

有限要素により任意の断面形状をした棒中の
弾性波を解析する手法FINITE ELEMENT TECHNIQUE FOR THE ANALYSIS OF ELASTIC
WAVES IN PRISMATIC BARS OF ARBITRARY CROSS SECTION秋 田 宏*
By Hiroshi AKITA

1. ま え が き

応力波解析の手法は広く衝撃、地震波、さらには水理学的波動、音波、電磁波などの問題に応用できるものと考えられる。本稿は、もっとも基本的な例である均質で弾性的な無限に長い棒中の応力波を、有限要素を用いて解析する手法について述べるものである。

無限に長い棒中の弾性波に関しては、Pochhammer と Chree が円形断面についての厳密解を導き¹⁾、Lamb が無限板についての厳密解を求めた²⁾。ここで無限板は棒ではないが、縦波 (Longitudinal wave) を扱う限りは無限長円形断面棒と数学的に相似である。すなわち、進行方向に sine 波動を仮定して運動方程式を変数分離すると、いずれの場合も進行方向に垂直な 1 変数の常微分方程式が得られ、境界条件を満足する解がそれぞれよく知られた、三角関数と双曲線関数、0 階と 1 階の Bessel 関数で表わされる³⁾。

ところが、長方形断面棒となると変数分離した後も 2 変数の偏微分方程式であり、2 組の面における境界条件を同時に満足する解は一般には求められない。Mindlin らは三角関数を用いて特別な波長に対応する解を求めたが、同時に一般的な解が簡単な関数の有限項では表わしえないことを示した⁴⁾。したがって、その後の研究は各種の近似解法に向けられ、Legendre の多項式を用いた Medick の 1 次元化理論⁵⁾、べき関数を用いた Nigro の変分法⁶⁾、Bessel 関数を用いた Fraser のコロケーション法⁷⁾などがある⁷⁾。Fraser らは、さらに同法により三角形断面に対する近似解も求めている⁸⁾。

さて、変数分離によって 2 次元問題に帰着するのであれば、半解析的有限要素法⁹⁾と類似の考え方により任意の断面形状についての数値解が得られるはずである。事実 Aalami がそのような手法を提案し¹⁰⁾、正方形断面

と円形断面に適用した例を示している。著者は Aalami とは独立に同じ手法を研究してきたが^{11), 12)}、基本式の誘導過程、解析の対象が異なり¹³⁾、また彼の結論に対して補足すべきことがらも見出し出している^{14), 15)}。したがって、それらと比較しながら、彼の論文では触れていないことがら、特に 2 次要素¹⁶⁾による解析例を中心に述べたい。

2. 運動方程式の 2 次元化

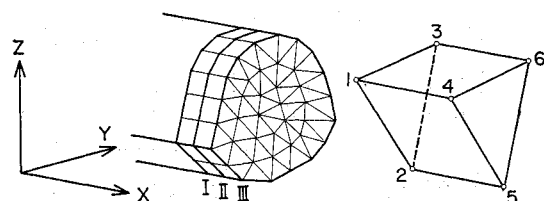
この節では、3 次元の波動現象が変数分離によって実質的に 2 次元問題に帰着する過程を説明する。これは Aalami が変分原理を用いて手際よく導いたことを、有限要素法の実的な概念を用いて解りやすく示したものにほかならない。

棒の軸を x 軸とするデカルト座標をとり、変位の各成分を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= U(y, z) e^{i(\omega t - \kappa x)} \\ v &= iV(y, z) e^{i(\omega t - \kappa x)} \\ w &= iW(y, z) e^{i(\omega t - \kappa x)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の変位成分、 i は虚数単位、 U, V, W は y, z のみの関数で未知のもの、 ω は角振動数、 t は時間、 κ は波数、 e は自然対数の底である。変位成分 v, w に対して $\pi/2$ の位相差を考慮した理由について、Aalami や Nigro の論文では触れていないが、本稿では付録 A に簡単に示す。

