

流体と固体粒子の相互作用に関する研究*

A STUDY OF FLUID-SOLID PARTICLES INTERACTION

吉川 秀夫**・福岡 捷二***・吉川 勝秀****

Hideo KIKKAWA, Shoji FUKUOKA and Katsuhide YOSHIKAWA

1. 序

流体と異なる密度をもつ固体粒子は、慣性力および重力によって受ける力が流体と異なり、流体に対し相対速度をもつ。この時、固体粒子と流体は流体の粘性のために相互作用を行う。本研究は、重力場で種々の条件のもとに流体中へ投入された固体粒子の拡散現象を、流体と粒子の相互作用に着目して考察したもので、次の3つの場合を取扱った。

- (i) 個別に投入された粒子の拡散
- (ii) 連続投入された粒子の拡散
- (iii) 流体と粒子が混相状態で噴出した場合の運動量と粒子の拡散

(i) は最も単純な場合で、粒子を拡散する主要因は、粒子から間欠的に離脱する渦およびそれに伴う回転である。この点に着目し、沈降する粒子のちらばりを粒子の運動方程式を用いて解析した。(ii) では、粒子と流体および粒子間の相互作用が問題となる。ここでは、粒子と流体間の作用を、沈降する粒子によって誘起される平均的な流れの場としてとらえ、(i) の結果をもとにして粒子の拡散を推定する方法を考察した。(iii) の場合には、粒子を拡散する主要因は流体の乱れ速度である。粒子の拡散は、噴出時の流体と粒子がもっている運動量、流体の性質、粒子個々の性質および重力の作用によって獲得する運動量に支配される。粒子個々の性質は、流体と粒子の相対速度として表われる。獲得される運動量は、粒子濃度と粒子および流体の密度に関係する。ここでは、粒子個々の性質を相対速度で導入することにより、通常の密度噴流と類似の解析を行った。

2. 個別に投入された粒子の拡散

(1) 従来の研究

レイノルズ数 (R_e) が非常に小さい領域では、流れの中に置かれた二次元物体の後流は、左右対称で安定している。 R_e が増加するにつれて、物体の背後に形成される対称な渦対は、次第に流下方向に引伸ばされる。 R_e がほぼ 50 になると、渦対は非対称となる。そして、物体のまわりの圧力分布が変化し、両側から交互に渦が離脱する。このカルマン渦は、2列に規則正しく配列し、後方へ流れ去る。 R_e 数が 2.5×10^3 から 4×10^5 の範囲では、カルマン渦の存在を明確には認め難いが、規則的な渦の放出がみられる。 R_e 数が 4×10^5 を越えると、背後の流れは乱流になる。一方、三次元物体の後流中の渦は二次元後流中の渦と多くの類似点を持つが、二次元の場合と異なり、規則正しい配列をとらず、三次元的な loop 状を呈する¹⁾。これは、三次元物体では物体から離脱する渦度の剥離点が一定でないことによる。このために、静止流体中を沈降する三次元物体の挙動は複雑である。

本節では、静止流体中を沈降する球形粒子の運動機構を考慮して、沈降する単粒子の目標点のまわりの分布確率およびちらばり幅を求める。

Willmarth²⁾ らは静止流体中を自由落下する円盤の運動と後流を可視化し、運動の形態は R_e 数と無次元慣性モーメントの値によって種々変化することを示した。箭内³⁾、Tawatchai⁴⁾ は、ストークス範囲を十分に越える特性をもつ粒子の静水中でのちらばりについて考察した。箭内は、粒子が静水中を落下する時反転運動を繰り返すことに着目し、目標点のまわりのちらばりを求めた。すなわち、目標点に対する分布確率は二項分布に従い、標準偏差は水深と粒径の積の平方根に比例することを見出し、これを実験によって確かめた。一方、Tawa-

* 本研究の一部は第 20 回水理講演会にて発表

** 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 Ph.D 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

**** 正会員 工修 建設省土木研究所

tchai は粒子を1個ずつ静水中へ落下させた時と、二次元スリットから連続的に落下させた時の粒子の拡がりを実験的に検討した。その結果、粒子レイノルズ数が150~1100の範囲では、単粒子沈降の拡がり幅は箭内が確率論的に導いた式で説明がつくこと、連続投下の場合には、粒子沈降にともなって二次的な流れが生じるために、濃度分布は単純に単粒子沈降の重ね合わせから求めることができないことなどを明らかにした。しかし、箭内の理論では粒子の幾何形状のみを考慮し、流体と粒子の相互作用を無視していることから、粒子の散らばりの機構を正しく説明し得たとはいいがたい。前述のように、粒子を拡散する主要因は、粒子から間欠的に離脱する渦およびそれに伴う回転である。その結果、沈降する粒子は横方向の力をうける。この力は、粒子の形状および粒子 R_e 数に依存し、確率的な性格をもっていると考えられる。ここではこの点に着目して、粒子の運動方程式から出発し、粒子の運動を確率過程として取扱い、単粒子沈降時の粒子の目標点に対する分布形およびちらばり幅を求める。

(2) 理論的考察

座標系を図-1 のようにとると、ベクトル表示した粒子の運動方程式は式(1) のように書くことができる。

$$(m+m_i')\ddot{\vec{R}}_i = -\rho C_{D_i} A_i \vec{R}_i \dot{\vec{R}}_i \dot{\vec{R}}_i + (m-m_0)g\vec{k} + \vec{F}_i \dots (1)$$

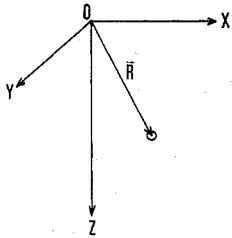


図-1 座標系

ここに、 m : 粒子の質量、 g : 重力加速度、 m' : 仮想質量、 C_D : 抵抗係数、 m_0 : 粒子と同体積の流体の質量、 \vec{R} : 位置ベクトル、 ρ : 流体の密度、 A : 粒子の運動方向への投影面積、 \vec{F} : \vec{R} に直角方向の作用力、 \vec{k} : z 方向の単位ベクトル。

添字 i は各瞬間における値をとることを示す。左辺は慣性項、右辺第一項は速度の2乗に比例する抵抗、第二項は重力効果、第三項は運動方向に直角に作用する力を示す。粒子レイノルズ数 ($R_d = w_0 d_s / \nu$, w_0 : 沈降速度、 ν : 動粘性係数、 d_s : 粒径) がある程度大きければ、沈降する粒子には間欠的な渦の剝離および回転が生じ、そのために横方向の力 \vec{F}_i が作用する^{2), 5)}。この力は、粒子の形状および粒子レイノルズ数 R_d に依存し、確率的な性格をもっていると考えられる。

確率変数 \vec{R} および \vec{F} の成分をそれぞれ (x, y, z) , (F_x, F_y, F_z) とおき、式(1) を成分にわけると式(2)~(4)となる。

$$(m+m_i')\ddot{x}_i = -\rho C_{D_i} A_i \dot{R}_i^2 \frac{\dot{x}_i}{|\dot{\vec{R}}_i|} + F_{x_i} \dots (2)$$

$$(m+m_i')\ddot{y}_i = -\rho C_{D_i} A_i \dot{R}_i^2 \frac{\dot{y}_i}{|\dot{\vec{R}}_i|} + F_{y_i} \dots (3)$$

$$(m+m_i')\ddot{z}_i = -\rho C_{D_i} A_i \dot{R}_i^2 \frac{\dot{z}_i}{|\dot{\vec{R}}_i|} + F_{z_i} + (m-m_0)g \dots (4)$$

