

Box & Jenkins の理論による非定常降水時系列の
解析と予測について*FORECASTING AND ANALYSIS OF NONSTATIONARY HYDROGIC TIME
SERIES BY THEORY OF BOX & JENKINS

長谷部正彦**

By Masahiko HASEBE

1. ま え が き

時系列理論の適用は、一般にはそのほとんどが定常確率過程に限られている。時系列理論では、傾向成分、周期成分、確率変動成分の三つに分解される。水文時系列においては、一般に長期間の資料は少なく、傾向成分を線形傾向として直線にあてはめて、その回帰係数を統計的に検定すると、月単位、旬単位ではほとんど傾向成分は認められない^{1),2)}と思われる。

周期成分については、普通フーリエ級数にあてはめて解析されるが、フーリエ級数を適用すると物理的には意味のないみかけの周期がでてくる欠点も生ずると思われる。以上の2成分を除いた系列が、確率変動成分であり、この成分に定常過程理論が適用される。

時系列理論による解析には数多くの例があり、その適用例³⁾でみると、この理論は水文資料の少ない場合に適用され、不足資料を補充するという目的には十分であるが、時々刻々と変化する短期予測には不十分な点があると思われる。

定常理論で取り扱われた解析で、予測について不十分な点を札幌市の年降水量と雄物川水系樺川の月流量の例

で示す。札幌市の年降水量は、10年移動平均をとった系列であり、それを図-1に示す。

この系列の1949年までの資料を使い、最小自乗法により傾向成分を求め、その成分を除いた系列に周期成分としてフーリエ級数にあてはめ、1950年以後予測を行い実測値との比較したものを図-2に示す。図-1には、1949年までの傾向成分を直線(A)、全資料での傾向成分を直線(B)で示す。

図によると予測値と実測値がはなれていく傾向がある。次に流量時系列の例⁴⁾では、月単位で計算し、周期成分として、1年周期、6か月周期、4か月周期、3か月周期、2.4か月周期を考えて、これらの周期成分を除いた系列に定常理論を適用し、1972年までの資料を使い、1973年を予測し実測値と比較したものを図-3に示す。やはりあまり適合していない。これらの例で理解できるように、定常時系列理論をこのように適用して、時系列を定常として扱った場合には予測として不十分である場合が多いと思われる。

本論文では、岸により紹介された G.E.P. Box & G. M. Jenkins の非定常時系列理論⁵⁾を降水量系列に適用した。その理論によれば、ある時系列 Z において、時

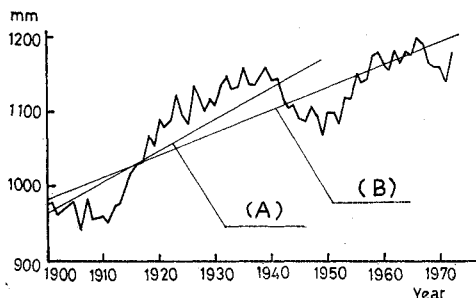


図-1 札幌市の10年移動平均系列

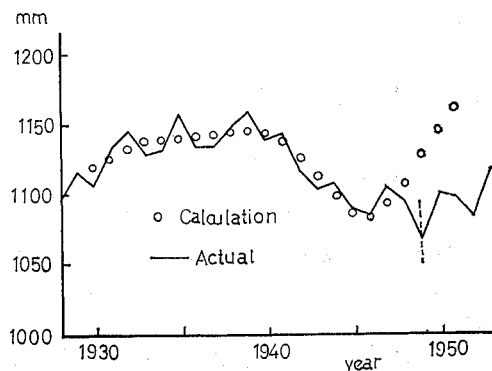


図-2 札幌の従来の理論による予測値と実測値の比較

* 本研究の 2.(3), 3. の一部は、すでに発表した文献 6) に述べた理論と一部重複する。ここでは詳細に論じました。

** 正会員 工修 秋田工業高等専門学校助教授 土木工学科

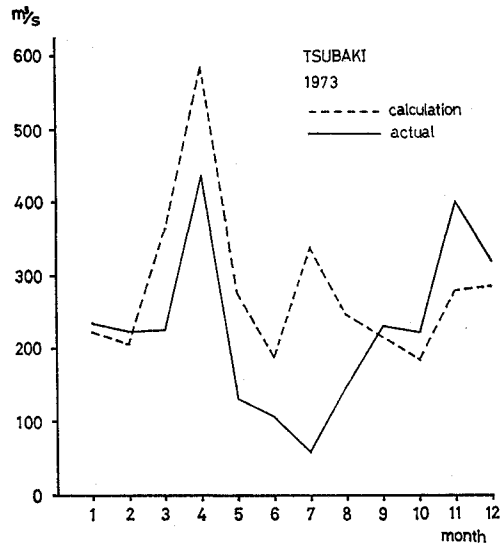


図-3 椿川の従来の理論による予測値と実測値の比較

間隔 t で適当な差分をとると (たとえば 1 次の場合 $Z_t + t - Z_t$)、差をとった新しい系列 ($Z_t + t - Z_t$) が定常過程になる性質、すなわち擬定常性をもつ場合が、非定常線形過程として扱われる。つまり、非定常線形過程として扱われた場合には、その過程は、適当な差分をとることによって定常過程として扱うことが可能となり、いままでの定常理論を適用できるのである。