図一のように、 x 軸に垂直で等間隔な断面 I, II, III



図一 座標、分割、要素

* 正会員 工修 東北工業大学助教授 工学部土木工学科

を考え、これらの面にはさまれている棒の部分を三角柱要素により分割する。簡単のため1次要素¹⁰⁾で考えると、1つの要素の節点数は6であるから要素の節点変位ベクトルも要素の節点力ベクトルも18成分となる。

いまⅡ面上の各節点に対して運動方程式を導くものとする。まずⅡ,Ⅲ断面間の要素に着目すると、要素の節点変位ベクトルは式(1)から次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ iu_2 \\ iu_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ iu_9 \\ (a-bi)u_1 \\ i(a-bi)u_2 \\ i(a-bi)u_3 \\ (a-bi)u_4 \\ \vdots \\ i(a-bi)u_9 \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - \kappa x)} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、Ⅱ,Ⅲ面間の距離を d 、Ⅱ面で位相を $e^{i(\omega t - \kappa x)}$ とすれば、Ⅲ面で位相は $e^{i(\omega t - \kappa(x+d))} = e^{-i\kappa d} \cdot e^{i(\omega t - \kappa x)}$ となるので $e^{-i\kappa d} = a-bi$ とおいた。Ⅱ面上の節点に関する運動方程式を考えているので、節点力はⅡ面上の節点についてだけ必要であり、算式は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ \vdots \\ f_9' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & \dots & k_{1,18} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & \dots & k_{2,18} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & \dots & k_{3,18} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{9,1} & k_{9,2} & k_{9,3} & \dots & k_{9,18} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ iu_2 \\ iu_3 \\ \vdots \\ iu_9 \\ (a-bi)u_1 \\ i(a-bi)u_2 \\ i(a-bi)u_3 \\ \vdots \\ i(a-bi)u_9 \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - \kappa x)} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $f_1' \sim f_9'$ は要素の節点力ベクトル成分のうちⅡ面上の節点に対応する部分、 $k_{1,1} \sim k_{9,18}$ は要素の剛性マトリックス成分のうち必要な部分を表わす。このマトリックス算式を実数部分からなる節点変位ベクトルで表わせるように書きかえる。すなわち

$$\begin{Bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ \vdots \\ f_9' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1}' & k_{1,2}' & \dots & k_{1,9}' \\ k_{2,1}' & k_{2,2}' & \dots & k_{2,9}' \\ k_{3,1}' & k_{3,2}' & \dots & k_{3,9}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{9,1}' & k_{9,2}' & \dots & k_{9,9}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_9 \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - \kappa x)} \dots\dots\dots (4)$$

ここでは剛性マトリックスの各成分は複素数であり、元の剛性マトリックス成分との関係は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} k_{1,1}' &= k_{1,1} + (a-bi)k_{1,10} \\ k_{1,2}' &= ik_{1,2} + i(a-bi)k_{1,11} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

まったく同様のことを対応するⅠ,Ⅱ面間の要素について行えば、要素の剛性マトリックスは同一で下半分のみが必要となる。

$$\begin{Bmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \\ \vdots \\ f_9'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{10,1} & k_{10,2} & k_{10,3} & \dots & k_{10,18} \\ k_{11,1} & k_{11,2} & k_{11,3} & \dots & k_{11,18} \\ k_{12,1} & k_{12,2} & k_{12,3} & \dots & k_{12,18} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{18,1} & k_{18,2} & k_{18,3} & \dots & k_{18,18} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (a+bi)u_1 \\ i(a+bi)u_2 \\ i(a+bi)u_3 \\ \vdots \\ i(a+bi)u_9 \\ u_1 \\ iu_2 \\ iu_3 \\ \vdots \\ iu_9 \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - \kappa x)} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $f_1'' \sim f_9''$ は要素の節点力ベクトル成分のうちⅡ面上の節点に対応する部分、 $k_{10,1} \sim k_{18,18}$ は要素の剛性マトリックス成分のうち必要な部分を表わす。式(4)と同様に整理すると、両方の要素からの寄与を考慮した節点力は両者の和

