  $p = A \cdot \cos \omega t$  を与えた場合、Laplace 変換を用いて次式の解を得る。

$$h(x,t) = \frac{A}{\omega} \sqrt{\frac{\alpha p_0}{\omega^2 x} + 1} \cdot \cos(\omega t - \theta) + \frac{C}{\sqrt{x}} \cos(\omega t - \theta) \dots\dots\dots (14)$$

ここに、C: 未知定数

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\omega \sqrt{x}}{\sqrt{\alpha p_0}} \right) \dots\dots\dots (15)$$

式 (14) は吉川ら<sup>11)</sup>の得た結果と一致する。

**b) 到達時間 (concentration time)**

式 (15) は降雨変動に対する水位変動の位相の遅れを示している。これを時間の遅れで示せば、 $x=0$  (上流端) で  $\theta/\omega=0$ ,  $x=x$  で  $\theta/\omega$  である。すなわち  $\theta/\omega$  は上流端からの変動の到達時間 ( $T_c$ ) にほかならない。

いま、 $\phi = \omega \sqrt{x} / \sqrt{\alpha p_0}$  とおけば、 $\theta \sim \phi$  のグラフは図-3 のようになり、 $\phi$  が小さい場合は  $\theta \equiv \phi$  である。斜面長が  $x=L$  のとき、 $\alpha$  に式 (3') を用いれば、到達時間は、式 (16) のようになる。

$$T_c = \frac{\theta}{\omega} \equiv \left( \frac{n'}{p_0} \frac{L}{\sqrt{T}} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (16)$$

新たに理論的に導かれた式 (16) は、これまでの到達時間に関する経験式<sup>12)~14)</sup> あるいは特性曲線より得られる式<sup>9)</sup> と同様な形をしている。

吉野<sup>14)</sup>は完全に開発された流域と未開発の流域とにおける流出の遅れの違いを示す実データを与えている。

式 (16) より

$$T_c = K \left( \frac{L}{\sqrt{T}} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (16')$$

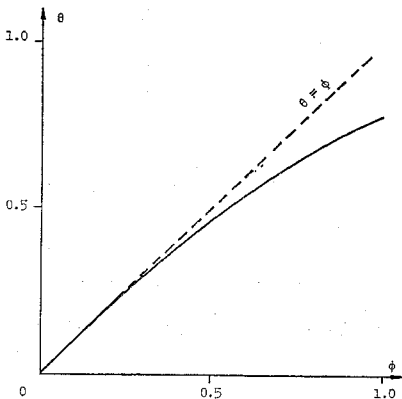


図-3 θ と φ の関係

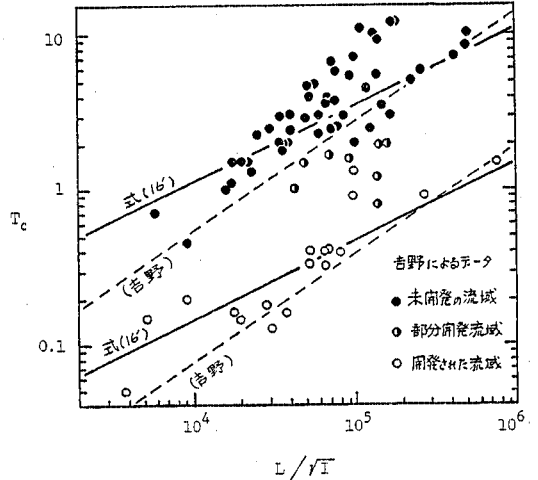


図-4 到達時間

として、吉野の用いたデータと比較すると図-4 のようになる。式 (16') は、簡単のために  $K=一定$  としたにもかかわらずデータとかなりよく一致し、未開発流域に比較して開発された流域に対する方が若干適合度のよい傾向にある。

**4. 一定速度で移動する変動降雨**

いま、式 (9) の右辺を式 (17) のようにおく場合を考える。

$$p_\omega(x) = A \cdot e^{ikhx} \dots\dots\dots (17)$$

このとき変動降雨は  $p(x, t) = \Re\{A \cdot e^{i(kx + \omega t)}\} = A \cos(kx + \omega t)$  で示されるものであり、図-5 のような一定速度で移動する変動降雨を表わしている。

**a) 一般の場合 (数値解法)**

式 (11), (17) において  $\eta$  などを実数部と虚数部とに分解すれば、

$$\eta_r = \Re\{\eta\}, \quad \eta_i = \Im\{\eta\}, \quad \alpha_r = \Re\{A \cdot e^{ikhx}\}, \quad \alpha_i = \Im\{A \cdot e^{ikhx}\}$$

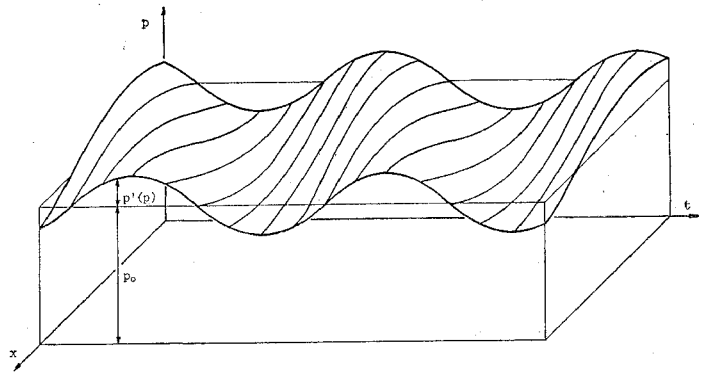


図-5 移動降雨

これより式 (11) は連立方程式 (18) となる.

$$\left. \begin{aligned} f_1 \cdot \frac{d\eta_r}{dx} + f_2 \cdot \eta_r - \omega \eta_i &= \alpha_r \\ f_1 \cdot \frac{d\eta_i}{dx} + f_2 \cdot \eta_i + \omega \eta_r &= \alpha_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

式 (18) は書き直せば式 (19) となる

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f_2}{f_1} & \omega \\ -\omega & -\frac{f_2}{f_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_i \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

式 (18) または (19) は  $f_1(x), f_2(x)$  による変係数をもっており, 式 (13) のような  $f_1, f_2$  に対しては, 普通境界値問題に用いられる Laplace 変換による解析解法は困難である. したがって, 一般には数値計算により解かれる.