粒子 R_e 数がある程度大きく ($R_d > 300 \sim 400$)、 z 軸方向の運動が卓越する場合を考える。巨視的に見た場合の z 軸方向の運動が定常状態に達すると、式(2)~(4)は(5)~(7)のように書くことができる。

$$\ddot{x}_i + a_i \dot{x}_i \simeq n_{x_i} \dots (5)$$

$$\ddot{y}_i + a_i \dot{y}_i \simeq n_{y_i} \dots (6)$$

$$\ddot{z}_i + a_i \dot{z}_i \simeq n_{z_i} + (m-m_0)g / (m+m_i') \dots (7)$$

ここに、

$$a_i = \rho C_{D_i} A_i w_0 / (m+m_i')$$

$$(n_{x_i}, n_{y_i}, n_{z_i}) = (F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}) / (m+m_i')$$

現象は z 軸に関して対称であるから、式(5)を解けば x - y 面内の拡散を知ることができる。巨視的な拡散状況を知るために、諸量を観測時間スケール Δt にわたり平均化し、次の支配方程式を得る。

$$\ddot{x} + a\dot{x} = n_x \dots (8)$$

ここに、

$$x = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} x_i(t) dt, \quad a = \rho C_D A w_0 / (m+m')$$

横線は平均値を示す。式(8)を時間 t について1回積分すると

$$\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(0)}{dt} + a[x(t) - x(0)] = \int_0^t n_x(t) dt \dots (9)$$

となる。いま考えている時間スケール Δt を作用力の相關時間スケールより十分大きくとれば、右辺は独立で定常増分をもった一つの過程と考えることができる。さらに、 n_x が一様なパワースペクトルを持つと仮定すれば、式(9)は初期条件

$$\left. \begin{aligned} x(0) = 0, \quad E\left\{\frac{dx(0)}{dt}\right\} = 0, \\ E\left\{\frac{dx(0)}{dt} \cdot \frac{dx(0)}{dt}\right\} = a/2a \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

のもとに解くことができ、 x の期待値 η 、分散 R_{xx} 、分布関数 f_x を得る⁹⁾。

$$\eta(t) = E\{x(t)\} = 0 \dots (11)$$

$$R_{xx}(t) = E\{x(t)x(t)\} = \frac{a}{2a^3} (1 - e^{-at}) (2at - 1 + e^{-at}) \dots (12)$$

$$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}} \exp[-x^2/2\sigma^2(t)] \dots (13)$$

ここに、 a : n_x のパワースペクトル、 E は期待値演算

を示す。σ(t) は標準偏差で、この場合には R_{xx}(t) の平方根と一致する。なお、箭内³⁾は σ(z) について次の式を与えている。

$$\sigma(z) = c_1 \sqrt{d_s} \cdot \sqrt{z} \dots\dots\dots(14)$$

ただし、c₁ は比例定数である。式 (12) は t=z/w₀ を用いて次のように変形される。

$$\sigma^2(z) = \frac{\alpha}{2a^2} (1 - e^{-a \frac{z}{w_0}}) \left(2a \frac{z}{w_0} - 1 + e^{-a \frac{z}{w_0}} \right) \dots\dots\dots(15)$$

式 (15) で az/w₀ ≫ 1 とすれば

$$\sigma(z) = \sqrt{\frac{\alpha}{a^2 w_0}} \cdot \sqrt{z} \dots\dots\dots(16)$$

となり式 (14) と同じ形になる。これは次のことを示している。すなわち、ある地点を通過した粒子のちらばりは、通過点の近傍では式 (15) で示されるちらばり方 (σ が距離に比例) をするが、十分離れるとちらばりは近似的に式 (16) で示されることになる (図-2 参照)。式 (16) は式 (5) において慣性項を無視した解に対応する。

t が十分大きい状態 (t ≫ 1/a) では、次の式を得る。

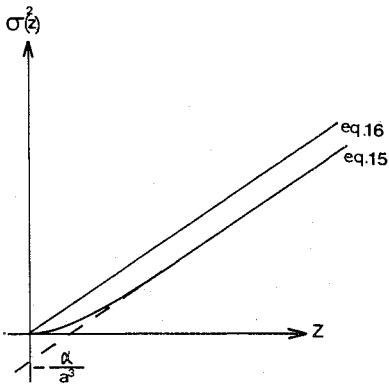


図-2 方程式 (15), (16) の比較

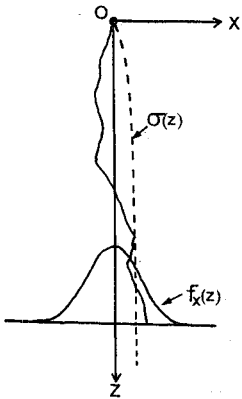


図-3 沈降する単粒子のちらばり (確率密度関数 f_x(z) (標準偏差 σ(z))

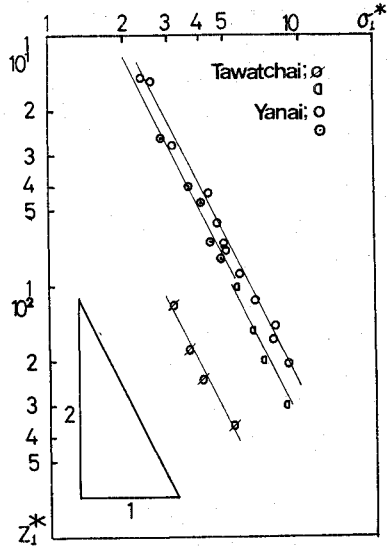


図-4 沈降する単粒子のちらばり (σ₁^{*}(z₁^{*}) ∝ √z₁^{*})

$$\eta(z) = E\{x(z)\} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

$$\sigma^2(z) = E\{(x-\eta)(x-\eta)\} \approx \frac{\alpha}{a^2} \cdot \frac{z}{w_0} \dots\dots(18)$$

$$f_x(z) = \frac{(a^2 w_0)^{1/4}}{(2\pi)^{1/2} (\alpha z)^{1/4}} \exp\left[-x^2 / \left(\frac{2\alpha z}{a^2 w_0}\right)\right] \dots\dots\dots(19)$$

これを図示したのが 図-3 である。α は作用力 n_x に関する未定係数で、理論的には定まらず、実験的に定める必要がある。図-4 は標準偏差 σ(z) が水深の平方根に比例することを示す実験結果^{3), 4)} である。ただし、粒径 d_s で無次元化してあり σ₁^{*}(z) = σ(z)/d_s、z₁^{*} = z/d_s である。図-5 は、式 (18) の σ(z) ∝ √z の比例係数に相当する α/a²w₀d_s と粒子レイノルズ数 R_d = w₀d_s/ν の関係を示したもので、箭内、Tawatchai の実験値を整理し直してプロットしたものである。同図より、粒子 R_d 数が 10~10³ の範囲では、σ₁^{*}(z₁^{*}) と √z₁^{*} の比例係数はほぼ一定値をとることがわかる。

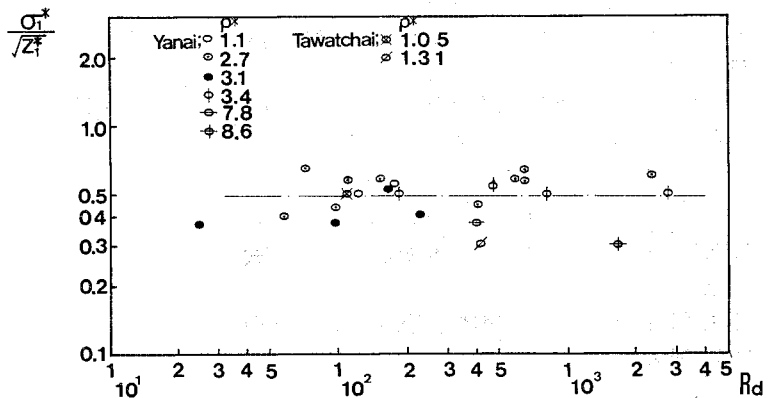


図-5 σ₁^{*}(z₁^{*}) ∝ √z₁^{*} の比例係数と R_d の関係

これは次のような理由によるものと思われる。この程度の粒子 R_e 数の領域では比較的大きな渦の剝離が生じ、その時に粒子に大きな作用力が働く。その平均的な大きさおよび作用時間をそれぞれ F および T とすれば、

$$\alpha \sim F^2 T / (m + \bar{m}')^2 \dots\dots\dots(20)$$

の関係が成立する。 F が ω_0 の 2 乗に比例するとし、その比例係数を C_L とおくと

$$\alpha \sim (\rho C_L A w_0)^2 T / (m + \bar{m}')^2 \dots\dots\dots(21)$$

となる。また、前述の定義より $a^2 = (\rho C_D A w_0)^2 / (m + \bar{m}')^2$ であるから、式 (18) は次のようになる。

$$\sigma^2(z) \sim (\overline{C_L A} / \overline{C_D A})^2 w_0 T z \dots\dots\dots(22)$$