なお、流量時系列での適用⁶⁾においては、融雪が顕著にあらわれる河川の月流量には、ある程度有効であると思われた。

一般に月単位の水文時系列には、1年周期は認められるであろう。そこでこの1年周期に着目し、非定常線形過程を基本とした季節性モデルに月降水量系列を適用した。また、周期性のはっきりしない年降水量系列には、非定常線形過程モデルを適用した。適用例は、札幌市の月降水量、年降水量系列で資料期間は、1889~1974年の86年間である。

2. 定常線形過程と非定常線形過程

(1) 定常線形過程

定常線形過程は、自己回帰型 (Autoregressive : AR)、移動平均型 (Moving average : MA)、両者の混合型 (Mixed Autoregressive Moving average : ARMA) で表わされる。

ここで時系列 Z を考え、時刻 t であれば、始めの 2 型は、式 (1)、(2) で表わされる。

$$\phi(B)Z_t = a_t \dots\dots\dots(1)$$

$$Z_t = \theta(B)a_t \dots\dots\dots(2)$$

混合型は、系列 Z が p 次の AR 過程に適用され

$$\phi(B)Z_t = e_t$$

となり、系列 e も q 次の MA 過程に適用され

$$e_t = \theta(B)a_t$$

となる。以上の 2 式から混合型は、式 (3) で表わされる。

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)a_t \dots\dots\dots(3)$$

ここで

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$$

$$\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$$

となり、 $\phi(B)$ は、 p 次の定常自己回帰演算子、 $\theta(B)$ は、 q 次の移動平均演算子、 B は、後進演算子、 a_t は、白色雑音である。また、和演算子 S を用いると式 (4) となる。

$$\begin{aligned} SZ_t &= Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + \dots + Z_{t-j} + \dots \\ &= (1 + B + B^2 + \dots + B^j + \dots)Z_t \\ &= (1 - B)^{-1}Z_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} Z_{t-j} \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

Z が定常系列であれば、 SZ_t は定常線形結合で定常となる。また、時系列 Z で、式 (1) から式 (2) あるいは式 (2) から式 (1) へ転換⁷⁾するときの関係は、式 (1)、(2) から

$$\phi(B)\theta(B) = 1$$

となる。ここで $\theta(B)$ 、 $\phi(B)$ が $|B| \leq 1$ の範囲で収束するとき転換可能となり、式 (1) から式 (2) へ、あるいは式 (2) から式 (1) へ転換できる。

時系列 Z の定常条件、上記両過程間の転換条件は、 $\phi(B)$ 、 $\theta(B)$ を B の多項式とすれば、 $\phi(B) = 0$ 、 $\theta(B) = 0$ のすべての根が単位円の外側に存在することである。たとえば、1 次の AR 過程では、

$$(1 - \phi_1 B)Z_t = a_t$$

となり、 $\phi(B) = (1 - \phi_1 B) = 0$ の根が単位円の外側であるので $B = 1/\phi_1 > 1$ より Z の定常条件は、 $-1 < \phi_1 < 1$ である。

転換条件について 1 次の MA 過程で示すと、その過程は

$$Z_t = (1 - \theta_1 B)a_t$$

となり、AR 過程に転換すると

$$\begin{aligned} a_t &= Z_t / (1 - \theta_1 B) \\ &= (1 + \theta_1 B + (\theta_1 B)^2 + \dots + (\theta_1 B)^j + \dots)Z_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j Z_{t-j} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

となり、AR 過程が定常であるためには、 $|\theta_1| < 1$ でなければならない。 $|\theta_1| > 1$ であると Z_t は、発散していく。

$p=1, q=1$ の ARMA 過程では

$$(1 - \phi_1 B)Z_t = (1 - \theta_1 B)a_t$$

となり、定常、転換の両条件をみたすのは、前の2例から、 $|\phi_1| < 1, |\theta_1| < 1$ となることが理解できる。

(2) 非定常線形過程

非定常過程は、一般の自己回帰演算子 $\varphi(B)$ を用いると定常過程をも含め、3種類の過程にわけられる。

- a) $\varphi(B) = 0$ のすべての根が単位円の外側
- b) $\varphi(B) = 0$ のすべての根が単位円の内側**
- c) $\varphi(B) = 0$ のいくつかの根は、1で残りの根が単位円の外側

a) の場合が、 $\phi(B) = \varphi(B)$ で定常線形過程である。
 b) の場合は非定常過程であるが、式(5)で、 $|\theta_1| > 1$ の場合にあたり Z_t が発散していく。たとえば、 $\varphi_1 = 2$ として Z_0 の初期値を0.7としたモデル $a_t = (1-2B)Z_t$ で示すと Z_t の発散は、表-1のようになる。c) の場合が本論文で取り扱う非定常線形過程である。

非定常線形過程は、 $\varphi(B) = 0$ の根の d 個が単位円上で残りの根が外側に存在するときである。このことから、一般の自己回帰演算子 $\varphi(B)$ は、

$$\varphi(B) = \phi(B)(1-B)^d \dots\dots\dots(6)$$

となり、非定常線形過程の一般型は、式(7)となる。

$$\begin{aligned} \varphi(B)Z_t &= \phi(B)(1-B)^d Z_t \\ &= \phi(B)\nabla^d Z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

ここで

$$\nabla = 1 - B$$

θ_0 は、時刻 t における決定論的成分である。 $d > 0$ のとき、 $W_t = \nabla^d Z_t$ とおけば、 W_t の期待値 μ_w を求める式は、

$$\begin{aligned} E[\phi(B)W_t] &= E[W_t - \phi_1 W_{t-1} \\ &\quad - \phi_2 W_{t-2} \dots - \phi_p W_{t-p}] \\ &= (1 - \phi_1 - \phi_2 \dots - \phi_p)E[W_t] \end{aligned}$$