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ \vdots \\ f_9' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \\ \vdots \\ f_9'' \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

となり、結局剛性マトリックスも加算されて次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,9} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,9} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & \dots & K_{3,9} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{9,1} & K_{9,2} & \dots & K_{9,9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_9 \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - \kappa x)} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $f_1 \sim f_9$ はⅡ面上で両側の要素からの寄与を考慮した節点力ベクトルの成分、 $K_{1,1} \sim K_{9,9}$ は新しい剛性マトリックスの成分で元の剛性マトリックス成分との関係は

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= k_{1,1} + (a-bi)k_{1,10} + (a+bi)k_{10,1} + k_{10,10} \\ K_{1,2} &= ik_{1,2} + i(a-bi)k_{1,11} + i(a+bi)k_{10,2} + ik_{10,11} \\ K_{1,3} &= ik_{1,3} + i(a-bi)k_{1,12} + i(a+bi)k_{10,3} + ik_{10,12} \\ &\vdots \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

である。

式(8)はⅡ面上だけの節点変位と節点力の関係を表わしており、実質的に2次元問題に帰着したことになる。この剛性マトリックスは、1,4,7行がすべて実数、その

ほかの行はすべて純虚数であり、これは節点変位成分に対応する節点力成分が同位相であることを示すもので、弾性範囲で考えているため当然の結果である。なお、実際にこの剛性マトリックスの成分がそうなることは、元の剛性マトリックスにおける三角柱要素の対称性から容易に知られるが、付録 B にゆずる。

まったく同様の過程を質量マトリックスについても行い、さらに全体の剛性マトリックス、全体の質量マトリックスを組み立てた後の運動方程式を個別に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{aligned}
 &K_{1,1}'u_1' + K_{1,2}'u_2' + \dots \\
 &\quad -\omega^2(M_{1,1}'u_1' + M_{1,2}'u_2' + \dots) = 0 \\
 &i\{K_{2,1}'u_1' + K_{2,2}'u_2' + \dots \\
 &\quad -\omega^2(M_{2,1}'u_1' + M_{2,2}'u_2' + \dots)\} = 0 \\
 &i\{K_{3,1}'u_1' + K_{3,2}'u_2' + \dots \\
 &\quad -\omega^2(M_{3,1}'u_1' + M_{3,2}'u_2' + \dots)\} = 0 \\
 &\quad \vdots \\
 &\dots\dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

ただし、 $K_{1,1}'\sim, M_{1,1}'\sim, u_1'\sim$ はそれぞれ全体の剛性マトリックス、全体の質量マトリックスおよび全体の節点変位ベクトルの成分であり、振動項 $e^{i(\omega t - \kappa x)}$ は省略した。

式 (10) においては i を省略できるので、結局実数係数の固有値問題に帰着したことになる。すなわち、有限要素法の定式化の過程で変数分離した Aalami の手法に対し、定式化されたものに変数分離を用いた点異なるが、最終的には同一の結果が得られた。この固有値問題をたとえばべき乗法などで解けば、固有値から位相速度が、固有ベクトルから節点変位が、さらに節点変位から応力が計算できる。

3. 1 次要素と 2 次要素の比較

ここに述べた手法の妥当性を確かめるために、Lamb により厳密解が与えられている無限板中の弾性波に対して同法を適用してみた。座標、分割（ただし x 方向に 5 列に分割した場合）は図-2 の通りである。 x 軸を波の進行方向、 z 軸を板厚方向とすれば現象は y 方向に同一であり、 $z=0$ の面に対して対称（縦波の場合）であるから、図のように一部分だけを分割すればよい。境界条件は $z=0$ の面上で $w=0$ である。材質は鋼を想定してヤング率 $E=2.1 \times 10^{12}$ dyne/cm²、ポアソン比 $\nu=0.29$ 、密度 $\rho=7.85$ gr/cm³ を用いた。