球の後ろから剝離する渦のストローハル数の測定は Achenbach⁵⁾ によって広い R_d 数の範囲にわたって行われている。この研究によれば $100 < R_d < 1000$ の範囲で球のストローハル数 $S = n d_s / w_0$ はほぼ一定値をとり

$$T' = \frac{1}{n} \alpha \frac{d_s}{w_0} \dots\dots\dots(23)$$

となる。ここに、 n は単位時間当りに粒子から離脱する渦の数で、 T' は周期を示す。 $T' \sim T$ と考えれば、式 (22) は

$$\sigma^2(z) \sim (\overline{C_L A} / \overline{C_D A})^2 d_s z \dots\dots\dots(24)$$

となる。これは箭内が導いた式 (14) に相当する。粒子を球と仮定し式 (24) を粒径 d_s で無次元化し、係数 k を導入すると

$$\sigma_1^{*2}(z) = k (\overline{C_L} / \overline{C_D})^2 z_1^* \dots\dots\dots(25)$$

となる。 k は形状に関する比例係数である。図-5 に示すように、 σ_1^* と $\sqrt{z_1^*}$ の比例係数が粒子 R_e 数 $10 \sim 10^3$ の範囲でほぼ一定値をとるのは、 $\overline{C_L} / \overline{C_D}$ がこの範囲では粒子 R_e 数に依存しないためと思われる。このことは、二次元物体の $\overline{C_L} / \overline{C_D}$ がほぼ一定値をとることから類推することができる。

また、 z 方向の平均速度 w_0 は

$$w_0 = \frac{1}{dt} \int_t^{t+dt} \sqrt{\frac{F_{zi} + (m - m_0)g}{\rho C_{Di} A_i}} dt$$

であり、これについては G.A. Alger⁶⁾ らが詳細に実験的研究を行っている。

個別に投入した多数個の粒子の堆積は、単粒子沈降の解を重ね合わせることにより、次のように表わされる。

$$C(x, z) / C_m(0, z) = \exp[-x^2 / 2 \sigma^2(z)] \dots\dots(26)$$

ここに、 $\int_{-\infty}^{\infty} C(x, z) dx = Q_0$ 、 Q_0 : 投入量。すなわち、投入量がわかれば単位幅当りの堆積量 $C(x, z)$ が式 (26) より求まる。

円柱座標系 (r, θ, z) で確率密度関数を書くと、偏角 θ には無関係で

$$f_r(z) = \frac{1}{\sigma^2(z)} r \cdot \exp[-r^2 / 2 \sigma^2(z)] \dots\dots(27)$$

となる。ここに、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\tan \theta = y/x$ 。 $\sigma(z)$ は式 (15) で与えられる。

3. 連続的に投入された粒子の拡散

粒子が連続投入される場合には、粒子と流体および粒子間の相互干渉が問題となり、単粒子沈降に比較して現象は複雑になる。ここでは、粒子から剝離する渦による拡散に比較して流体の乱れ速度による拡散が無視しうるような、粒子 R_e 数がある程度大きく、粒子濃度が低い (ブシネスク近似が成立する程度) 場合を考察する。この場合には、連続投入したときの粒子のちらばりを単粒子沈降の結果から予測することが可能となる。

粒子を連続的に投入すれば、沈降する粒子と流体の相互作用の結果として平均的な流れの場が形成される⁷⁾。したがって、図-6 に示すように、粒子がある幅ちらばる間に、沈降する粒子によって誘起された平均流に乗って移動する距離だけ単粒子沈降の場合より余分に沈降する。その結果、この移流効果のために単粒子沈降に比較して拡散幅は減少する。

連続投入した粒子のちらばり幅は、二次元の場合には単粒子沈降のちらばりに関する式 (12) をもとにして、以下の仮定のもとで計算することができる。

仮定:

- (i) 平均流速 $U(x, z)$ の分布形は、
 $U(x, z) / U_m(0, z) = \exp[-x^2 / b_1^2(z)]$ 。
- (ii) 濃度 $C(x, z)$ の分布形は、
 $C(x, z) / C_m(0, z) = \exp[-x^2 / b_2^2(z)]$ 。
- (iii) 圧力分布は静水圧分布。
- (iv) 運動量の分散と粒子の分散は等しい。

— : Continuous drop
- - : Individual drop

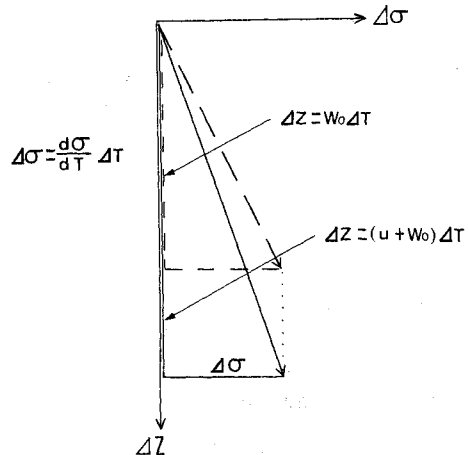


図-6 連続投入した粒子のちらばりモデル

$$b(z) = b_1(z) = b_2(z)$$

ここに、 b は標準偏差 σ の $\sqrt{2}$ 倍である。

計算には次の4つの関係式を用いる。

(1) 粒子の連続式

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_s C(U+w_0) dx = 0 \quad (28)$$

(2) 運動量式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \{ \rho(1-C)U^2 + \rho_s C(U+w_0)^2 \} dx \right] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_s - \rho) g C dx \quad (29) \end{aligned}$$

(3) ちらばりに関する式

式(12)を時間 t で微分すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\alpha}{2a^2} \right) \{ e^{-at} (2at - 3 + 2e^{-at}) \\ + (2 - e^{-at}) \} \quad (30) \end{aligned}$$

(4) 運動学的条件

単粒子沈降の場合には、 $dt = dz/w_0$ である。ところが粒子が平均流に乗って移動する場合には、

$$dt = dz/(u + w_0) \quad (31)$$

となり、単粒子沈降の場合と u の効果分だけ異なる。ここに、 u は代表速度であり、以下では平均流速 \bar{U} を用いて計算を行うことにする。流速分布を Gauss 分布で近似すると、流速は無限遠までゼロに収束しない。したがって、通常の意味での平均流速はゼロとなる(ただし、拡がり幅が無限度であり、平均流速と拡がり幅の積として求められる流量は有限である)。ここでは実質的な意味を考慮し、平均流速以下の流速による流量とそれを超過する流速 $(U - \bar{U})$ による流量が等しくなるように平均流速 \bar{U} を定義する。

式(28),(29)の積分を行い、無次元化すると次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz_1^*} \left\{ b^* C_m^* \left(\frac{1}{\sqrt{2}} U_m^* + 1 \right) \right\} = 0 \quad (28)' \\ \frac{d}{dz_1^*} \left\{ b^* \left(\frac{1}{\sqrt{2} C_0} U_m^{*2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho^* - 1) C_m^* U_m^{*2} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} \rho^* C_m^* U_m^* + \rho^* C_m^* \right) \right\} \\ = (\rho^* - 1) G_1^* C_m^* b^* \quad (29)' \end{aligned}$$

