【討 議】

吉田 博著 "H型鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度"への討議

（土木学会論文報告集第243号・1975年11月掲載）

▶討議者（*Discussion*）——西 野 文 夫・岩 熊 哲 夫（東京大学）
By Fumio Nishino and Tetsuo Iwakuma

著者も指摘しておられるように，残留応力が柱の座屈強度や一枚の平板の座屈強度におよぼす影響については数多くの研究成果が発表されているものの，実際の構造部材にみられる複数の板要素で集成された断面全体の局部座屈に対する研究成果は少なく，興味深く読ませて頂いた．さらに著者は局部座屈を扱った有限帯板法を変更することなく，そのままの形で局部座屈と柱の全体座屈との連成座屈を扱っておられるが，薄板集成構造に対する有限帯板法の有用さを示す一つの例であろう．後者の問題も比較的研究成果の少ない分野であり，興味のある問題ではないと考える．

著者は図—**7**に示された２つの断面について数値計算を行い，この結果に検討を加えたうえで，H形断面材の局部座屈，および局部座屈と柱の曲げ座屈の連成座屈についての結論を下されている．この結論に対する著者の意図は明確ではないが，必ずしも図—**7**の２つの断面に限定された結論ではないように読みとれる．数値計算結果そのものは図—**9～16**の形に整理された上で，詳細な検討が加えられているが，力学的な性質に大きな影響をおよぼすパラメーターについての考察なしに２つの断面についての数値計算結果から一般的な結論を下すのは少し危険なのではなかろうか．同じ問題に興味を持つ者として，パラメーターについての議論を中心に，合わせて気のついた点の指摘も含めて討議としたい．

基準とする板の幅厚比 b_o/t_o を用いて座屈係数 k を式(17) で定義すると，k と座屈応力 σ の間には比例関係があり，座屈係数を座屈応力と同じ意味を持つ量として扱うことができる．このことから，著者は数値計算結果を座屈応力ではなく座屈係数でまとめておられる．この討議においても座屈応力と同じ意味で式(17) の座屈係数を用いる．

H形断面が実際に座屈するとき，少なくとも数学的にはフランジとウェブの両者が座屈し，どちらか一方が単独に座屈することはない[18]．これに反し，フランジとウェブがモーメントを伝達しない回転自由のピンで結合されているモデルを考えると，フランジおよびウェブはそれぞれ単独に座屈する．このモデルのフランジおよびウェブの座屈係数をそれぞれ k_f, k_w とする．k_f はフランジと同じ板の非載荷辺の一つが自由，一つが単純支持の場合の座屈係数と一致する．同様に k_w はウェブ板の両非載荷辺が単純支持の場合の座屈係数と一致する．今 $k_w>k_f$ となる場合について考える．作用応力が k_f から決まる座屈応力に達するとモデル構造のフランジは座屈するが，ウェブはまだ健全な状態にある．ウェブが健全なかぎり，ウェブは非載荷辺に作用する曲げモーメントに抵抗することができ，ウェブとフランジが剛結されている実際のH断面ではフランジに対し，ウェブは正のばね係数をもった回転拘束ばねとして働く．したがって，実際のH断面の座屈係数を k とすると

$$k>k_f \quad \cdots\cdots(29)$$

の関係があることが理解される．次にウェブに着目する．k_f から決まる座屈応力が作用するとモデル構造のフランジは座屈するため，ウェブの回転変位に対するフランジの回転拘束ばねとしてのばね定数は零となる．ウェブとの接合線が剛結されているとき，この座屈応力を越える応力に対してはフランジが変形しようとするのに対し，ウェブが変形を拘束するように働く．すなわち，フランジはウェブに対する拘束ばねとして働くのではなく，むしろウェブにモーメント外力を加える働きをする．あるいは負のばね係数を持ったばねとして作用するということもできよう．ウェブの非載荷辺にはモーメント外力が作用する，あるいは負のばね係数をもったばねで拘束されているといった状態にあることから，H断面は両非載荷辺が単純支持されたウェブの座屈応力より低い応力で座屈することが理解できる．したがって，式(29) と合わせて