また、 $E[a_t], E[a_{t-1}], \dots, E[a_{t-q}]$ は、それぞれ0であるので、式(7)の右辺は θ_0 となり、式(8)となる。

$$E[W_t] = \mu_w = \theta_0 / (1 - \phi_1 - \phi_2 \dots - \phi_p) \dots\dots(8)$$

新しい系列 $W_t' = W_t - \mu_w$ を採用すると式(7)の定

表-1 (1-2B) $Z_t = a_t$ のときの Z_t (Box & Jenkins)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_t		0.1	-1.1	0.2	-2.0	-0.2	-0.8	0.8	0.1	0.1	-0.9
Z_t	0.7	1.5	1.9	4.0	6.0	11.8	22.8	46.4	92.9	185.9	370.9

** いくつかの根が内側にあり、残りの根が単位円上または外側にある場合も含まれる。仮りに単位円の内側にあるときの自己回帰演算子を $\varphi'(B)$ とし、単位円の外側にあるときの演算子を $\phi(B)$ とする。いくつかの根が内側で、残りの根が単位円上にあるときは一般の自己回帰演算子 $\varphi(B)$ は $\varphi'(B)(1-B)^d$ となり、過程は $\varphi'(B)(1-B)^d Z_t = \varphi'(B)W_t$ となる。ここで W_t は定常過程である。同様に、一方が単位円の外側にあるときは $\varphi(B)$ は $\phi(B)\phi(B)$ となり、過程は $\phi(B)\phi(B)Z_t = \phi(B)W_t$ となる。ゆえに b) の場合である。

数項は、 $\theta_0 = 0$ となり式(7)の一般性を失わずに式(9)となる。

$$\phi(B)W_t' = \theta(B)a_t \dots\dots\dots(9)$$

式(9)で、 $W_t = W_t'$ と置き換えて、定常、転換の両条件をみたしている、 W の系列は定常過程であり、一般に式(10)となる。

$$\left. \begin{aligned} W_t &= \phi^{-1}(B)\theta(B)a_t \\ a_t &= \theta^{-1}(B)\phi(B)W_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

W は定常であるので、式(4)を適用でき、演算子 $S = \nabla^{-1}$ より式(11)となる。

$$Z_t = S^d W_t \dots\dots\dots(11)$$

以上が ARIMA モデル (Autoregressive-Integrated-Moving average) であり、ARIMA(p, d, q) と表わされる。このモデルのブロックダイヤグラムを、図-4に示す。

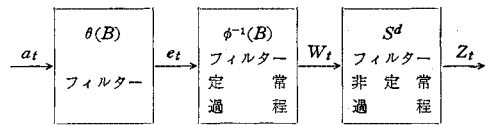


図-4 ARIMA モデルのブロック図 (Box & Jenkins)

(3) 季節性モデル***

一般に月単位あるいは旬単位の水文時系列には、一年の周期がみられるであろう。かりに周期 T があれば、時刻 t の実現値の状態は時間 T だけはなれた実現値の状態と似ている。このことから演算子 B を用いた $B^T Z_t = Z_{t-T}$ が重要な役割をはたし、式(12)のような簡単な演算子を用いたモデルに着目できる。

$$\begin{aligned} \nabla_T Z_t &= (1 - B^T)Z_t \\ &= Z_t - Z_{t-T} \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

式(12)は、定常条件をみたしていないので非定常性を含んでいる。そこで周期 T を考えた季節性モデルは、ARIMA モデルを参考にし、時刻 t において式(13)となる。

$$\phi_p(B^T)\nabla_T^D Z_t = \theta_q(B^T)e_t \dots\dots\dots(13)$$

e_t は周期 T を除かれた誤差系列である。

式(13)は、時刻 $t-1$ でもなりたつ。

$$\phi_p(B^T)\nabla_T^D Z_{t-1} = \theta_q(B^T)e_{t-1}$$

式(13)は、 $t, t-1$ のみでなく $t-2, t-3 \dots$ についても成り立つはずである。したがって e_t は、まえの状態 $e_{t-1}, e_{t-2} \dots$ と独立とは限らないので ARIMA モデルが適用でき、式(14)となる。

$$\phi_p(B)\nabla^d e_t = \theta_q(B)a_t \dots\dots\dots(14)$$

式(13)、(14)より季節性モデルは、式(15)となる。

*** 第20回水理講演会論文集と重複する。

$$\begin{aligned} \phi_P(B^T)\phi_Q(B)F_T D^p F^d Z_t \\ = \theta_Q(B^T)\theta_Q(B)a_t \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$\phi_P(B^T)$, $\theta_Q(B^T)$ は, 季節性モデルの周期 T による P 次の自己回帰, Q 次の移動平均の各演算子で, $\phi_p(B)$, $\theta_q(B)$ は, 時系列 e の p 次の自己回帰, q 次の移動平均の各演算子である. 式 (15) のモデルは, $(p, d, q) \times (P, D, Q)_T$ と表わされる.

3. モデルの同定と評価

原系列 $Z_t, \nabla Z_t, \nabla_{12} Z_t \dots$ の自己相関係数 (ρ) から, モデルの次数を決定する. すなわち, 系列のなかで適当な差分をとった系列の ρ が, ほぼ白色雑音とみなされたときに次数が決定される. そのときの ρ を用いてモデルの係数の初期値を同定し, 次にそれを評価してモデルの係数の最確値をえる. 次数の低い非定常モデルの同定は, 文献 7) に述べられている.