**b) 場所に関する Fourier 展開による解**

一定速度で移動する, ある卓越波数  $k$  をもつ変動降雨の場合には, 水位変動  $h$  も波数  $k$ , または波長  $L_p = 2\pi/k$  の変化を基本に含むであろうと考えられる. そこで  $h$  を  $x$  に関する Fourier 級数に展開する. さらに降雨変動に一般性をもたせるために時間に関する変化は任意であるとして次のように  $p, h$  を表わす.

$$p(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n(t) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$h(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n(t) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ここに,  $a_n(t), b_n(t)$  などは未知係数関数であり,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n(t) &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} p \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ \beta_n(t) &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} p \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

である. もし, 降雨が周期的 ( $p \propto e^{i\omega t}$ ) ならば前述したように  $h$  も  $h \propto e^{i\omega t}$  となり,  $\alpha_n, \beta_n$  は  $t$  に無関係となる. 式 (22) を式 (7) に代入すると, 展開係数に  $x$  の関数がかかるため, さらに展開しその項を  $m$  で示せば式 (23) になる.

$$\sum_n \left( \hat{a}_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + \hat{b}_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right) - a_n \sum_n \sum_m \left( C_{n,m}^1 \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} + C_{n,m}^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \right) + b_n \sum_n \sum_m \left( D_{n,m}^1 \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} + D_{n,m}^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \right) + a_n \sum_n \sum_m \left( E_{n,m}^1 \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} + E_{n,m}^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \right)$$

$$+ b_n \sum_n \sum_m \left( F_{n,m}^1 \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} + F_{n,m}^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \right) = \sum_n \left( \alpha_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \dots\dots\dots (23)$$

ここに,  $\left( \sum_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty}, \sum_m \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \right)$

ただし,  $b_0 = \beta_0 = 0$  とする. また,

$$\begin{aligned} C_{n,m}^1 &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} \left( \frac{n\pi}{L} \cdot f_1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot dx, \\ C_{n,m}^2 &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} \left( \frac{n\pi}{L} \cdot f_1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \cdot dx, \\ D_{n,m}^1 &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} \left( \frac{n\pi}{L} \cdot f_1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot dx, \\ D_{n,m}^2 &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} \left( \frac{n\pi}{L} \cdot f_1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \cdot dx, \\ E_{n,m}^1 &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} \left( f_2 \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot dx, \\ E_{n,m}^2 &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} \left( f_2 \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \cdot dx, \\ F_{n,m}^1 &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} \left( f_2 \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot dx, \\ F_{n,m}^2 &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} \left( f_2 \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \cdot dx. \end{aligned}$$

式 (23) は,  $n, m$  をそれぞれ  $k$  までをとり整理してまとめると, 結局次のような  $a_n, b_n$  に関する連立微分方程式となる.

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_0 + Q_{0,0}a_0 + Q_{0,1}a_1 + Q_{0,2}a_2 + \dots \\ R_{0,1}b_1 + R_{0,2}b_2 + \dots = \alpha_0 \\ \hat{a}_1 + Q_{1,0}a_0 + Q_{1,1}a_1 + Q_{1,2}a_2 + \dots \\ R_{1,1}b_1 + R_{1,2}b_2 + \dots = \alpha_1 \\ \hat{a}_2 + Q_{2,0}a_0 + Q_{2,1}a_1 + Q_{2,2}a_2 + \dots \\ R_{2,1}b_1 + R_{2,2}b_2 + \dots = \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_1 + \bar{Q}_{1,0}a_0 + \bar{Q}_{1,1}a_1 + \bar{Q}_{1,2}a_2 + \dots \\ \bar{R}_{1,1}b_1 + \bar{R}_{1,2}b_2 + \dots = \beta_1 \\ b_2 + \bar{Q}_{2,0}a_0 + \bar{Q}_{2,1}a_1 + \bar{Q}_{2,2}a_2 + \dots \\ \bar{R}_{2,1}a_1 + \bar{R}_{2,2}b_2 + \dots = \beta_2 \\ \dots \\ \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

式 (24) を書き直せば,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & Q_{0,2} & \dots & R_{0,1} & R_{0,2} & \dots \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & \dots & R_{1,1} & R_{1,2} & \dots \\ Q_{2,0} & Q_{2,1} & Q_{2,2} & \dots & R_{2,1} & R_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{Q}_{1,0} & \bar{Q}_{1,1} & \bar{Q}_{1,2} & \dots & \bar{R}_{1,1} & \bar{R}_{1,2} & \dots \\ \bar{Q}_{2,0} & \bar{Q}_{2,1} & \bar{Q}_{2,2} & \dots & \bar{R}_{2,1} & \bar{R}_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \dots \dots \dots (25)$$

ここに、

$$Q_{i,j} = E_{i,j} - C_{i,j} \quad (i, j=0, 1, \dots, k),$$

$$R_{i,j} = D_{i,j} + F_{i,j} \quad \begin{matrix} (i=0, 1, 2, \dots, k) \\ (j=1, 2, \dots, k) \end{matrix},$$

$$\bar{Q}_{i,j} = E_{i,j} - C_{i,j} \quad \begin{matrix} (i=1, 2, \dots, k) \\ (j=0, 1, 2, \dots, k) \end{matrix},$$

$$\bar{R}_{i,j} = D_{i,j} + F_{i,j} \quad (i, j=1, 2, \dots, k).$$

式 (25) の方程式系は行列微分方程式に書きうる。

$$\frac{dZ}{dt} = AZ + f \dots \dots \dots (26)$$

ここに、

$$Z = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

また、 $A$  は式 (25) の右辺第1項の係数行列である。

式 (26) の解は式 (27) で与えられる。

$$Z(t) = Z_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot f(\tau) d\tau \dots \dots \dots (27)$$

このとき  $A$  の固有値を用いて行列指数関数  $e^{At}$  を簡約<sup>15)</sup>すればよいが項数の多い場合は解析解には適さない。

ここでは式 (24) または (25) の形のまますべてを数値計算する。

① 無次元化

移動降雨を扱うこの場合には、雨域の移動速度、流下時間を考慮する必要がある。このために斜面長 ( $L$ ) と定常成分の降雨強度 ( $p_0$ ) を規定し、表面流の斜面末端流速  $v_0 = \alpha h_0^{M-1}$  を用いて時間に関するパラメーターを次のように決める。 $M=2$  としているので

$$T = \frac{L}{\alpha h_0} = \sqrt{\frac{L}{\alpha p_0}}$$

したがって変数の無次元化は次のようになる。

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = t / \sqrt{\frac{L}{\alpha p_0}},$$

$$h^* = h/h_0,$$

$$p^* = p/p_0, \quad k^* = k \cdot L, \quad \omega^* = \omega \cdot \sqrt{\frac{L}{\alpha p_0}}.$$

ここに、 $h_0 = \sqrt{\frac{p_0 L}{\alpha}}$  である。

上の変数を用いて、式 (7) を表わせば式 (28) となる。

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + f_1 \cdot \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + f_2 \cdot h^* = p^* \dots \dots \dots (28)$$