ここに、 C_0 : 基準濃度、 $G_1^* = gd_s/w_0^2$ 、 $U_m^* = U_m/w_0$ 、 $b^* = b/d_s$ 、 $\rho^* = \rho_s/\rho$ 、 $C_m^* = C_m/C_0$ 、 ρ_s : 粒子密度。

同様に、式(30)および(31)はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{d\sigma^*}{dt^*} = \frac{1}{2\sigma^*} \left(\frac{A^*}{2} \right) \{ e^{-T^*} (2T^* - 3$$

$$+ 2e^{-T^*}) + (2 - e^{-T^*}) \} \quad (30)'$$

$$dt^* = dz^*/(\bar{U}^* + 1) \quad (31)'$$

ここに、 $t^* = t \cdot \left(\frac{w_0}{d_s} \right)$ 、 $T^* = at$ 、 $A^* = \alpha/d_s a^2$ 、 $U^* = \bar{U}/w_0$ である。

式(28)'~(31)'を連立させて、連続投入時の粒子のちらばり幅を求めることができる。

図-7に実験値⁹⁾と解析結果の対応を示す。実験値は、Tawatchai が長さ 317cm、高さ 122cm、奥行 10cm の実験水槽を用いて行った実験結果である。この実験では、粒子は水槽と同じ奥行をもつ3つのスリット(幅 0.8cm、1.2cm、1.5cm)から流体中に投入された。粒子はホッパー内で水にひたされ、ホッパーの下端から空気を混入することなく流体中へ落下していき、スリットにより投入位置を固定された。測定は沈降する粒子濃度について行われ、撮影した写真から粒子の個数をよみと

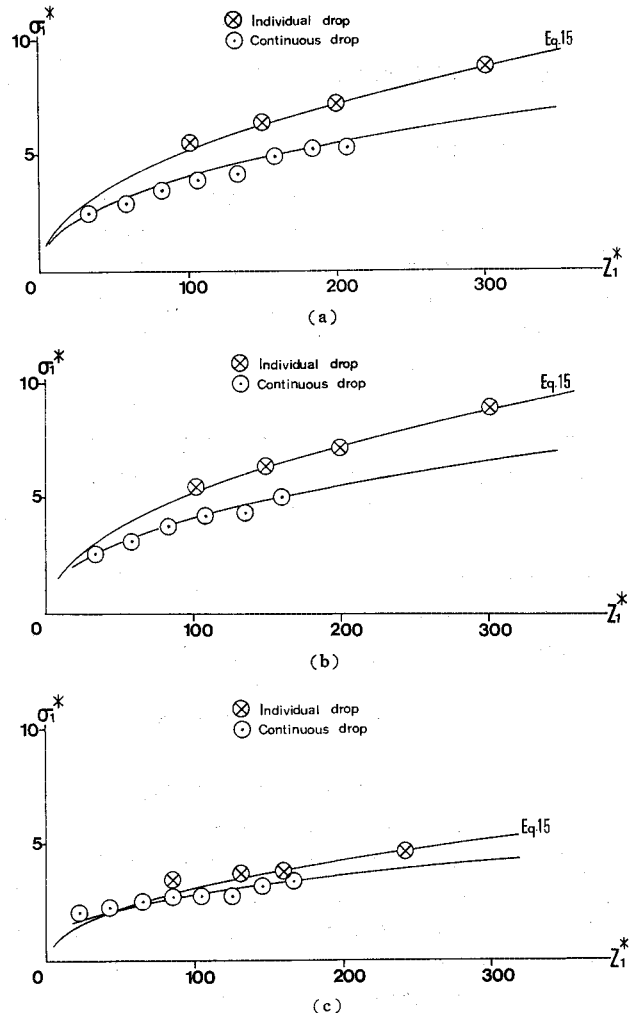


図-7 連続投入した粒子のちらばり

ることにより体積濃度が決定された。実験条件は

$$\begin{aligned} \text{図-7 (a): } & C(0, 0) = 0.356 \text{ cm}^3/\text{cc}, B_0 = 1.2 \text{ cm}, \\ & Q_0' = 0.35 \text{ cm}^3/\text{sec}, w_0 = 4.14 \text{ cm}/\text{sec}, \\ & d_s = 0.3 \text{ cm}, \rho^* = 1.05, \rho = 1.00 \text{ g}/\text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{図-7 (b): } & C(0, 0) = 0.0492 \text{ cm}^3/\text{cc}, B_0 = 1.2 \text{ cm}, \\ & Q_0' = 0.30 \text{ cm}^3/\text{sec}, w_0 = 4.14 \text{ cm}/\text{sec}, \\ & d_s = 0.3 \text{ cm}, \rho^* = 1.05, \rho = 1.00 \text{ g}/\text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{図-7 (c): } & C(0, 0) = 0.0178 \text{ cm}^3/\text{cc}, B_0 = 1.5 \text{ cm}, \\ & Q_0' = 0.284 \text{ cm}^3/\text{sec}, w_0 = 11.45 \text{ cm}/\text{sec}, \\ & d_s = 0.37 \text{ cm}, \rho^* = 1.31, \rho = 1.00 \text{ g}/\text{cm}^3 \end{aligned}$$

である。ここに、 B_0 : スリット幅、 Q_0' : スリットにおける粒子フラックス。なお、 Q_0' は沈降する粒子によって誘起される流れも考慮して求めた値である。

図-7 (a), (b), (c) より、単粒子沈降の結果を用いて、上述の方法で連続投入した粒子のちらばりを推定しうることがわかる。軸対称の粒子のちらばりについて、式 (27) を用いて同様の推定方法が考えられる。

4. 固-液混相鉛直噴流の流れと粒子の拡がり

(1) 従来の研究

固-液混相流は、水理学の分野では土砂流などに関連し古くから研究されてきているが、解決されるべき問題も多い。これらの問題のうちで流体と粒子の相互作用や拡散特性の違いを調べるには、固-液混相の鉛直噴流実験が、開水路の土砂浮遊流実験に比べて現象を単純化することができて有利である。固体粒子を混入する鉛直噴流は、通常密度差を有する forced plume と異なり、混入物の濃度のほかに粒子個々の性質をも考慮する必要がある。定性的には、濃度差（密度差）のために重力の作用を受けて鉛直方向の運動量が変化し、粒子は流体との密度の違いにより流体に対して相対速度をもつ。この平均的な相対速度は2種類考えられる。1つは流体の拡がりに追従できないために横方向に生じるもので、他は鉛直方向に生じるものである。後者には、主流の鉛直方向の速度変化により粒子の慣性のために生じるものと、粒子に作用する重力のために生じる相対速度（静水中では沈降速度）がある。

通常の噴流は、流れの特性から形成領域 (Zone of Flow Establishment) と確立領域 (Zone of Established Flow) にわけられる。固体粒子を含む鉛直噴流は、確立領域をさらに2つに分けて考える必要がある。噴流の出口に近い第1の領域では固体粒子の沈降速度が主流流速に比較して十分小さく、流体と粒子の相対速度は重要でない。第2の領域では、主流流速が距離とともに減少するために、沈降速度が相対的に重要となる。こ

の領域では、流体と粒子の相対速度および両者の相互干渉を考慮する必要がある。

第1の領域に関しては次の2つの研究が行われている。Brush⁹⁾ は、測定範囲を噴出口径の30倍程度に限定し、ガラスビーズを混入する軸対称鉛直噴流実験を行い、粒子と運動量の拡散係数の比がストークス領域に近づくにつれて1.0に近づき、粒径が増大するにつれて1.0より減少する結果を得た。しかし、この結果は従来土砂流などで見い出されていた関係と食い違っており¹⁰⁾、Brushの実験には疑問が多い。一方、Singamsetti¹¹⁾ は、Brushと同様な実験装置・方法で粒子レイノルズ数が0.3~50の砂混じり鉛直噴流の実験を行い、粒子拡散係数と運動量拡散係数の比がストークス領域での1.2から粒子レイノルズ数の増加とともに1.5まで増加することを示した。Singamsettiは、両者の拡散係数の違いを流体と粒子の密度が異なるために渦の中で受ける重力と慣性力に差が生じるためと考えた。しかし、いずれの研究も前述のごとく相対速度を考慮しておらず、流体と粒子の相互作用、すなわち、粒子濃度による鉛直方向への運動量増加も無視している。したがって、固-液混相噴流に特有の現象に十分な考察が加えられたとはいえない。