季節性モデル $(0,0,1) \times (0,1,1)_{12}$ には, 式 (16) のようになる.

$$W_t = (1-\theta B)(1-\theta B^{12})a_t \dots\dots\dots(16)$$

ここで $W_t = \nabla_{12} Z_t - \mu_w$ であり, 次数は, $q+TQ=1+12 \cdot 1=13$ となる. 式 (16) の同定は, 式 (17) でなされる.

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= -\theta/(1+\theta^2) \\ \rho_{12} &= -\theta/(1+\theta^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

式 (17) で係数の初期値が, 1 に近いと虚数になる場合もあるが, そのときには初期値を適当に仮定して計算するとよい.

ほかに次数を決定する方法としては, 偏自己相関係数を用いる場合である. いま W が j 次の自己回帰モデルとすると式 (18) になる.

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \dots + \phi_j W_{t-j} + a_t \dots\dots(18)$$

式 (18) で j 次の過程における j 番目の回帰係数を ϕ_{jj} とすると, それが j に対する偏自己相関係数である. この性質は, もし p 次の自己回帰過程であるならば, ϕ_{pp} が p 番目以降では 0 に接近している.

以上より, 次数と係数の初期値が同定されたので, 係数の最確値を評価する必要がある. いま係数 β_0 の条件付き雑音を $a_{t,0}$ とすれば式 (19) となり

$$a_{t,0} = [a_t | \beta_0] \dots\dots\dots(19)$$

最確値 β は, 式 (20) となる.

$$[a_t] = [a_{t,0}] - \sum_{i=1}^k (\beta_i - \beta_{i,0}) X_{i,t} \dots\dots\dots(20)$$

ここで

$$X_{i,t} = - \frac{\partial [a_t]}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta = \beta_0}$$

具体的に式 (16) のモデルに適用すると, 式 (19) より

$$a_{t,0} = \theta_0^{-1}(B)\theta_0^{-1}(B)W_t \dots\dots\dots(21)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} - \frac{\partial a_t}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0, \theta_0} &= -\theta_0^{-2}(B)\theta_0^{-1}(B)W_t \\ &= -\theta_0^{-1}(B)a_{t,0} = -(1-\theta_0 B)^{-1}a_{t,0} \\ &= X_{1,t} \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} - \frac{\partial a_t}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0, \theta_0} &= -(1-\theta_0 B^{12})a_{t,0} \\ &= X_{2,t} \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

式 (21)~式 (23) は, 次のように変形される.

$$a_{t,0} = W_t + \theta_0 a_{t-1,0} + \theta_0 a_{t-12,0} - \theta_0 \theta_0 a_{t-13,0} \dots\dots(24)$$

$$X_{1,t} = \theta_0 X_{1,t-1} - a_{t,0} \dots\dots\dots(25)$$

$$X_{2,t} = \theta_0 X_{2,t-12} - a_{t,0} \dots\dots\dots(26)$$

ゆえに, 最確値を求めるには, 式 (27) となる.

$$a_{t,0} = (\theta - \theta_0) X_{1,t} + (\theta - \theta_0) X_{2,t} + a_t \dots\dots(27)$$

ARIMA(0, 1, 1) モデルについては, $\theta_0 = 0$ とおけばよく, 次のような式になる.

$$a_{t,0} = W_t + \theta_0 a_{t-1,0} \dots\dots\dots(28)$$

$$X_{1,t} = \theta_0 X_{1,t-1} - a_{t,0} \dots\dots\dots(29)$$

$$a_{t,0} = (\theta - \theta_0) X_{1,t} + a_t \dots\dots\dots(30)$$

また, 評価による繰り返し計算による係数の誤差の分散は, 式 (31) となる.

$$\left. \begin{aligned} V(\theta) &= (1-\theta^2)/n \\ V(\theta) &= (1-\theta^2)/n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

ここで $n = N - d$, N : 標本数, d : 次数

4. モデルの検討

最適モデルであるか否かは, 適用モデルの残差 (a_t) に着目して 2 種類の方法で検討される. 1 つの方法としては, a_t の自己相関係数 r_k を利用する. m 個の r_k の総和を Q とすれば, 式 (32) となる.

$$Q = n \sum_{k=1}^m r_k^2 \dots\dots\dots(32)$$

$n = N - d$, 式 (32) の Q が近似的に自由度 m の χ^2 分布と仮定して m 個の r_k を 0 とみなしてよいかを検定して検討する. もう一つの方法は, a_t が正規分布しているか否かを, 累加ペリオドグラムを用いてたしかめるのである. 計算方法は, 次のようになる.

$$C = \sum_{i=1}^j I(f_i) / \sum_{i=1}^j I(f_i) \dots\dots\dots(33)$$

ここで

$$\begin{aligned} I(f_i) &= \left(\left[\left(\sum_{t=1}^n a_t \cos 2\pi fit \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\sum_{t=1}^n a_t \sin 2\pi fit \right)^2 \right] \cdot 2 \right) / n \end{aligned}$$

n : 偶数 $q = (n-2)/2$

n : 奇数 $q=(n-1)/2$

j に対する式 (33) の C 値をプロットしたものが累加ペリオドグラムである. この残差が正規分布をしているか否かの限界は, Kolmogorov-Smirnov の検定で決定される. Q の検定で, 有意水準が小さい場合がある. その原因としては, 次に示す λ の変化によるものと推察される. いま ARIMA (0, 1, 1) モデルの例で示すと, $\lambda=1-\theta$ とすれば,

$$FZ_t = (1-\theta B)a_t = \lambda a_{t-1} + F a_t$$

となり, F で割れば,

$$Z_t = S \lambda a_{t-1} + a_t \dots \dots \dots (34)$$

となり, λ に影響される.