図-3 は縦波の低次 5 分枝に対する無次元化された位相速度曲線である。ここで H は板厚の半分、 λ は波長、 C は位相速度、 C_L は波長が無限大の時の位相速度を表わす。以下の図では、実線が Lamb による厳密解

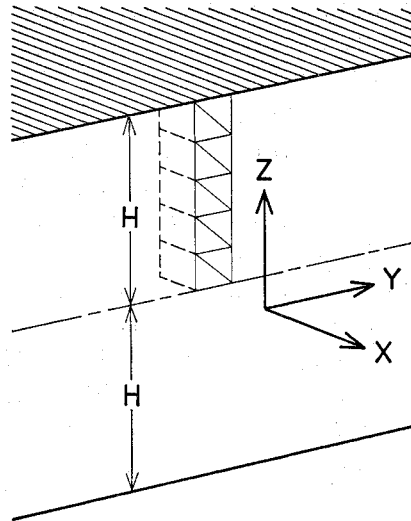


図-2 無限板の分割

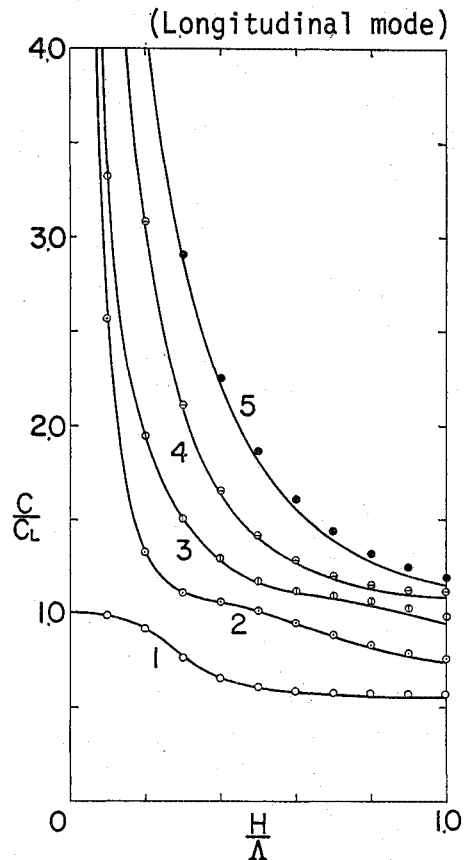


図-3 位相速度曲線（縦波）

を、種々の丸印は本法による計算値を、数字は分枝の番号を表わしている。理論値と計算値はよく一致しており、図示された範囲での相対誤差の最大は 4.45% である。理論値とのずれは一般に高次の分枝となるにしたが

い、また H/Λ が大きくなるにしたがって顕著になるのが認められる。後に図示されるように、この理由はおもに要素内の変位の変動がより大となるためと考えられ、予想された結果と言える。

Aalami は正方形断面を対象とし、位相速度と変位分布の概形のみを扱ったため、1次要素を用いて全断面内を100個の要素に分割する（著者の場合に換算すると一方向に3.5節点を設ける）ことにより、妥当な結果を得たとしている。一方、著者は変位および応力の分布をも問題としたために、以下に示すように1次要素では不十分で、2次要素を用いかつ節点数もAalamiの6倍程度は必要であるとの結論になった。本法を用いて位相速度、変位、応力を求めると一般に後者ほど精度が悪くなるため、両者の結論がそれぞれ異なるのは当然と言える。