第2の領域に関する研究は著者らの知る限り存在しないようであり、本研究の目的を究明するためには第2領域での実験が必要である。

従来の密度差を有する鉛直噴流の研究は、前述の2つの研究を除けば、密度差のみを考慮すればよい液-液密度噴流について行われてきた。これらの plume は噴出口での密度フルード数で特性化が可能である¹²⁾。その解析法は、大別すると3つあり、次のように要約される。

a) 巨視的な解析:

- (i) 流速および濃度（密度）分布形を仮定し、運動量式、混入物の連続式および流体の連続式（連行係数を導入）を用いる方法。
- (ii) 流速および濃度（密度）分布形を仮定し、運動量式、混入物の連続式および拡がりに関する式を用いる方法。

b) 微視的な解析:

- (iii) 運動量式、流体の連続式および混入物の連続式を用い、運動量と混入物の拡散係数を定式化する方法。

これら3つの方法では、少なくとも2個のパラメータを実験的に定める必要がある。

ここで考察する現象も、粒子個々の性質を考慮することにより、類似の解析方法を用いることができる。粒子を混入する鉛直噴流が通常の plume と最も異なる点は混入物（粒子）が流体に対して相対速度をもつことであ

る。この相対速度の効果は、主流の拡がりや粒子の拡がりの差となって現われる。ここではこの点に着目し、主流および粒子の拡がりを定式化して運動量式および粒子の連続式と連立させる巨視的な解析を進め、二次元噴流について実験的検討を加えた。

(2) 理論的考察

理論的考察にあたり次のことを仮定する。

(1) 流れは完全に乱流状態で分子スケールの輸送混合は無視しうる。(2) 局所的な密度差は周囲の流体の密度に比較して小さい。(3) 境界層近似が成立し、水平断面内は一定圧力である。さらに、実験的事実を導入して、時間的に平均化された流速および濃度は Gauss 分布で近似されるものとする。座標系を図-8 のようにとる。

まず、2., 3. の考え方を拡張して粒子の拡がりに関する式を誘導する。2., 3. と異なり、この場合の粒子を拡散する主要因は粒子から離脱する渦よりも噴流内の変動速度である。流れの拡がりは、乱流境界層や乱流タイプの伴流(後流)の場合と同様に¹³⁾ Euler 的に次の関係を満足すると考えられる。

$$\frac{db_1(z)}{dz} \sim \frac{\sqrt{v'^2}}{u} \dots\dots\dots(32)$$

すなわち流れの拡がりは、 x 方向の乱れ速度の 2 乗平均 $\sqrt{v'^2}$ に比例し、 z 方向速度に反比例する。同様に、粒子の拡がりに関して次式を得る。

$$\frac{db_2(z)}{dz} \sim \frac{\sqrt{v'^2}}{u+w_0} = \frac{\sqrt{v'^2}}{u(1+w_0/u)} \dots\dots\dots(33)$$

すなわち、粒子のちらばり幅はその原動力 $\sqrt{v'^2}$ に比例し、鉛直方向の速度と沈降速度の和に反比例する。ここに u は代表速度である。以下では、3. と同様に $u = \bar{U}$ (平均流速) として考察を進める。Corrsin¹⁰⁾ らの噴流内の乱れの測定によれば、 $\sqrt{v'^2}/u$ は全断面にわたりほぼ一定値をとる。したがって、式 (32), (33) の比例係数をそれぞれ β_1, β_2 とおき、3. の \bar{U} の定義を用いて数値計算より求めた $\bar{U}/U_m(0, z) \doteq 0.532$ を考慮すれば次の式を得る。

・流れ(運動量)の拡がり:

$$\frac{db_1^*}{dz^*} = \beta_1 \dots\dots\dots(34)$$

・粒子の拡がり:

$$\frac{db_2^*}{db_1^*} = r \frac{1}{1+1.88 \left(\frac{1}{U_m^*} \right)} \dots\dots\dots(35)$$

ここに、 $r = \beta_2/\beta_1$, $b_1^* = b_1/D$, $b_2^* = b_2/D$, $U_m^* = U_m/w_0$, $z^* = z/D$, D : 噴出口幅である。 β_1, r は理論的には

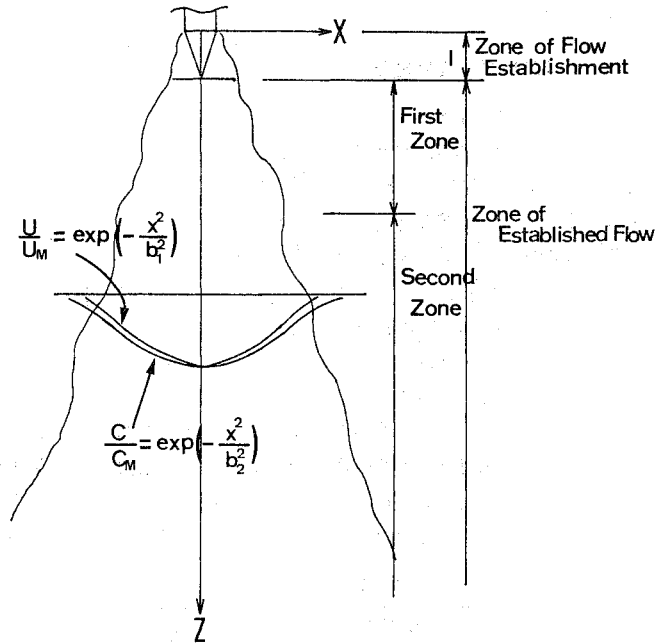


図-8 鉛直混相噴流の模式図

定まらず、実験的に定める必要がある。

次に、運動量式および粒子の連続式はそれぞれ次のようになる。

粒子の連続式:

$$\frac{d}{dz} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \rho_s C (U+w_0) dx \right\} = 0 \dots\dots\dots(36)$$

運動量式:

この場合も運動量式は式 (29) で表わされるが、仮定 (2) より $\rho_s C \ll \rho$ であり、 $U_m^* \ll 1$ でなければ

$$\frac{d}{dz} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \rho U^2 dx \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_s - \rho) g C dx \dots\dots(37)$$

となる。

両式を積分し無次元化すると

$$\frac{d}{dz^*} \left\{ U_m^{*2}(0, z^*) C_m^*(0, z^*) \frac{b_1^*(z^*) b_2^*(z^*)}{\sqrt{b_1^{*2}(z^*) + b_2^{*2}(z^*)}} + C_m^*(0, z^*) b_2^*(z^*) \right\} = 0 \dots\dots\dots(36)'$$

$$\frac{d}{dz^*} \{ U_m^{*2}(0, z^*) b_1^*(z^*) \} = \sqrt{2} C_0 b_2^*(z^*) (\rho^* - 1) G^* C_m^*(0, z^*) \dots\dots\dots(37)'$$

となる。

ここに、 $\rho^* = \rho_s/\rho$, $G^* = gD/w_0^2$, $C_m^* = C_m/C_0$, C_0 : 基準濃度である。

与えられた境界条件のもとで式 (34), (35), (36)', (37)' を連立させて解を得る。なお、この解は $w_0 \rightarrow 0$ とすれば密度噴流に関する Lee ら¹⁵⁾ の解と一致することはいうまでもない。計算結果を実験値とともに 図-12