ただし、 $f_1^* = 2x^{*1/2}$ ,  $f_2^* = x^{*-1/2}$

式 (7) と式 (28) が同形となるため式 (25) は上の無次元変数に対しても成り立つ。

② 数値計算結果

変動降雨を  $p = A \cdot \cos(kx + \omega t)$ ,  $A$ : 一定と与える。

これは速度  $V_p = -\omega/k$  ( $>0$  のとき下流方向) で移動する波長  $L_p = 2\pi/k$  の正弦変動降雨である。このとき式 (25) を初期値=0 として Runge-Kutta-Gill 法を用い 21 項までとり水位変動を求めた。変数は流域特性により無次元化されているので、以下の結果は流域特性パラメーターに関係しない。

図-6 は代表的な計算例として各地点の水位変動を示したものである。降雨域の波長は ( $L_p$ )= $L$  すなわち斜面長に等しく、移動速度 ( $V_p = -\omega/k$ )= $1.0$  すなわち斜面末端流速に等しい降雨条件の場合である。変動降雨の強さは  $A/p_0 = 0.2$  としており、図-6 では水位変動が  $A/p_0$  の約 1/2,  $h/h_0 = 0.1$  以下となることが示されている。図-7 は同一条件での水位変動等高線を示したもので、絶対値は最大値で規格化されている。

図-8 は雨域波長を 1/2 とした場合であり、変動のピークは流域末端には生じない。図-9 は移動速度を 2 倍にしたときの結果であり、上流に独立した変動のピークをもっている。

図-6~9 はいずれも雨域が上流から下流方向に移動する場合を示しているが、図-10 は上流方向に移動す

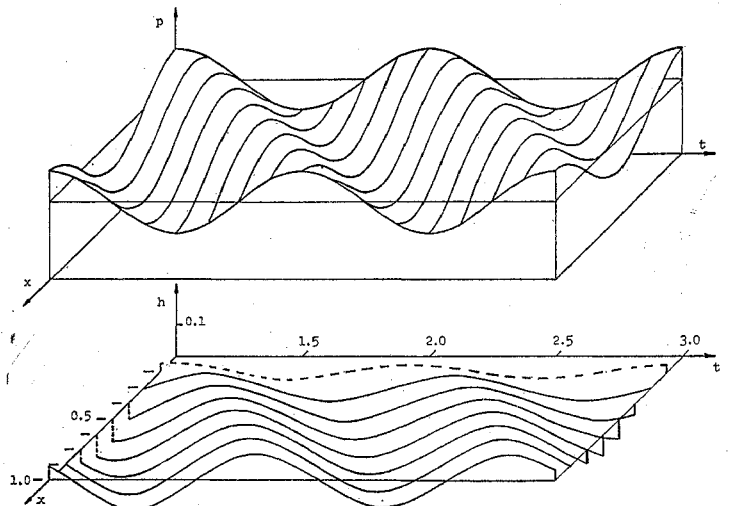


図-6 各地点の水位変動 ( $L_p=L$ ,  $V_p=1.0$ )

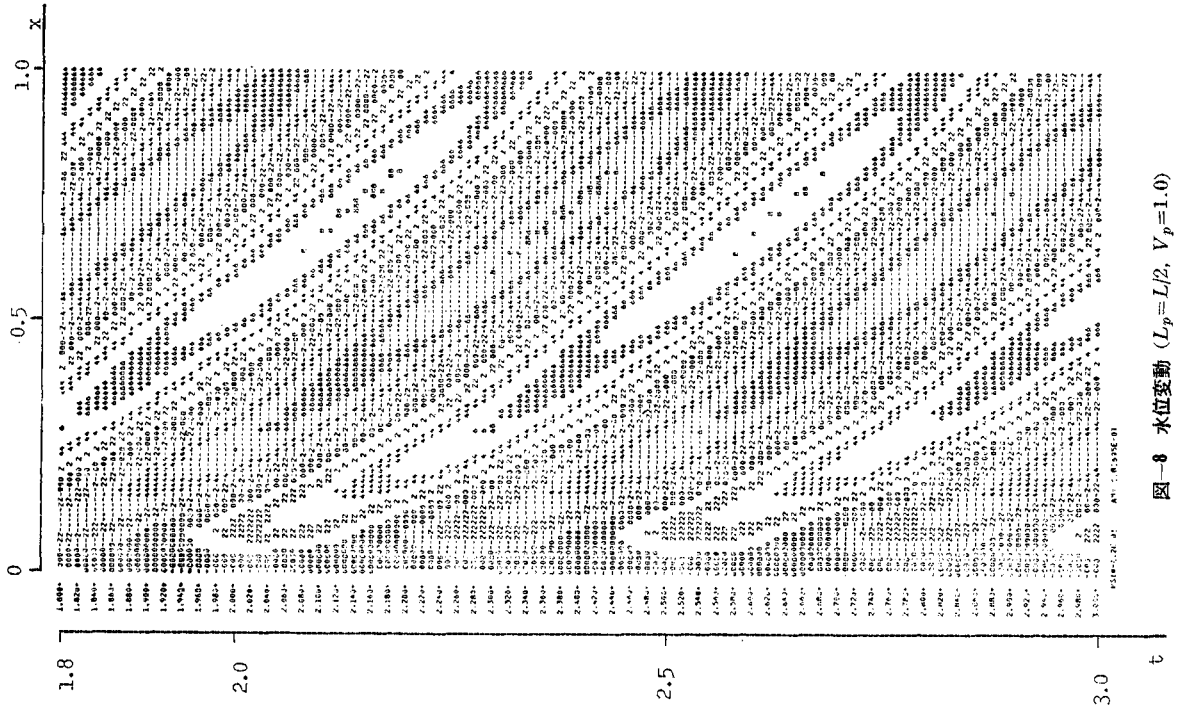


図-8 水位変動 ( $L_p = L/2, V_p = 1.0$ )