もし全体の標本のなかで, 部分ごとの標本の λ が変化していると, 有意水準に影響してくると思われる. また, λ が変化している場合には, 標本ごとにどの程度変化しているかを検討して予測をする必要があるであろう.

5. 予 測

適用されたモデルの予測は, 最小自乗平均誤差法により行われる. 時刻 t の時点で, $Z_{t+l} (l \geq 1)$ を予測する. このことを時刻 t における lead time l の予測といい, $Z_i(l)$ と表わす.

適用された季節性モデルで示すと, $W_t = F_{12} Z_t$ とすれば, Z_{t+l} は式 (35) になる.

$$Z_{t+l} = Z_{t+l-12} + a_{t+l} - \theta a_{t+l-1} - \theta a_{t+l-12} + \theta \theta a_{t+l-13} \dots \dots \dots (35)$$

時刻 t までの過去の Z の値をとるときの Z_{t+l} の条件付き期待値を, $E[Z_{t+l}]$ とすれば,

$$E[Z_{t+l}] = E[Z_{t+l} | \theta, Z_t, Z_{t-1}, \dots]$$

となり, 次のことがなりたつ.

$$E[Z_{t+j}] = \begin{cases} Z_{t+j} & j \leq 0 \\ Z_t(j) & j > 0 \end{cases}$$

$$E[a_{t+j}] = \begin{cases} a_{t+j} & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$$

時刻 t を基本としたリードタイム l の予測は, 式 (36) となる.

$$Z_i(l) = E[Z_{t+l-12} + a_{t+l} - \theta a_{t+l-1} - \theta a_{t+l-12} + \theta \theta a_{t+l-13}] \dots \dots \dots (36)$$

最初の未知の a_t 項は, t における無条件期待値と仮定して 0 とおき, その後は, $a_t = Z_t - Z_{t-1}(1)$ で, 順次計算を進める.

時刻 t を基本として予測されるから, $t+1$ 以上になると修正して予測される場合もある. いま不規則入力の重み係数を ξ とすると

$$Z_t = a_t + \xi_1 a_{t-1} + \xi_2 a_{t-2} + \dots$$

$$= \xi(B) a_t \dots \dots \dots (37)$$

ここで,

$$\xi(B) = 1 + \xi_1 B + \xi_2 B^2 + \dots + \xi_j B^j + \dots$$

となり, 季節性モデルに式 (37) を適用すると, $F_{12} Z_t = \theta(B) \theta(B) a_t$ であるので

$$F_{12} \xi(B) = \theta(B) \theta(B) \dots \dots \dots (38)$$

となる. 式 (38) は,

$$(1-B^{12})(1+\xi_1 B + \xi_2 B^2 + \dots) = (1-\theta B)(1-\theta B^{12})$$

と変形される.

ゆえに, ξ は,

$$\xi_1 = -\theta(\xi_2 \sim \xi_{11} = 0)$$

$$\xi_{12} = 1 - \theta$$

$$\xi_{13} = -\theta(1 - \theta)$$

などが求まる. ξ が求まると, それによる修正は, 式 (39) となる.

$$Z_{t+l}(l) = Z_t(l+1) + \xi_l a_{t+l} \dots \dots \dots (39)$$

式 (39) は同一時刻 $t+l+1$ での修正である.

次に 1 ステップはなれての予測の修正は, 次のとおり行われる. いま時刻 t 以前の無限の実測値に重み係数 π を考えると

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t-j} + a_t \dots \dots \dots (40)$$

となり, 式 (40) を変形すると

$$a_t = \pi(B) Z_t \dots \dots \dots (41)$$

ここで,

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 \dots \dots - \pi_j B^j \dots \dots$$

となる.

季節性モデルの π 係数を求める式は,

$$F_{12} = \theta(B) \theta(B) \pi(B) \dots \dots \dots (42)$$

となる. ゆえに π は,

$$\pi_1 = -\theta$$

$$\pi_j = \theta^{j-1} \pi_1 (j=2 \sim 11)$$

$$\pi_{12} = \theta^{11} \pi_1 + (1 - \theta)$$

などが求まる. π が求まると 1 ステップはなれた予測の修正は, 式 (43) となる. $Z_i(-h) = Z_{t-h}$ として

$$Z_i(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_i(l-j) \dots \dots \dots (43)$$

6. モデルの適用例

札幌市の年降水量は, 図—1 から推察すると数十年位の長周期成分が存在すると考えられる. そこで 10 年の長周期を抽出することを考えて年降水量系列については, 10 年移動平均降水量系列 (以下年降水量とする) を適用し, 同時に札幌市の月降水量系列にも非定常理論を適用する. モデルの次数を決定するために, 月降水量と年降水量のおおのこの原系列と $F_{12} Z_t, F Z_t$ の標本自