～16 に示す。

(3) 実験装置と実験結果

実験装置を図-9に示す。用いた水槽は、長さ10m、深さ2.0m、幅0.4mの片面ガラス張り鋼製水槽である。水槽中央部3m区間の奥行をペンキ塗り防水ベニヤ板で0.1mに縮め、その中心部に0.3cm×10cmの断面をもつ二次元スリットを水面下50cmの位置に固定した。仕切りベニヤ板の両端は開いており、両端からの水の通過は自由である。そのために水槽全体が貯水槽の役目を果たし、噴流によって水槽内に認め得る回転流は生じなかった。噴流中の混入土砂量一定の条件は、ドリル式土砂供給装置に

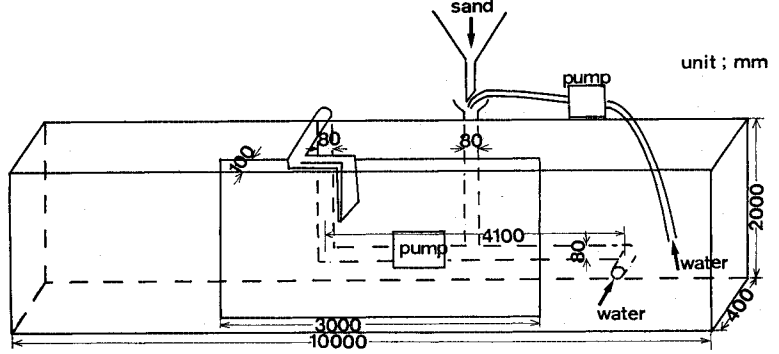


図-9 実験装置

よって満たされた。この装置は、ホッパーから供給された乾燥砂をシリンダーに導き、これをシリンダー内で一定速度で回転するドリルが押し出す形式のものである。給砂装置を出た乾燥砂は、水とともにポンプで一様に混合され、スリットから静水中へ放出される。実験は、図

表-1 実験条件

Run	Sand	Conditions at the slit		Densimetric Froude No. F_d	Falling Velocity (average) w_0 (cm/s)
		$Q_{sand} + Q_{fluid}$ (cm ³ /s)	Q_{sand} (cm ³ /s)		
1	Momentum jet	100	0		
2		300	0		
3		700	0		
4		1300	0		
5	A	300	2.70	48.6	15
6		700	2.70	166	
7		1300	2.70	438	
8	B	300	2.70	48.6	5
9		700	2.70	166	
10		1300	2.70	438	
11	C	260	1.97	68.9	0.003

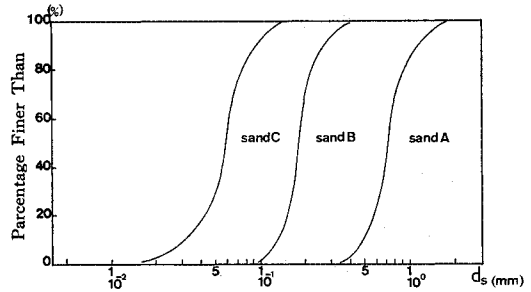


図-10 粒度分布曲線

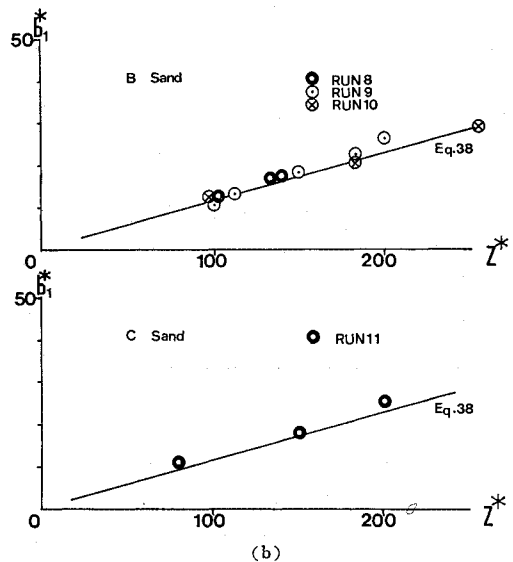
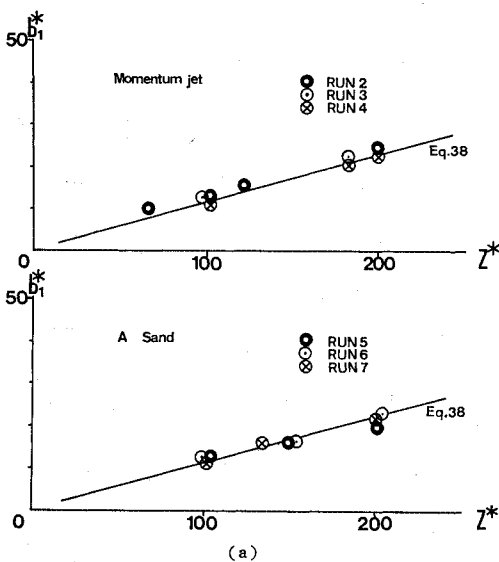


図-11 運動量の拡がり

—10 の粒度分布特性をもつ 3 種類の砂を用い、表—1 に示す条件で行った。平均流速は、フォトランジスター付プロペラ流速計を用いて 2 分 30 秒間計測し、その平均値をとった。粒子濃度は、サイフォンで約 2000 cc サンプルングし、乾燥重量より体積濃度を求めた。水路奥行方向への流速分布・濃度分布を測定し、噴流の二次元性を確認したうえで本実験を行った。

図—11, 12 に $b_1^* \sim z^*$, $b_2^* \sim z^*$ の測定結果を示す。代表的な流速分布、濃度分布、中心軸流速および中心軸濃度を 図—13~16 に示す。