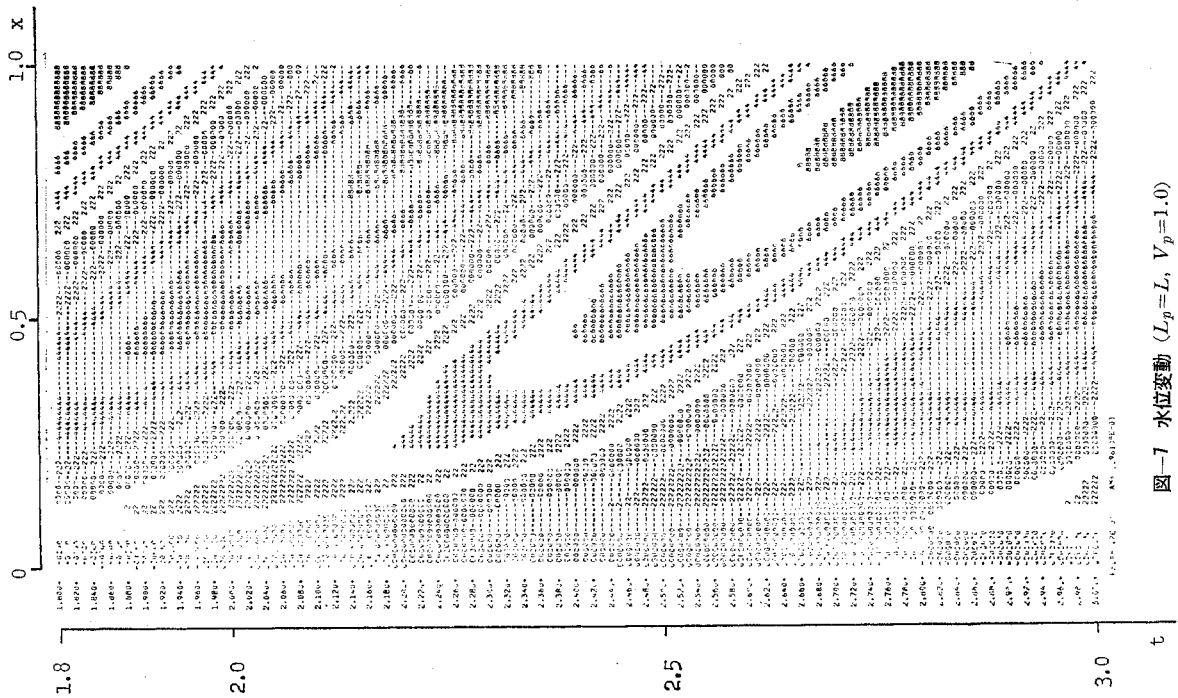


図-7 水位変動 ( $L_p = L, V_p = 1.0$ )

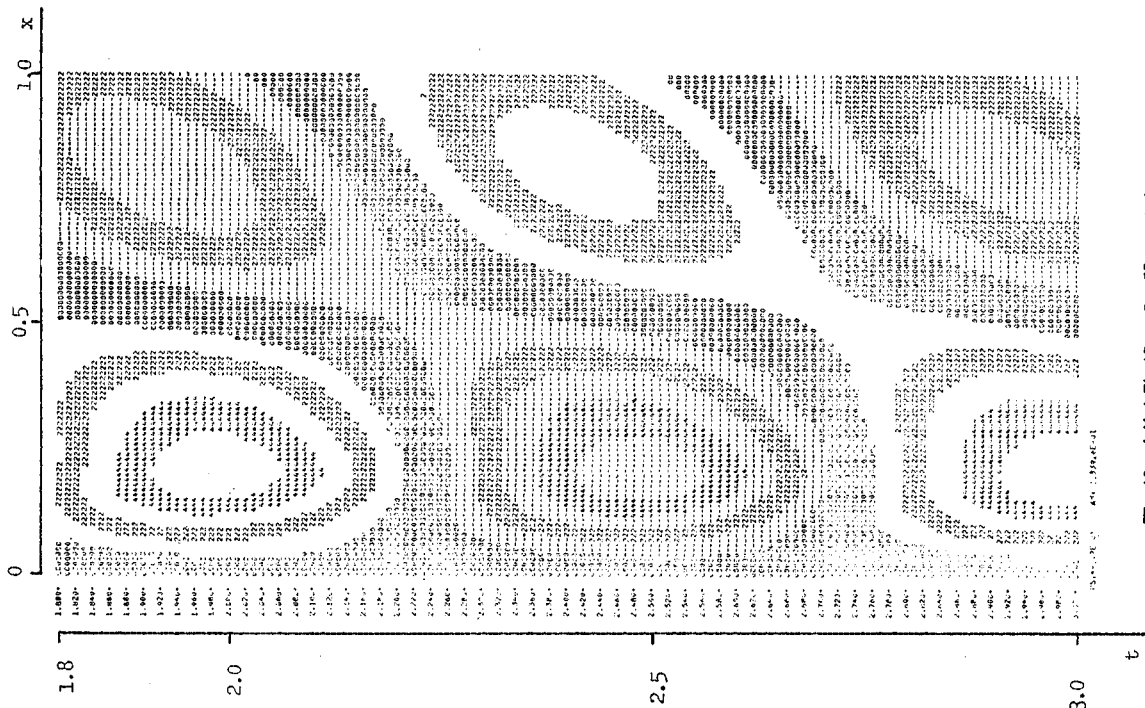


図-10 水位変動 ( $L_p=L, V_p=-1.0$ )

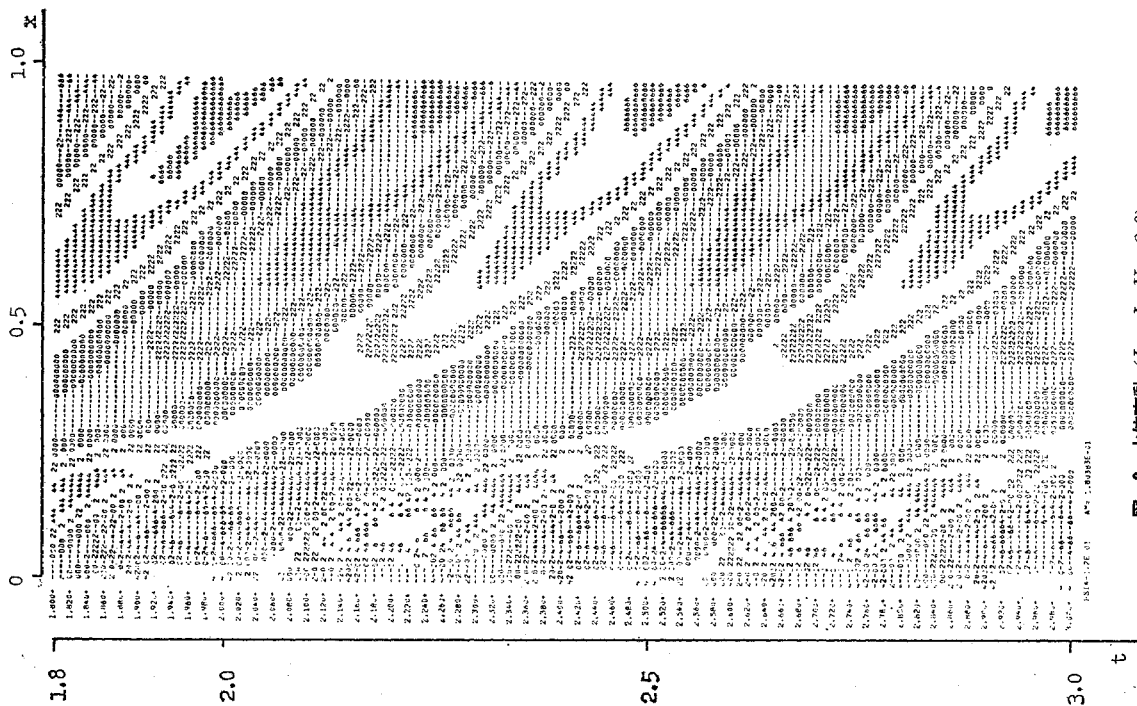


図-9 水位変動 ( $L_p=L, V_p=2.0$ )