$$k_w>k>k_f \quad \cdots\cdots(30)$$

の関係がある．反対に $k_f>k_w$ となる断面では

$$k_f>k>k_w \quad \cdots\cdots(31)$$

となり $k_f=k_w$ の断面では

$$k_f=k=k_w \quad \cdots\cdots(32)$$

となる．

フランジの非載荷辺の一つが自由，一つが固定支持の板，およびウェブの両非載荷辺がともに固定支持の板を

考え，それぞれの板の座屈係数を k_{fu}, k_{wu} とする．k_{fu} はウェブのばね拘束が無限大のときのフランジの座屈に対する座屈係数であるのに対し，実際のH断面ではフランジに注目したとき，ウェブのばね係数は有限の値となることから

$$k_{fu}>k \quad \cdots\cdots(33)$$

同様にウェブに注目すると

$$k_{wu}>k \quad \cdots\cdots(34)$$

残留応力のない板の弾性座屈に限定すると k_{fu} と k_f の比，および k_{wf} と k_w の比はそれぞれ次のようになる[18]．

$$\frac{k_{fu}}{k_f}=3.0,\ \frac{k_{wu}}{k_w}=1.75 \quad \cdots\cdots(35)$$

非弾性効果や残留応力が座屈におよぼす影響を考慮した場合，これらの比の値は変化し，数値計算して始めて決まるものであるが，弾性時の値に比べてそれほど大きな変化はないと考えてよいであろう．これに反し k_f と k_w の比はH断面の寸法によって大きく変化する．したがって，式 (30) において $k_w \gg k_f$ のときに k は k_w よりも k_f に近い値となるといえる．同様に $k_f \gg k_w$ のとき k は k_w に近い値となる．

式 (30)～(34) にみられるように k と k_f, k_w, k_{fu}, k_{wu} との間には何らかの関数関係があると考えてよい．(k_f, k_w) と (k_{fu}, k_{wu}) の2組のパラメーターについてみると前者は k の上下界となっているのに対し，後者は単に上界を与えるにすぎない．このことから2組のパラメーターの内では前者の方が k とより密接な関数関係があると考えてよいであろう．したがって2組のうちから1組を選ぶとすれば前者を選び，k との間の関数関係を

$$k=k(k_f,\ k_w) \quad \cdots\cdots(36)$$

と表わす．すでに述べたように座屈係数と座屈応力とが同じ意味を持つ量であることを考えると式 (36) を座屈応力についての関係と考えることもでき，次のように書ける．

$$\sigma=\sigma(\sigma_f,\ \sigma_w) \quad \cdots\cdots(37)$$

ここに

$$\sigma_f=\frac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t_o}{b_o}\right)^2k_f,\ k_f=\left(\frac{b_o}{t_o}\right)^2\left(\frac{t_f}{b_f}\right)^2k_{fo} \quad \cdots\cdots(38)$$

$$\sigma_w=\frac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t_o}{b_o}\right)^2k_w,\ k_w=\left(\frac{b_o}{t_o}\right)^2\left(\frac{t_w}{b_w}\right)^2k_{wo} \quad \cdots\cdots(39)$$

ここに添字 f, w はそれぞれの量がフランジおよびウェブに関する量であることを表わす．k_f, k_w は基準とする板の幅厚比をもとに式 (17) で定義された座屈係数であるのに対し，k_{fo}, k_{wo} は考えている板の幅厚比をもとに定義された普通によく用いられている座屈係数であり，残留応力を含まない弾性体の場合には板の形状比のみの関数となる[18]．

著者は薄板の座屈問題の支配方程式を有限帯板法を用いるためにポテンシャル・エネルギーの停留原理で表わしているが，ここでは局部座屈の定性的な議論に便利なように，微分方程式の境界値問題として定式化したものをもとに式 (36) の関数関係に考察を加える．板の座屈問題を境界値問題として表わしたとき，一枚の板に対しては一つの微分方程式を与えられた境界条件のもとで解く問題となるのに対し，2枚の板の集成断面ではそれぞれの板要素に対して一つずつ，合計2つの全く同じ形の微分方程式を与えられた境界条件のもとで解く問題となる．局部座屈問題では2つの微分方程式はそれぞれ独立しており，境界条件のみに連成項がみられる．2つの微分方程式が独立していることから，それぞれ別個に一般解を求めることができる．残留応力のない弾性板についてこのように別個に一般解を求めたとき，一般解に含まれるパラメーターは板の形状比 α と $\{12(1-\nu^2)\sigma b^2/\pi^2Et^2\}$ の2つのみである[19]．したがって，2枚の板の集成構造の局部座屈問題では，それぞれの板に対するこれらのパラメーターが境界条件によって決まる関数関係

$$f\left\{\frac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t_1}{b_1}\right)^2\frac{1}{\sigma},\ \alpha_1,\ \frac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t_2}{b_2}\right)^2\frac{1}{\sigma},\ \alpha_2\right\}=0 \quad \cdots\cdots(40)$$