(4) 実験結果の考察

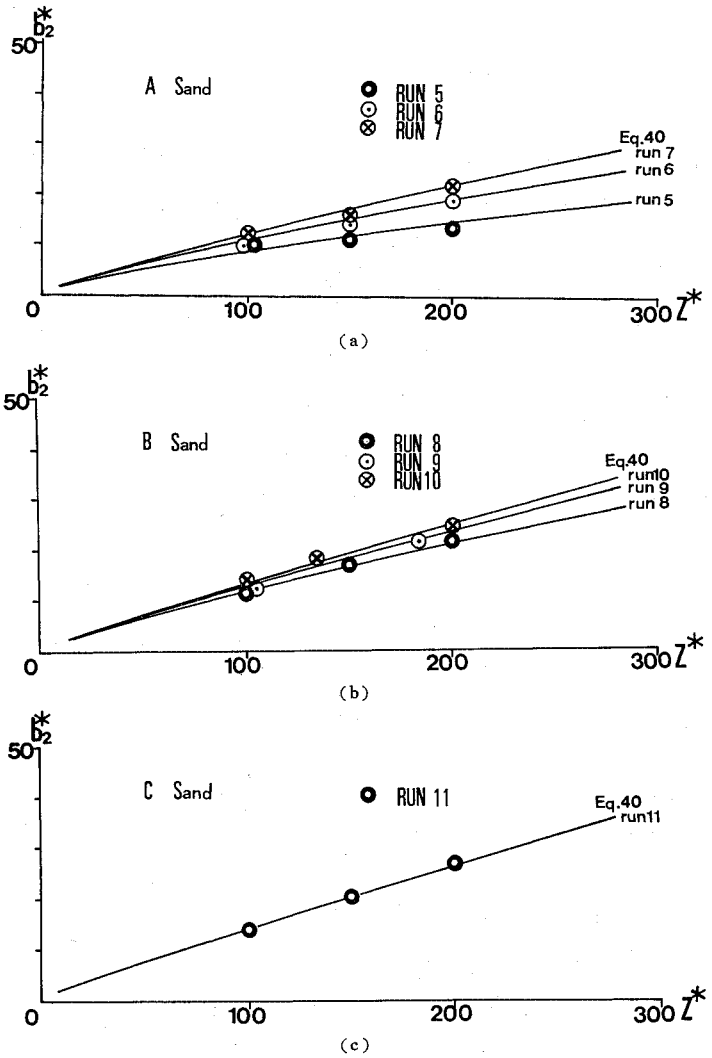
a) 流速および濃度分布

流体より密度の大きい固体粒子を混入する鉛直噴流においても、流速はガウス分布に従い、固体粒子の濃度分布もガウス分布で近似できる (図—13, 14)。

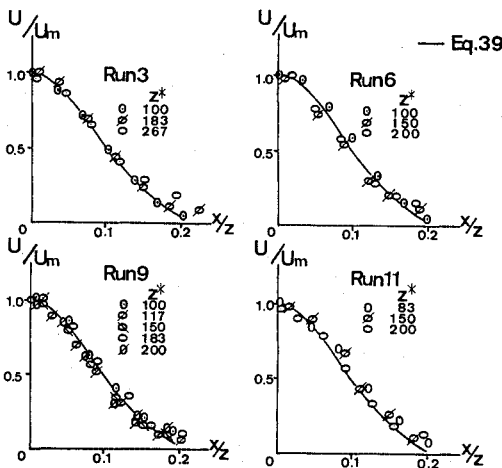
b) 運動量の拡がり

運動量の拡がりを $b_1 = \sqrt{2}\sigma$ で定義し、噴出口幅 D で無次元化表示してプロットしたものが 図—11 である。図—11 より密度 (内部) フルード数 $F_d = U_m(0, 0) / \sqrt{C_m(0, 0)} (\rho^* - 1) g D$ が 50 以上では、 db_1^*/dz^* はほぼ定数で 0.11~0.12 であることがわかる。

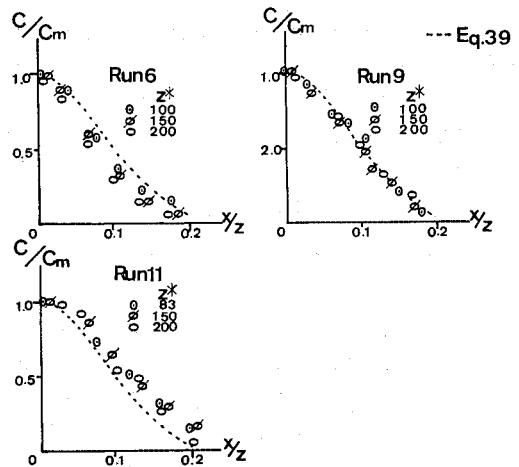
$$\frac{db_1^*}{dz^*} \doteq 0.115 \dots\dots\dots(38)$$



図—12 粒子の拡がり



図—13 流速分布



図—14 濃度分布

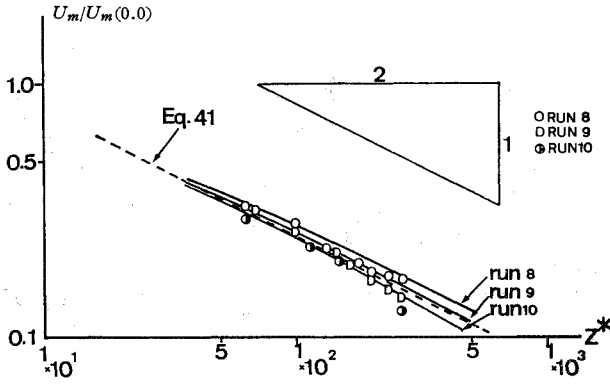


図-15 中心軸流速

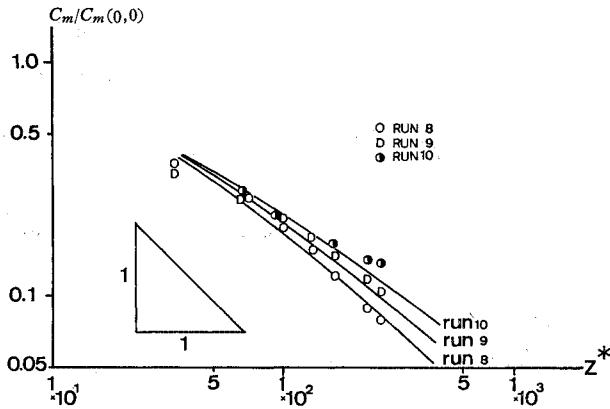


図-16 中心軸濃度

式 (38) の関係を用いると、流速分布形は

$$\frac{U(z, x)}{U_m(z, 0)} = \exp\left(-\frac{76 x^2}{z^2}\right) \dots\dots\dots(39)$$

となる。これは、Zijnen¹⁶⁾ が空気流による二次元鉛直ジェットに対して見出した分布形と同じである。図-13 に式 (39) と実験値の対応を示す。

c) 固体粒子の拡がり

式 (35) が示すように、粒子の拡がりは、沈降速度と噴流の中心流速によって支配される。式 (35) の係数 r は、 $U_m^* \gg 1$ の条件を満たすC砂に関する実験結果 (図-11 および 図-12 (c)) より決定することができ、 $r = 1.15$ を得る。

したがって次式を得る。

$$\frac{db_2^*}{db_1^*} = 1.15 \frac{1}{1 + 1.88 \left(\frac{1}{U_m^*}\right)} \dots\dots\dots(40)$$

A および B 砂では、沈降速度の影響が効いてくるために、同一の密度フルード数 F_d では C 砂より拡がり幅は小さくなる (図-12, 14 参照)。図-12 には、式 (36)', (37)' および式 (38), (40) より求めた粒子の拡がり幅の理論値と、濃度分布から求めた粒子の拡がり幅 (実験値) との比較を示す。 $F_d = 50 \sim 500$ の範囲では、理論と実験

の対応はよいといえる。 $U_m^* \ll 1$ の場合には、3. で示した方法で拡がり幅を説明することができない。なお、従来から多くの報告^{7), 9), 11), 15)} がなされているにもかかわらず、 r は未決定のパラメーターとして残されている。本実験では $r = 1.15$ を得たが、これは後に述べる大スケールの渦とも関係すると考えられ、今後さらに検討を要する問題である。また、式 (40) の比例係数 r は粒子が慣性のため流体の横方向への拡がりに追従しきれないことにより変化すると考えられるが、その効果は沈降速度の効果に比べて小さいと考え、本研究では $r = \text{const.}$ とし て計算を進めた。

d) 中心軸流速

中心軸流速を図-15 に示す。式 (36)', (37)', (38), (40) より求めた中心流速と実験値の比較も同図上に示す。図より $U_m(0, z)/U_m(0, 0)$ の値は F_d が小さいほど大きい。これは、式 (34), (37) から明らかのように、固体粒子を混入しても運動量の拡がり幅がほとんど変化せず、粒子に作用する重力によって運動量が増加する分だけ流速が大きくなるためである。

実験結果より $F_d > 50$ では、中心流速は近似的に

$$\frac{U_m(0, z)}{U_m(0, 0)} = \sqrt{\frac{8D}{z+l}} \dots\dots\dots(41)$$

で与えられることがわかる。ここに、 l は Potential core の長さである。中心軸流速として式 (41) を用いると、式 (38), (41) を式 (40) に代入して粒子の拡がり幅の関係式

$$\begin{aligned} \frac{db_2^*}{dz^*} &= 1.15 \frac{1}{1 + 0.66 \frac{w_0}{U_0} \sqrt{\frac{z+l}{D}}} \cdot \frac{db_1^*}{dz^*} \\ &= \frac{0.13}{1 + K \sqrt{z^* + l^*}} \end{aligned}$$

を得る。ここに、 $K = 0.66 w_0/U_0$, $l^* = l/D$ である。上式を積分することにより、スリット幅よりオーダー的に大きな z に対して、次の拡がり幅に関する式を得る。

$$b_2^* = \frac{0.28}{K^2} [K \sqrt{z^*} - \ln(1 + K \sqrt{z^*})] \dots\dots(42)$$