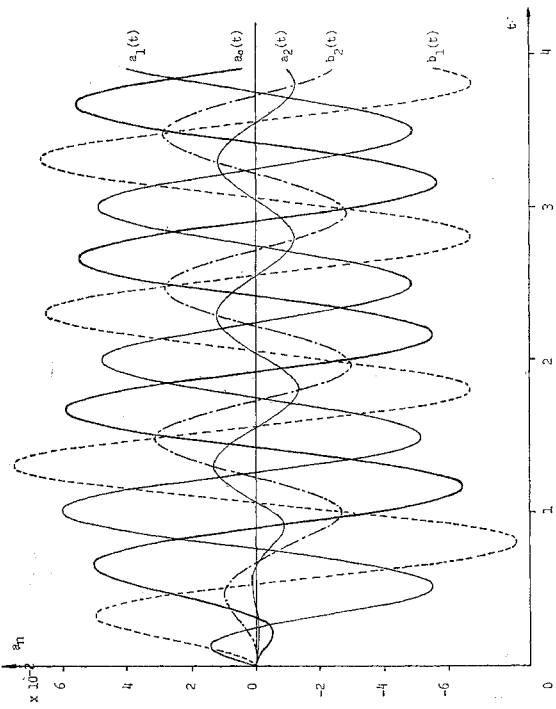


図-11 式(24)から得られる Fourier 係数の変化  
( $k=\pi, \omega=-2\pi: L_p=2L, V_p=2.0$ )

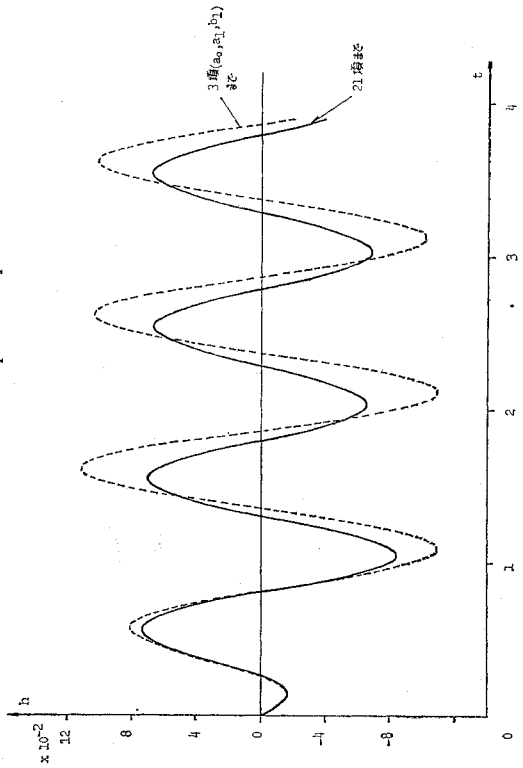


図-12 斜面末端水位変動 ( $k=\pi, \omega=-2\pi: L_p=2L, V_p=2.0$ )

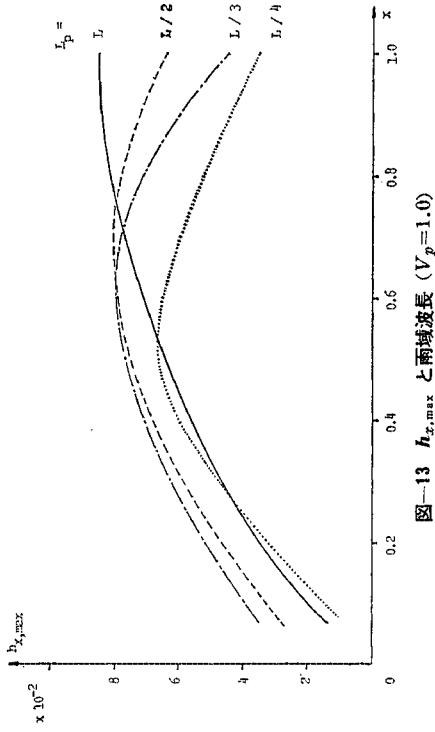


図-13  $h_{x,max}$  と雨域波長 ( $V_p=1.0$ )

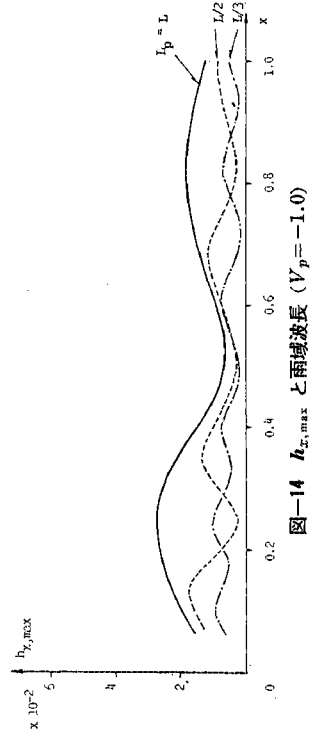


図-14  $h_{x,max}$  と雨域波長 ( $V_p=-1.0$ )



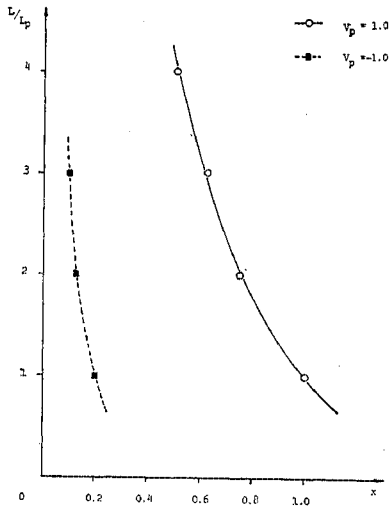


図-15 雨域波長と  $h_{max}$  の生起位置

る場合の計算結果である。

以上より、水位変動特性は上述の2つの移動降雨のパラメーター  $L_p, V_p$  特に移動速度 ( $V_p$ ) により大きく変化することが知れる。この点については、後のように考察を加える。