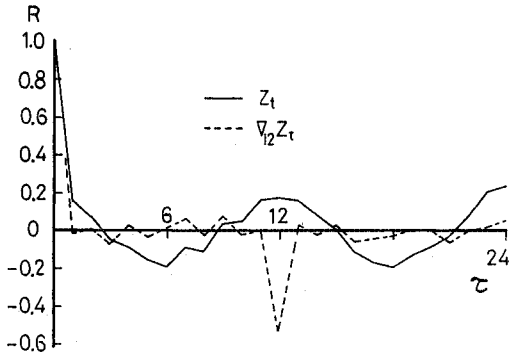


図-5 月降水量系列の自己相関係数

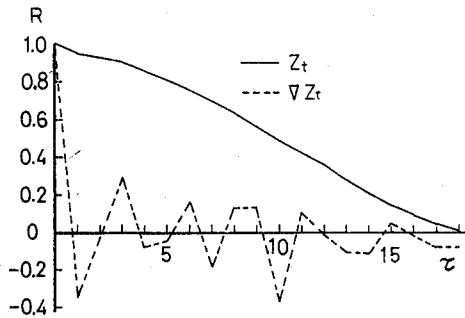


図-6 年降水量系列の自己相関係数

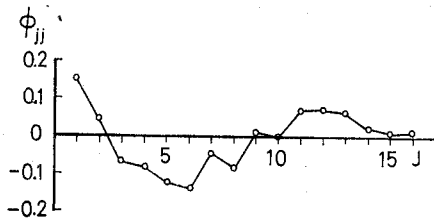


図-7 月降水量系列の偏自己相関係数

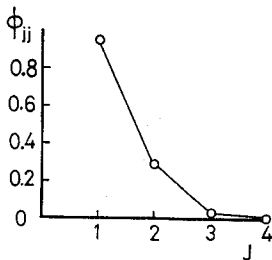


図-8 年降水量系列の偏自己相関係数

自己相関係数を 図-5、図-6 に示し、おのおのの偏自己相関係数を図-7、8 に示す。

月降水量の例では、図-5 の原系列の自己相関係数から、その傾向は弱であるが、1年の周期が存在すると考えられる。

図-7 から $j > 13$ では、

偏自己相関係数が 0 に接近していて次数は 13 位であると思われる。

年降水量の例では、図-6 より、資料が 75 年間と少ないためによる誤差をも考えると、 $\sqrt{Z_t}$ ではほぼ雑音とみなされるので、この系列には非定常線形過程を適用した。図-8 から $j > 1$ で 0 に接近していると考えられる。

同定と評価については、おのおのの係数の初期値を式

表-2 係数の初期値

	θ	θ
月降水量	0.023	0.817
年降水量	0.411	—

表-4 誤差の標準偏差

	$\sigma(\theta)$	$\sigma(\theta)$
月降水量	0.03	0.01
年降水量	0.11	—

表-3 繰り返し計算

	Iteration		
	θ	θ	θ
	月降水量	年降水量	
0	0.1000	0.1000	0.4110
1	0.0429	0.6452	0.4015
2	0.0314	0.9588	0.3111
3	0.0115	0.9306	0.3522
4	0.0164	0.9071	0.3318
5	0.0175	0.9021	0.3418
6	0.0175	0.9023	0.3369
7	—	0.9023	0.3393
8	—	—	0.3381
9	—	—	0.3381

表-5 各種モデルと残差の分散

適用モデル (月降水量)	σ_a
$(1, 0, 0) \times (1, 1, 0)_{12}$ $a_t = (1 + 0.0419 B)(1 + 0.5452 B^{12})F_{12}Z_t$	57.44
$(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ $F_{12}Z_t = (1 - 0.9176 B)(1 - 0.9016 B^{12})a_t$	51.84
$(0, 0, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ $F_{12}Z_t = (1 - 0.0175 B)(1 - 0.9023 B^{12})a_t$	49.34
適用モデル (年降水量)	σ_a
$(1, 1, 0)$ $a_t = (1 + 0.363 B)FZ_t - 3.52$	18.83
$(2, 2, 0)$ $a_t = (1 + 1.008 B + 0.642 B^2)F^2Z_t + 1.79$	20.38
$(0, 1, 1)$ $FZ_t = (1 - 0.338 B)a_t$	18.71

表-6 残差の自己相関係数

a_t の自己相関係数 (月降水量)						
1-6	0.001	-0.035	-0.081	-0.029	-0.013	0.001
7-12	0.072	-0.051	0.014	-0.058	0.004	-0.062
13-18	0.013	-0.012	-0.002	-0.063	-0.032	0.002
a_t の自己相関係数 (年降水量)						
1-6	-0.052	0.043	0.335	0.024	0.012	0.147
7-12	-0.123	0.145	0.086	-0.355	-0.021	-0.075

(17) などで決定し、その結果を表-2 に示す。モデルの評価は、式 (19)~式 (30) によればよい。月降水量の初期値は、それぞれ 0.1 としている。表-3

にその結果を示す。評価による繰り返し計算による誤差の標準偏差は、式 (31) より求められ、これを表-4 に示す。参考のために月降水量と年降水量の各種のモデルの評価を行い、そのモデルと残差の分散 σ_a を表-5 に示す。これによれば月降水量のモデルでは、 $(0, 0, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ モデル、年降水量のモデルでは、 $(0, 1, 1)$ モデルがともに σ_a が小さく、モデルとして妥当であると考えられる。

σ_a の小さいモデルを適用し、そのモデルの a_t の標本自己相関係数 r_k について、月降水量と年降水量の場合

表-7 Q と有意水準

	Q	水準
月降水量	84.7	10%
年降水量	60.3	2%

表-8 λ, A の変化

年	θ	θ	$\lambda=1-\theta$	$A=1-\theta$
1889~99	-0.1900	0.8023	1.1900	0.1977
1900~10	0.0468	0.6382	0.9532	0.3618
1911~21	0.0893	0.7743	0.9107	0.2257
1922~32	-0.0800	0.7774	1.0800	0.2226
1933~43	0.0386	0.5297	0.9614	0.4703
1944~54	-0.1145	0.7678	1.1145	0.2322
1955~64	0.0057	0.7979	0.9943	0.2021
1965~74	0.2849	0.6117	0.7151	0.3883