を満足すると座屈すると考えてよい．添字 1, 2 は2枚の板を区別するために付した．かっこ内の第 1, 3 項に共通の σ を独立なパラメーターとして扱い，さらに第 1, 2 項および第 3, 4 項をそれぞれ関数関係で結びつけても一般性を失わないので，式 (40) を次のように表わす．

$$f\left\{\sigma,\ \frac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t_1}{b_1}\right)^2k_1(\alpha_1),\ \frac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t_2}{b_2}\right)k_2(\alpha_2)\right\}=0 \quad \cdots\cdots(41)$$

ここに $k_1(\alpha_1)$, $k_2(\alpha_2)$ はそれぞれ α_1, α_2 のみの関数を表わす．式 (41) を σ について解くと

$$\sigma=\sigma\left\{\frac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t_1}{b_1}\right)k_1(\alpha_1),\ \frac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t_2}{b_2}\right)k_2(\alpha_2)\right\} \quad \cdots\cdots(42)$$

式 (42) 中の k_1, k_2 は α_1, α_2 の関数であること以外に条件はなく，したがって，式 (38), (39) 中の k_{fo}, k_{wo} と直接結びつくものではない．式 (42) は残留応力のない弾性体についての考察であるのに対し，式 (37) は非弾性効果，残留応力の影響を含むものとなっている．しかしながら式 (42) と式 (37) とは同じ形の関数関係を表わしており，集成板構造の局部座屈の性質を調べるパ

ラメーターとして式 (38), (39) の σ_f, σ_v あるいは k_f, k_w は比較的よいパラメーターになるのではないかと思われる.

著者は断面形についてのパラメーターとして図—7 の A, B 2つの断面を選び, さらに残留応力を変化させて得た数値結果について, 断面形の差, 残留応力の差をもとに議論されているが, ここに提起した k_f, k_w といったパラメーターで議論すると異なった結論が得られる可能性もあるのではないかと考えられる. これらのパラメーターを用いて著者の数値計算結果を整理することができなかったが,これまでの討議に関連して気のついた点, および論文を読んでいて気のついた点を指摘したい.

1. Model I と Model II の座屈強度を比較し, その大小関係によってフランジ, あるいはウェブの座屈が先行すると書かれている. 多くの場合, これでよいであろうが, 厳密には式 (30)～(32) で用いた k_f, k_w の大小で区分けをするべきではないか. Model I でのばね定数は式 (15) にみられるように (t_w^3/b_w) に比例するのに対し, Model II のばね定数は $(b_f t_f^3/L^2)$ に比例する. ある与えられた L に対し, (t_f/b_f) と (t_w/b_w) の比が特定の値になり, 式 (32) の条件を満たす場合を考えると, フランジとウェブはお互いに拘束せず, 同時に座屈し,どちらかが先行することはない. しかしながら, ばね定数には (t_f/b_f) と (t_w/b_w) の比とは直接の関係がないため, Model I と Model II の座屈応力に差が生じ, どちらかの座屈が先行するといったことになる可能性がある.

式 (15) のばね係数ははりの問題, すなわち

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

の微分方程式の解から得られるばね係数と同じ形をしている. 板の場合には式 (49) に相当する変位を仮定し, 微小変位理論の薄板の基本式に代入すると

$$D\left(\frac{d^4v}{dy^4}-\frac{2\pi^2}{L^2}\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{\pi^4}{L^4}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (44)$$

を得る. 式 (15) についてくわしい説明はないが, この基本式から求まるばね係数は式 (15) のように表わされるのであろうか.

2. 結論の (**2**) と (**3**) で残留応力をパラメーターとして取り上げたときの結論として, 弾性座屈する場合にはフランジの断面形状の変化を無視し, 補剛材と考えた解で十分であるが, 非弾性座屈する場合には断面形状の変化を考慮しなければならないと書かれている. 断面形を図—7 の A, B に限定すれば, この結論に問題はないが, 一般論としては成り立たないのではないか. フランジに注目するとウェブからの拘束が小さく単純支持に近い場合には, 座屈波形に形状変化が少なく, 反対に拘束が大きく固定支持に近いときには形状変化が大きいのはよく知られた事実である. したがって, 形状変化を考える必要があるか, どうかの議論の本質は弾性, 非弾性の問題よりは拘束の問題, したがって k_f と k_w の大小関係の問題ではないかと思われる.