ところで、数値計算される Fourier 係数の時間変化は図-11 になり、この場合無次元時間  $t=1.5$  程度で定常な水位変動を与えることがわかる。項数3項 ( $a_0, a_1, b_1$ ) までであらためて水位変動を求めれば図-12 のようになる。特に振幅に差が生じ、定常に達するまでの時間は3項の場合には長くなる傾向にある。

i) 雨域波長の影響

図-13 は移動速度を一定とした場合の各地点の最大変動水位を示している。  $V_p=1.0$  のこのとき、波長が大きくなるに従い変動の最大値も増し、生起地点も下流側に移動する。逆にいえば雨域波長によっては末端よりも上流中間地点で最大変動の生ずることを示している。

図-14 は雨域が上流に同じ速さで移動する場合である。変動ピークは雨域の流域内にある波数と同数個になり、水位変動は大幅に減少している。なお、式(5)に至る線形化の仮定から、 $x=0$  付近の  $h$  は信頼できない。

図-15 は上の結果から雨域波長と  $h_{max}$  の生起位置を示したものである。

ii) 雨域移動速度の影響

図-16 は雨域波長一定 ( $L_p=L$ ) のもつて移動速度による  $h_{x,max}$  の変化を調べたものである。  $V_p=1.0 \sim 1.25$  程度で全流域的にも最大値をとるが、さらに  $V_p$  を増すと上流部にピークが生ずる。それは上流部が低流速であり、先行移動降雨による水位変動の流下が遅く、新たな降雨の効果と重複した結果と考えることができる。  $V_p$  の増加とともに流域内に生ずる  $h_{max}$  の生起位

置が変化するがその値は漸次減少していく。図-17 は上流側に向う降雨域の場合について同様に示しているが、  $h_{max}$  の値は移動速度が増すに従い減少することがわかる。

図-18 は雨域移動速度による  $h_{max}$  の生起位置を示している。ただし、全体を通じて雨域波長は  $L_p=L$  としている。また、  $h_{max}$  と移動速度とを示せば図-19 のようになり下流に向う移動降雨の場合、  $V_p=1$  をやや越える程度するとき全体を通じて最大水位変動が生ずる。この結果は高橋ら<sup>4)</sup>の結果とも一致する。

5. 停滞する変動降雨

反対方向に移動する同じ速さの移動降雨を重ねると停滞性の変動降雨となる。すなわち、

$$p(x, t) = \Re \left[ \frac{A}{2} \{ e^{i(kx+\omega t)} + e^{i(kx-\omega t)} \} \right] \\ = \Re [ A e^{i\omega t} \cdot \cos kx ]$$

したがって、このときの一般的な解は式(9)、(11)より

$$f_1 \cdot \frac{d\eta}{dx} + (f_2 + i\omega)\eta = A \cos kx \dots \dots \dots (29)$$

を解けばよいが、この場合は  $f_1, f_2$  が式(13)の形のままで解析解は困難である。

他方、上の降雨入力に対しては前節の展開法が適用できる。前節と同様に展開係数を数値計算して得られた結果の一例を示せば図-20, 21 になる。例では式(29)で  $k=2\pi, \omega=2\pi$  とした場合 ( $L_p=L$ ) であり、図-6, 7 と比較される。

$h_{x,max}$  は図-22 に示されるが同図には  $k=4\pi (L_p=L/2), \omega=4\pi$  の場合も表わされている。移動降雨の場合と直接の比較は特に意味を持たないが、同一規模の変動降雨それぞれについて全流域的に水位変動が平均化される傾向にある。このことは、それぞれ図-13, 14 の  $L_p=L$  (実線)、  $L_p=L/2$  (破線) の平均値が図-22 になっていることからわかる。

以上の節 4., 5. では、いわゆる周波数応答特性の形で、単一雨域波長の移動および停滞変動降雨に対する解を得た。式(9)より一般的な周期変動降雨に対しても容易に求まるが、実際の集中豪雨の記録の中にはほぼ単一波長の変動降雨と見られるものもある。武田<sup>16)</sup>は1972年7月の西三河東濃地区集中豪雨で波長 30~50 km の7~8個の明瞭な強雨域が北東へ 60~100 km/hr の速さで移動したことを報告している。

今日、上に述べた例だけでなく降雨の空間的変動に関する情報が得られるようになってきている。本研究はその変動降雨が流出に及ぼす影響について基礎的な解析を行い、雨域波長、移動速度、方向など降雨パターンによ

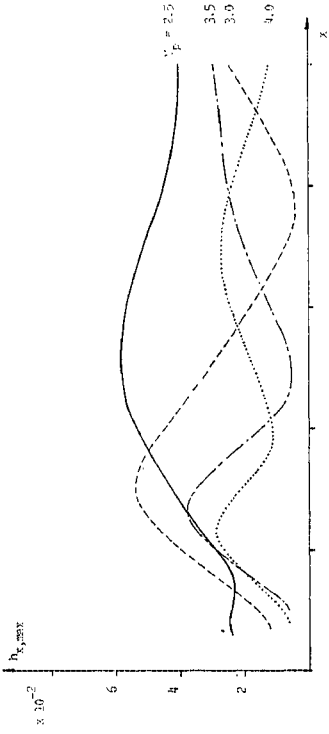


図-16 (c)  $h_{x,max}$  と雨域移動速度 ( $L_p=L, V_p>0$ )

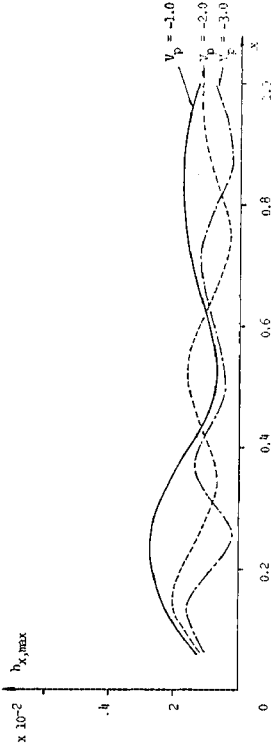


図-17  $h_{x,max}$  と雨域移動速度 ( $L_p=L, V_p<0$ )

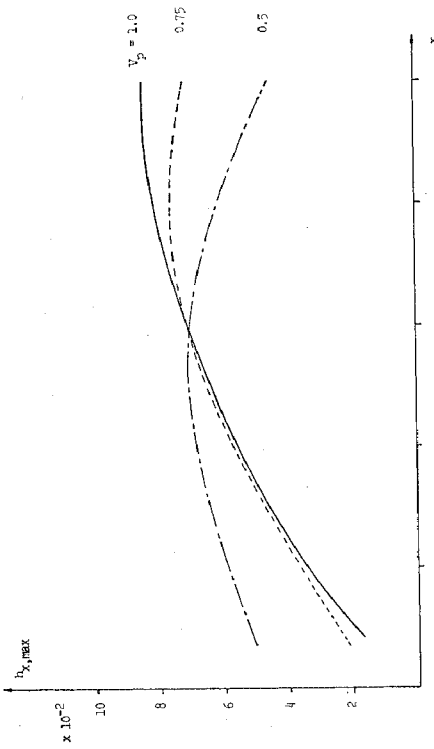


図-16 (a)  $h_{x,max}$  と雨域移動速度 ( $L_p=L, V_p>0$ )