の数値例を 表-6 に示す。次に式 (32) から、おのおのの Q と有意水準を求めた結果を 表-7 に示す。月降水量は自由度 $m=75$ 、年降水量は自由度 $m=40$ である。表-7 によると、一般に月流量時系列⁹⁾ に比べると月降水量時系列の有意水準が小さい。秋田市の月降水量の例⁹⁾ でもいえる。

そこで各期間ごとの $\lambda, A=1-\theta$ を計算して 表-8 に示す。これによると期間によっては λ, A が変化している結果となっている。期間をどの程度とるかは問題であるが、いずれにしても 表-8 のように λ, A が変化していることは、月降水量の分散が大きいためと考えられる。本論文での予測には、実際には、 λ, A が変化しているが近似的にもっとも新しい期間の係数を採用している。なお、年降水量については、資料が少なく誤差も考えて、モデルの λ を一定とし予測した。

累加ペリオドグラムによって検討を行った結果を、月降水量と年降水量の例について 図-9, 10 に示す。両図から、残差が正規分布をしていると仮定された Kolmogorov, Smirnov の 75%, 95% 限界内にあって有意であると思われる。

結論として月降水量モデルは、

$$W_t = (1-\theta B)(1-\theta B^{12})a_t$$

となる。 $W_t = f_{12}Z_t$ である。

年降水量モデルは、10 年移動平均系列を g_t とすると、

$$fg_t = (1-\theta B)a_t \dots\dots\dots(44)$$

となる。なお、このモデルを 1 年単位にもどすときは、次のとおりである。

$$g_t = \sum_{i=0}^9 Z_{t-i} \quad (t \geq 10) \dots\dots\dots(45)$$

であり、

$$fg_t = (1-B)g_t = g_t - g_{t-1} = Z_t - Z_{t-10} \quad (t \geq 11)$$

である。ゆえに、

$$Z_t - Z_{t-10} = (1-B^{10})Z_t = (1-\theta B)a_t \dots\dots\dots(46)$$

上式によると $(0,0,1) \times (0,1,0)_{10}$ モデルとなり、10 年の周期をもつモデルと同じモデルであることが理解される。

予測については、月降水量を最近の 2 か年を 1 年ごとに予測した結果を 図-11 に、年降水量を 1940 年以後

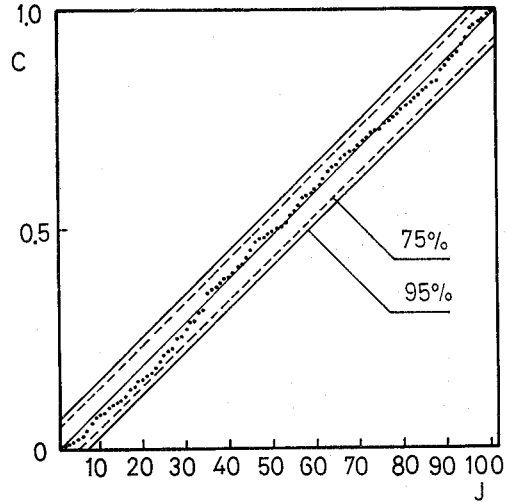


図-9 月降水量系列の累加ペリオドグラム

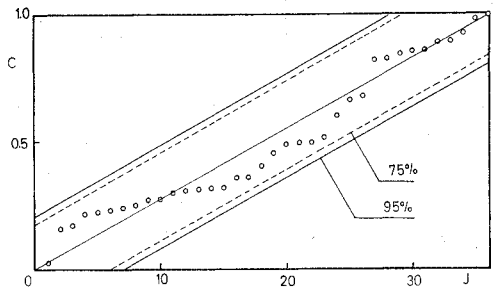


図-10 年降水量系列の累加ペリオドグラム

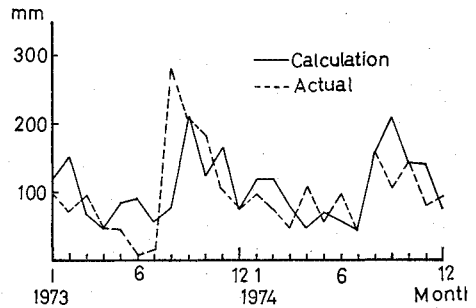


図-11 月降水量の予測値と実測値の比較

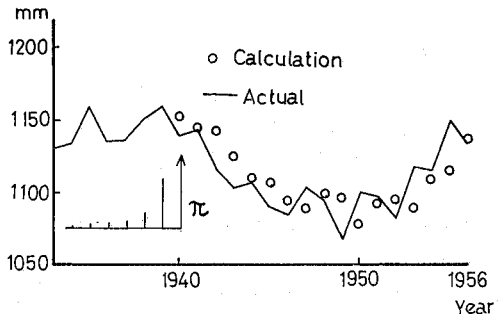


図-12 年降水量の予測値と実測値の比較

1 年ごとに予測したものを 図-12 に示す。そのときの月降水量と年降水量の π 係数を 表-9 に示す。札幌の

表-9 π 係 数

月降水量	π_1	π_2	π_3	π_{12}	π_{18}	π_{14}
	-1.75×10^{-2}	-3.06×10^{-1}	-5.35×10^{-6}	9.77×10^{-2}	1.71×10^{-2}	3.54×10^{-5}
年降水量	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
	6.62×10^{-1}	2.24×10^{-1}	7.56×10^{-2}	2.56×10^{-2}	8.64×10^{-3}	2.92×10^{-3}