3. 残留応力を有しない H 断面の弾性局部座屈強度は Model I と Model II の小さい方の値で近似できるとされている. 同様に結論の (**1**) では弾性の条件を取り除いて, 局部座屈強度は非弾性座屈も含めて, フランジがウェブによって弾性的に拘束されていると考えたときのフランジの座屈強度と, ウェブがフランジによって弾性的に拘束されていると考えた場合のウェブの座屈強度の小さい値と考えてよいとしている. 断面Aでは $k_w/k_f=2.36$, 断面Bでは $k_f/k_w=1.7$ 程度であり, この比はそれほど大きくないが, この程度の場合にも本討議中の $k_w \gg k_f$ のときには $k \approx k_f$, $k_f \gg k_w$ のときには $k \approx k_w$ の一つの例証とも見ることができよう. 結論の (**1**) は残留応力のない場合に限られている. 上記の **2**. の議論と関連するが, A, B 以外の断面も考えたとき, 結論の (**1**) は残留応力のある場合には本当に成り立たないのであろうか.

4. 著者ははしがきのなかで高張力鋼の開発とともに, 柱の座屈強度の研究の重要性が注目されるようになってきたと書かれている. 座屈問題の解に, 最も大きな影響をおよぼすのは細長比, あるいは幅厚比に代表される幾何学的なパラメーターである. しかしながら現在の段階で研究上問題となるのは, これらの第一義的なパラメーターそのものではなく, 広い意味で初期不整とよばれる第二義的なパラメーターの影響である. 高張力鋼を使用したとき, 座屈による崩壊を防ぐために, 普通の鋼材を使用したときに比べて, 柱では細長比を, 板では幅厚比を小さく制限しなければならないことはよく知られた事実である. これらはすべて幾何学的なパラメーターに関する問題である. 一方第二義的なパラメーターである初期不整としてまず問題になるのは初期まがりと残留応力であろう.高張力鋼になればなるほど,柱では同じ長さに対して断面の大きなものが, 板では同じ板幅に対して板厚の大きなものが使われ, 製作方法に大きな差がないことを考えると, 初期まがりの影響は高張力鋼になるほど小さいと考えてよいのではないか. 残留応力は降伏応力に対する比の形で座屈に影響をおよぼすと考えてよく, この比は高張力鋼になればなるほど小さくなる. したがって, 残留応力の座屈に対する影響も鋼材の強度が大きくなるにつれて小さくなると考えてよい. これらのことから筆者は高張力鋼になるほど座屈問題の重要性は低下すると認識している.

5. 非弾性問題であっても座屈問題でポテンシアル・

エネルギーを用いることができるのは，つり合い位置を基準にそのごく近辺の問題を扱うとして問題を線形化していることによる．したがって，式 (1) の応力-ひずみ関係も，つり合い位置からの増分関係とみるべきであり，式 (2) で増分量を表わす記号 d を用いるのであれば，式 (1) でも d をつけるべきではなかろうか．

6．著者はⅠからⅤまでの5つのモデルを考え，数値計算を行っている．薄板断面の局部座屈問題はⅤのモデルそのものと考えてよく，これに対し，Ⅰ からⅣまでのモデルはⅤの近似解法を断面の性質に応じて物理的にモデル化したものと見ることもできよう．著者がこれらのモデルを考えられたのは，常にモデルⅤを解く必要はなく，場合に応じてⅤのモデルより数値計算量が少なくてすむモデルⅠ～Ⅳを用いた方がよいとの理由によるのであろうと想像される．数値計算量を減らすことは一般的には重要な問題であるが，構造部材として使われる程度の断面であれば，たとえ常にⅤのモデルで計算を行っても，数値計算量の総量がそれほど多くないため，実用上支障をきたすことはないのではなかろうか．もしそうであるとするとモデルⅠからⅣまでを考える必然性は少なくなるであろう．

参考文献

18) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.
19) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere, : Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1961.