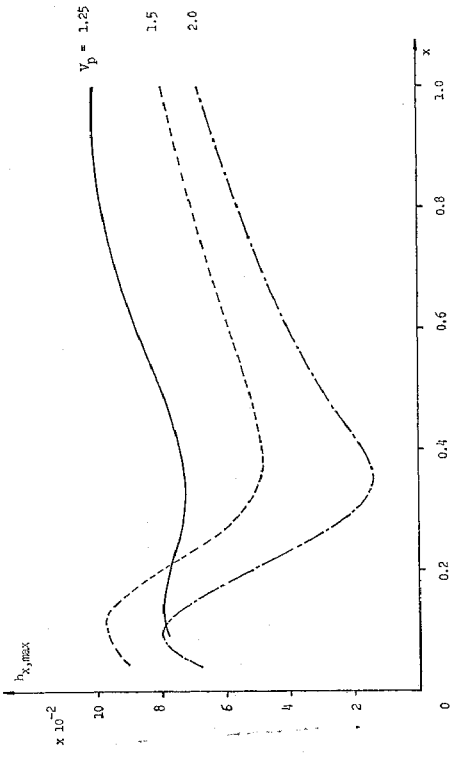


図-16 (b)  $h_{x,max}$  と雨域移動速度 ( $L_p=L, V_p>0$ )

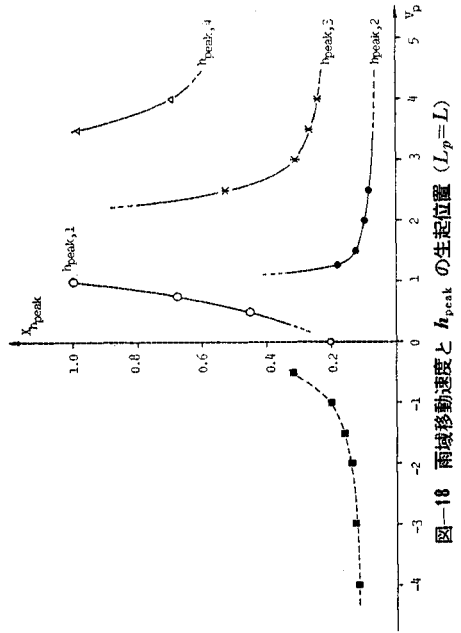


図-18 雨域移動速度と  $h_{peak}$  の生起位置 ( $L_p=L$ )

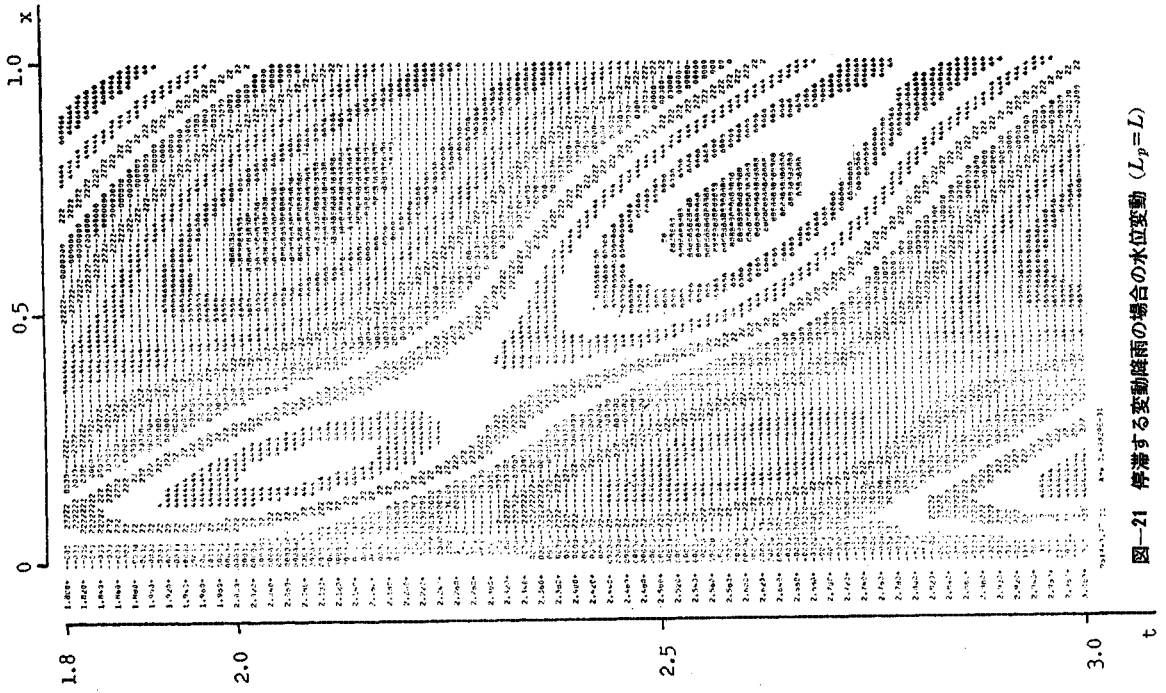


図-21 停滞する変動降雨の場合の水位変動 ( $L_p=L$ )

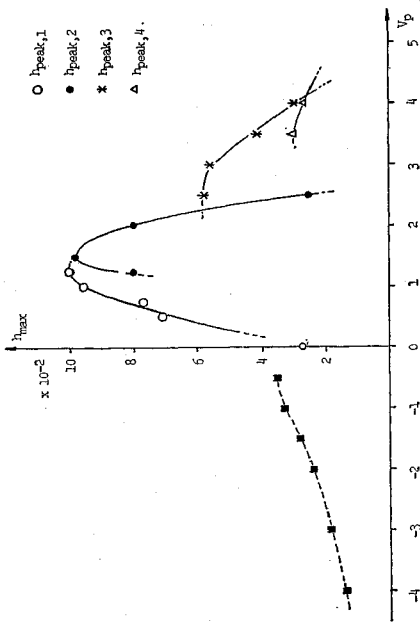


図-19  $h_{max}$  と雨域移動速度 ( $L_p=L$ )