表-10 札幌市の月降水量のばらつき

月	平均値	標準偏差	変動係数	月	平均値	標準偏差	変動係数
1	99.3	43.8	0.441	7	90.6	50.3	0.556
2	76.7	38.1	0.496	8	111.1	70.0	0.630
3	66.4	27.4	0.412	9	142.3	76.5	0.537
4	60.4	30.5	0.505	10	111.9	54.2	0.484
5	61.2	29.9	0.489	11	108.5	47.0	0.433
6	66.9	34.5	0.516	12	100.3	35.5	0.354

表-11 予測値と実測値のばらつきの比較

年	1973		1974	
	平均値	標準偏差	平均値	標準偏差
実 測 値	101.8	77.6	91.7	32.7
予 測 値	105.8	46.5	132.3	37.9

実測の月降水量のばらつきを表-10に、予測した2か年のばらつきと実測の2か年のばらつきを比較したものを表-11に示す。

7. 結 論

本論文では、比較的周期性の強い月降水量時系列に季節性モデルを適用し、年降水量時系列には簡単な非定常線形過程のARIMA(0, 1, 1)モデルを適用した。

月降水量の予測値と実測値の比較では、実測の月降水量そのもののばらつきが大きいので、変動係数の大きい月には両者が一致しない場合もあるが、標本自己相関係数も $\tau=12$ で0.2位の値であることも考えると、平均値と分散との比較では、ほぼ妥当な予測ができたと考えられる。

定常時系列理論による降水量時系列の解析で確率変動成分がまったく独立で時系列理論が適用できない場合もあると報告⁹⁾されているが、この例のように月降水量系列に時系列理論が適用できないとき、あるいは予測を目的とするときに、このモデルが適用可能と思われる。また、期間によっては、モデルの過程の係数を変化させて目的に応じた予測をすればよい結果がえられるであろう。

年降水量の例では、資料が少なくて λ を変化させると誤差が含まれてくるために λ を一定とした。それゆえ、パラメーター θ の同定、評価をする際に、予測年以後の資料を用いたために予測精度が向上したとも考えられる。また、原系列にもどしたときの季節性モデルは $(0,0,1) \times (0,1,0)_{10}$ モデルとなる。このモデルから判断

すると、年降水量時系列は前出の仮定のように、10年の長周期成分をもつことになる。しかしながら、資料の数も少ないので物理的にその周期が存在しているか否かは疑問である。

図-2と図-12とをあわせてみて、

1950年以後の予測に関しては、従来までの理論による予測値と非定常理論によるそれとで比較すると、後者が予測としては正しい傾向にあるように思われる。

以上のごとくBox & Jenkinsの理論によれば、従来までの解析と異なって、長期傾向、周期成分などを分解せずに、従来の定常時系列理論を適用できる。

今後の問題としては、この理論が多くの水文量時系列に、あるいは、水文量以外の時系列の予測理論として適用可能かどうかを検討する必要がある。

謝 辞：本研究は“文部省科学研究費試験研究：確率統計水文学における最近の進歩と今後の発展に関する研究（代表者：東京工業大学日野幹雄教授）”の補助により行われた。また、本研究の遂行にあたって、文献等のご紹介、ならびに終始、適切なお助言、ご指導をいただきました北海道大学岸力教授、同時にいろいろご協力を得た北海道大学藤田睦博助教授に深謝致します。

参 考 文 献

- 1) 張 玉田・平山健一・岸 力：台湾省蘭陽溪における月流量時系列の解析，北海道大学工学部研究報告，第53号，pp. 1~34, 1969.
- 2) 長谷部正彦・平山健一・岸 力：伊納旬流量の時系列解析，土木学会北海道支部研究発表論文集，第26号，pp. 237~241, 1970.
- 3) たとえば，Quimpo, R.G.: Stochastic model of daily river flow sequences, Hydrology Papers, Colorado State University, No. 18, Feb., 1967.
- 4) 長谷部正彦：東北各河川における時系列解析について，東北支部技術研究発表会講演概要，pp. 223~224, 1975.
- 5) Box, G.E.P and G.M. Jenkins: Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden-Day, 1970.
- 6) 長谷部正彦：非定常時系列の解析と予測について，水理講演会論文集，pp. 41~46, 1976.
- 7) 岸 力：線形確率過程の解析と予測，水工学シリーズA コース，pp. A-6-1~27, 1975.
- 8) 平山健一・永井新一：岩手県における水文資料の時系列的特性，東北支部技術研究発表会講演概要，pp. 225~226, 1975.
- 9) Brown, R.G: Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1962.
- 10) Anderson, T.W: The Statistical Analysis of Time Series, John Wiley & Sons, Inc., 1971.
- 11) E.J. ハナン（細谷雄三訳）：時系列解析，培風館，1974.
- 12) 細谷雄三：時系列の推定問題，経済学論集，38巻，4号，pp. 57~71, 1973.
- 13) 小原正己：時系列論とその応用，日本応用力学会編「応用統計学」第7章，金原出版，1966.
- 14) 岸 力：北海道水資源ハンドブック，北海道広域利水調査会等共編，pp. 1~42, 1973.

(1976.5.20・受付)