▶**回答者** (*Closure*)

吉田 博 (金沢大学)
By Hiroshi Yoshida

著者の論文に関心を寄せられ，細部にわたるご検討をいただきました西野・岩熊両氏に深謝いたします．

H形断面材の局部座屈，および局部座屈と柱の曲げ座屈の連成座屈を取り扱う場合，断面形状に関するパラメーターとして，フランジとウェブがモーメントを伝達しない回転自由のピンで結合されているモデルを考え，このモデルにおけるフランジおよびウェブの残留応力を考慮しない弾性座屈係数 k_f および k_w を用いたらよいのではないかというご提案のようである．しかし，残留応力を考慮しない場合，たとえば $k_w>k>k_f$ を満足する断面でも，残留応力を考慮すると残留応力分布および断面形状によっては $k_f'>k>k_w'$ となる場合が考えられる．ここに，k_f' および k_w' は k_f および k_w を求めたと同一のフランジおよびウェブの残留応力を考慮した弾性座屈係数である．したがって，H形断面材の局部座屈，および局部座屈と柱の曲げ座屈の連成座屈を断面形状に関するパラメーター k_f および k_w のみでは表現しきれないと思われる．

以下，ご指摘の点を順を追って著者の考え方を述べさせていただきます．

1．残留応力を考慮する場合，断面に関するパラメーターとして k_f および k_w を用いることは必ずしもよいとは思われないことは上述のとおりです．式(15)のばね係数については文献 18) の式 (629) をご参照願います．

2．一般的な断面に対してはもちろん k_f と k_w の大小に関係あると思われるが，図—**16** からも明らかなように弾性，非弾性によっても形状変化の影響は大きく異なると思われる．弾性，非弾性の問題は残留応力分布に関する問題であり，弾性域での断面の形状変化には k_f と k_w の大小関係が大きな影響を及ぼすと考えられるが，非弾性域においては残留応力分布が k_f と k_w の大小関係以上に大きい影響を及ぼすと思われる．

3．弾性域においては前述のように残留応力を考慮しない場合には $k_w>k>k_f$ となる断面でも，残留応力を考慮すると $k_f'>k>k_w'$ となる場合があると思われる．残留応力分布によっては非弾性域において，さらに複雑な性状を示す場合があると考えられる．結論の (**1**) は残留応力のない場合に対する結論であり，残留応力のある場合には成り立たないとは言及していないので誤解のないようにお願いしたい．

4．緒言でも述べているとおり，曲げ座屈強度に対する断面構成と局部座屈強度に対する断面構成とは相反する関係にある．したがって，圧縮部材の断面構成は座屈を問題としない低強度の材料から成る部材を除いて，本来曲げ座屈および局部座屈等を考慮して決定されるべきものである．ご指摘の“高張力鋼になればなるほど，柱では同じ長さに対して断面の大きなものが，板では同じ板幅に対して板厚の大きなものが使われ”る背景には，柱の曲げ座屈および板の局部座屈が問題になるからであり，逆に座屈が問題とならないような部材および断面に対してのみ高張力鋼が使用されているのが現状ではないでしょうか．

座屈問題を考えずに圧縮部材の経済的断面構成を考えることは不可能であり，現在用いられている高張力鋼の部材または断面について座屈に対する問題がないからといって高張力鋼の座屈問題の重要性がないということになるでしょうか．

5．式 (1) の式 (7) への適用に際して増分関係を考えればよく，式 (1) に d が付いていないから誤りであるという問題ではないと思われる．

6. 本論文の問題を このように限定して 解釈されているのはきわめて残念である.

構造解析に限定する必要はないと思うが，構造解析に当っては各種のモデル化が行われるのが普通である. このモデル化はできる限り実際のものに忠実であれば実際の現象を正確に知ることができる. しかし，実際のものに忠実なモデルは一般に複雑であり，解析が困難であったり，仮に解析できても膨大な計算を必要とする場合が多い. しかし，わずかにモデルを簡略化することにより，著しく解析が容易になり，かつ実際の現象をある程度正確に知ることができる場合が多い. さらに，このように簡略化されたモデルは，さらに複雑な別な構造に生ずる現象の類推に役立つことができる. たとえば，モデルVの計算結果からフランジまたはウェブの個々の座屈現象を知ることはできないが，逆にフランジおよびウェブの座屈現象からはH形断面全体の座屈現象を類推することができた. しかし，このように簡略化されたモデルから複雑な構造に生ずる現象をどのような範囲でどの程度正確に類推できるかを明らかにしておく必要がある.

したがって，可能なかぎり忠実なモデル化と可能な限りの正確な解析法が常に必ずしもよいとは考えられないというのが著者の見解である.