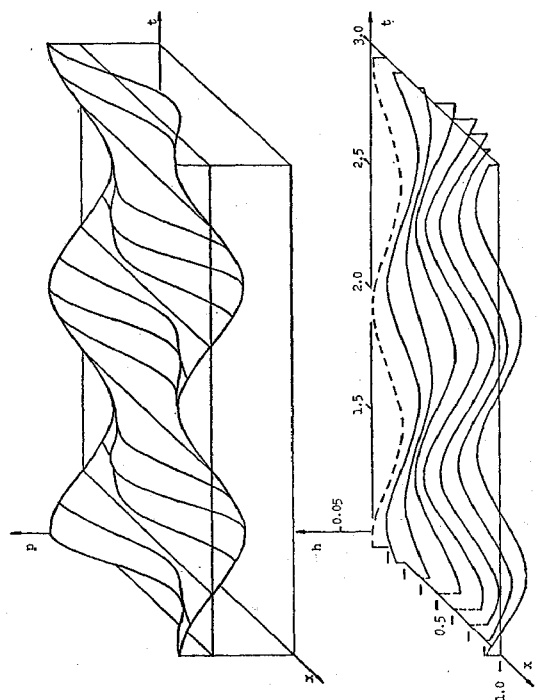


図-20 停滞する変動降雨の場合 ( $k=2\pi, \omega=2\pi, L_p=L$ )

り大きな差の生ずることを示した。しかしながら、これまで空間的な変動降雨による流出への影響を観測資料から明確に指摘し、これらを取扱った例は少ないように思われる。今後は流出とそれをもたらす降雨構造との関係を重視する観点から、積極的な観測資料の収集とその解析を進める必要があると思われる。

6. 結 論

非線形抵抗則に従う表面流の基礎方程式に基づいて、降雨変動（入力）に対する水位変動（出力）を検討した。降雨の変動分について非線形な基礎方程式を線形化して解析し、代表的な変動降雨の形態に対する流出特性について議論した。本研究で得られた結果を要約すれば以下のようになる。

- (1) 到達時間に関する式 (16) が理論的に導かれ、実データとかなり一致する。
- (2) 一般の時間的、空間的変動降雨に対する微分方程式は式 (19) あるいは式(25)で与えられる。この方程式は、Runge-Kutta-Gill 法により容易に積分できる。
- (3) 場所的に周期性をもつ一定速度の移動降雨に対してその水位変動特性が以下のように明らかにされた。
  - i) 雨域波長の増大につれて最大水位変動の生起位置が下流側に移動する。
  - ii) 移動方向が下流の場合は上流方向の場合に比較して水位変動が大きくなり、その最大値をとるのは  $V_p = 1.0$  付近である。
  - iii) 移動速度  $V_p$  が 1.0 を越えて増加するとき、流域内で必ずしも末端が最大水位変動を示すとは限らない。
- (4) 停滞する変動降雨の場合は同一規模の移動降雨の場合に比較して全流域的に水位変動が平均化される傾向にある。

最後に、この研究を進めるにあたって有益な助言をいただきました吉川秀夫教授をはじめとする東京工大土木工学科水工研究室の皆様にご感謝の意を表わします。

参 考 文 献

1) Huff, F.A. : Urban Effects on the Distribution of Heavy convective Rainfall, Water Resources Research, Vol. 11, No. 6 (1975).  
 2) Yen, B.C. and Chow, V.T. : A Laboratory Study of Surface Runoff Due to Moving Rainstorms, Water

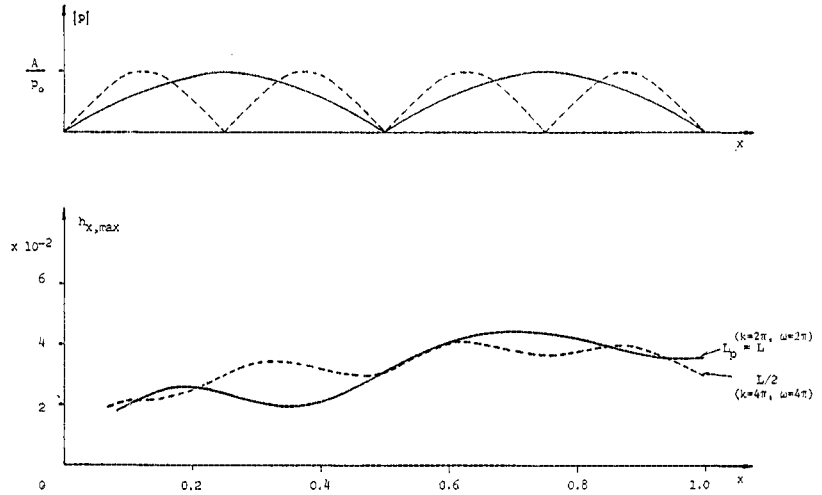


図-22 停滞する変動降雨の波長と  $h_{x,max}$

Resources Research, Vol. 5, No. 5 (1969).  
 3) 室田・原：移動する降雨シミュレーターによる洪水発生の実験的研究，第 29 回土木学会年講，II-56，(1974).  
 4) Takahashi, Y., Mushikake, K. and Hashimoto, T. : Effects of Movement of Precipitation Area upon Runoff Phenomena, U.S.-Japan Bi-lateral Seminar in Hydrology (1971).  
 5) 高棹・椎葉・久保：降雨の空間的分布が出水に及ぼす影響，第 30 回土木学会年講，II-85，(1975).  
 6) Surkan, A.J. : Simulation of Storm Velocity Effects on Flow From Distributed Channel Networks, Water Resources Research, Vol. 10, No. 6 (1974).  
 7) Lighthill, M.H., and Whitham, G.B. : On Kinematic Waves. I. Flood Movement in Long Rivers, Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 229, (1955).  
 8) Iwagaki, Y. : Fundamental Studies on the Runoff Analysis by Characteristics, Disaster Prevent. Res. Inst. Bull, Kyoto Univ., December, (1955).  
 9) Eagleson, P.S. : Dynamic Hydrology, McGraw Hill (1970).  
 10) たとえば，平野：コンピュータによる数値計算，日刊工業新聞社，(1972).  
 11) 吉川・日野・四俣・水村：変動降雨による非線形流出系の解析，第 16 回水理講演会講演集 (1972).  
 12) 竹内・吉川：特性曲線法を利用した流出解析についての考察，「流出機構モデルの総合化に関する研究」(代表者 東工大 吉川秀夫)，文部省科学研究費特定研究最終報告書，(1970).  
 13) Tsuchiya, A. and Hashimoto, T. : Experimental Basin of Japan Ministry of Construction, Proc. of Tokyo Symposium, IAHS, (1975).  
 14) Yoshino, F. : Runoff Characteristics of Small Urbanized Area, Proc. of Tokyo Symposium, IAHS, (1975).  
 15) Tou, J.T., 中村・伊藤・松尾共訳：現代制御理論，コロナ社 (1966).  
 16) 武田：集中豪雨の降水特性と微物理的過程，気象研究ノート，120 号，(1974).  
 17) 日野・砂田・灘岡：非線形流出の理論解析について，第 20 回水理講演会論文集 (1976).

(1976.7.5・受付)