式 (42) と実験値との対応を図-17 に示す。両者の対応は広い範囲の F_d の値に対してよい。

e) 中心軸濃度

中心軸濃度の実験値 および式 (36)', (37)', (38), (40) より求めた解析結果を図-16 に示す。両者の対応はほぼ満足しうるものである。

f) 噴流中の大スケールの渦

噴流の出口近傍では、軸方向の運動が卓越しており主

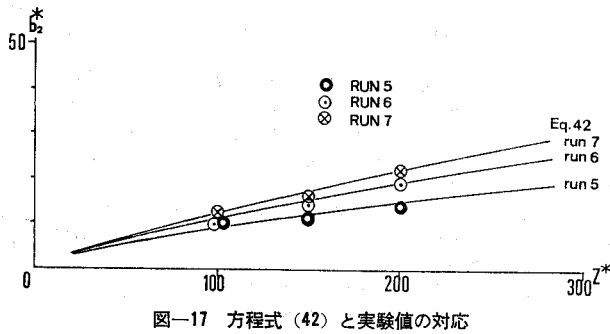
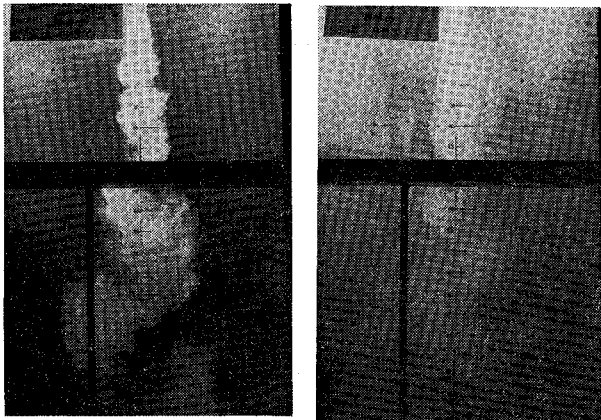


図-17 方程式 (42) と実験値の対応



$F_d=9.25, Q_f+Q_s=100 \text{ cm}^3/\text{sec}$
 $Q_s=2.7 \text{ cm}^3/\text{sec}$ $F_e=124, Q_f+Q_s=700 \text{ cm}^3/\text{sec}$
 $Q_s=2.7 \text{ cm}^3/\text{sec}$

図-18 噴流中に見出される大きな渦

流の揺動は小さい。しかし、ある程度流下したところでは、図-18の写真が示すように、大規模な渦運動が観察される。この渦は、噴流の幅程度のスケールをもち、互いに反対方向の回転をしながら順次通過する。これは Laufer¹⁷⁾らの主張する quasi-ordered structure の大きなスケールの eddy に対応し、決定論的な性格をもち、確率的な性格をもつ fine-scale structure の eddy と区別されるべきものである。流れの可視化を行うと、固体粒子（混入物）の拡散に及ぼす大スケールの渦の役割りはきわめて重要と思われるので、渦の大きさ、周期などの定量的な測定を行い、次の機会に報告したいと考えている。

5. 結 論

重力場で鉛直方向に投入された粒子の拡散現象を、種々の投入条件のもとで解析した。

個別投入される粒子の拡散は、粒子から間欠的に離脱する渦に注目し、粒子の運動方程式を用いて解析した。この方法は、拡散方程式を用いる方法に比較して現象を支配する要因が明確になるという利点がある。解析結果

には一個の未定係数が含まれており、実験値からその値を定めた。この結果を用いることにより、粒子 R_0 数が $10 \sim 10^3$ の単粒子のちらばりを推定することが可能である。

連続投入される粒子の拡散は、粒子と流体および粒子間の相互作用が問題となる。3. では、粒子濃度が低く、粒子間の相互作用が無視できる場合について、流体と粒子間の作用を沈降する粒子によって誘起される平均的な流れの場としてとらえ、単粒子沈降の結果を用いて粒子のちらばりを解析した。この解析においては流体の乱れ速度による拡散を無視しているが、粒子濃度が高くなるとこの効果は無視し得なくなる。その場合には、固-液噴流と同様の解析を行う必要がある。

固-液混相噴流では、粒子を拡散する主要因は流体の乱れ速度である。4. では、粒子と流体の相対速度を考慮した式 (35) を用いることにより、通常の密度噴流と類似の解析法を用いた。

なお、二次元噴流の実験において大スケールの渦運動を観測したが、これは渦の二重構造として興味ある現象であり、固体粒子（混入物）の拡散と深い関わりがあるので今後検討を要する問題である。

謝辞：本研究の遂行にあたり、実験に多大の勞を煩わした東洋建設（株）森山越郎氏（当時東京工業大学学生）に感謝の意を表します。なお、本研究の一部は昭和 50 年度文部省科学研究費（一般研究 A）によったことを付記します。

参 考 文 献

- 1) Goldstein, S. : Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. II, Oxford, Oxford University Press, 1938.
- 2) Willmarth, W.W., Hawk, N.E. and Harvey, R.L. : Steady and Unsteady Motions and Wakes of Freely Falling Disks, The Physics of Fluids, Vol. 7, No. 2, 1964.
- 3) 箭内寛治：砂および礫の水中落下のちらばりに関する研究，土木学会論文集第 69 号，1960.
- 4) Tawatchai, T. : Gravitational Convection, thesis No. 336, Asian Institute of Technology, Thailand, 1970.
- 5) Achenbach, E. : Vortex Shedding from Spheres, J. Fluid Mech. Vol. 62, Part 2, 1974.
- 6) 吉川勝秀：固-液混相流における流体と固体粒子の相互作用に関する研究，東京工業大学修士論文，1976.
- 7) 谷 一郎：流れ学，岩波書店，1967.
- 8) Alger, G.R., Simons, D.B. : Falling Velocity of Irregular Shaped Particles, Jour. of Hydraulics Div., Proc. ASCE, 1968.
- 9) Brush, L.M. Jr. : Explanatory Study of Sediment Diffusion, Jour. of Geophysical Res., Vol. 67, No. 4, 1962.
- 10) Raudikivi, A.J. : Loose Boundary Hydraulics, Pergamon Press, 1967.

- 11) Singamsetti, S.R. : Diffusion of Sediment in a Submerged Jet, Jour. of Hydraulics Div., Proc. ASCE, Vol. 92, No. HY. 2, 1966.
- 12) 土木学会水理委員会密度流研究小委員会：成層密度流の界面現象 (2), 土木学会論文報告集, No. 243, 1975.
- 13) Landau, L.D. and Lifshitz. E.M. : Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1963.
- 14) Corrsin, S. and Kistler, A.L. : Free-Stream Boundaries of Turbulent Flows, NACA Tech. Rep. 1244, 1955.
- 15) Lee, S. and Emmons, H.W. : A Study of Natural Convection above a Line Fire, J. Fluid Mech. Vol. 11, Part 3, 1961.
- 16) Zijnen, V.D.H. : Measurements of the Velocity Distribution in a Plane Turbulent Jet of Air, Appl. Sci. Res. A, Vol. 7, 1958.
- 17) Laufer, J. : New Trend in Experimental Turbulence Research, Annual Review of Fluid Mech., Vol. 7, 1975.
- 18) Papoulis, A. : Probability Random Variables and Stochastic Processes, McGraw Hill Inc., 1965.
- 19) Feller, W. : An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Willey & Sons Inc., 1966.
- 20) 吉川秀夫・福岡捷二・吉川勝秀：静水中を落下する粒子の拡がりについて，土木学会第30回年次学術講演会講演概要集，1975.
- 21) 吉川秀夫・福岡捷二・吉川勝秀：流体中を沈降する粒子の拡散，第20回水理講演会論文集，1976.

(1976.8.24・受付)