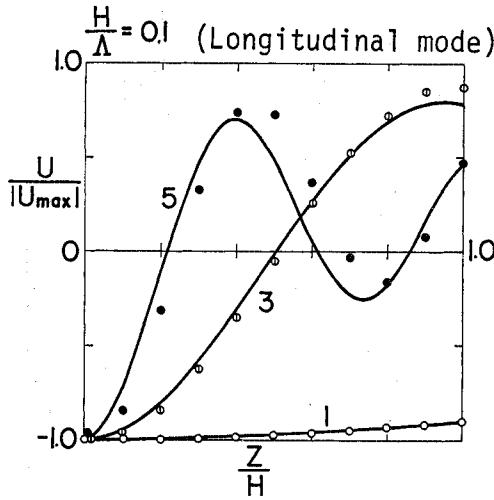
表-1 相速度の誤差 (%)

	11 節 点	21 節 点
1 次 要素	4.45	1.27
2 次 要素	1.75	0.54

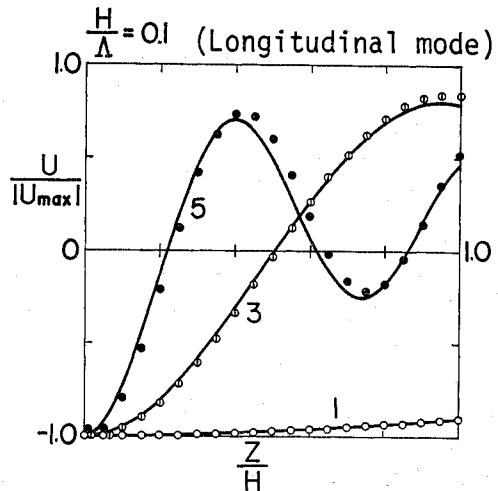
表-2 計 算 時 間 (秒)

	11 節 点	21 節 点
1 次 要素	748	2427
2 次 要素	1099	2724

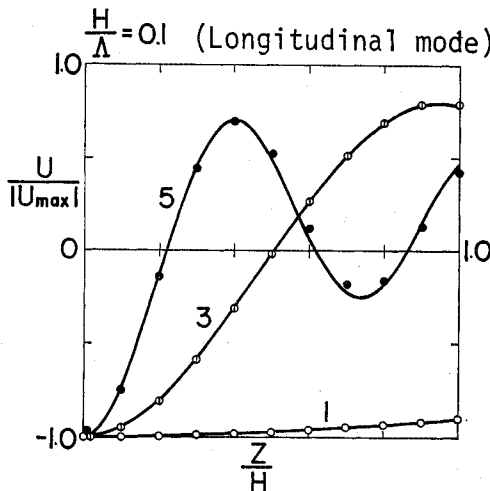
表-1 は1次要素と2次要素を用いた場合、 z 軸に沿った節点数が11と21の場合の精度を比較するために、図-3と同じ範囲で位相速度の相対誤差の最大値を示したものである。よく知られているように、同一節点数では明らかに2次要素の方が優れていることがわかる。なお、次数の異なる要素同士の精度を比較するため



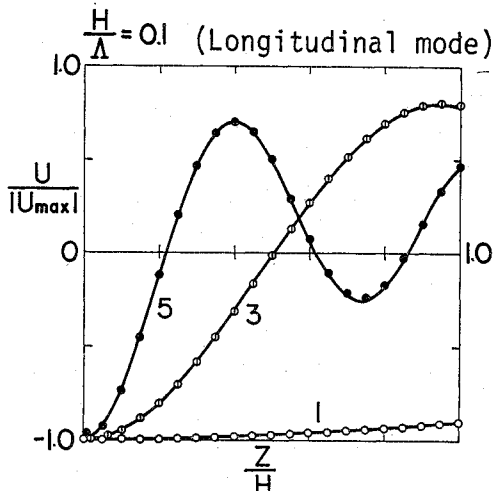
(a) 1次要素, 11 節点



(b) 1次要素, 21 節点



(c) 2次要素, 11 節点



(d) 2次要素, 21 節点

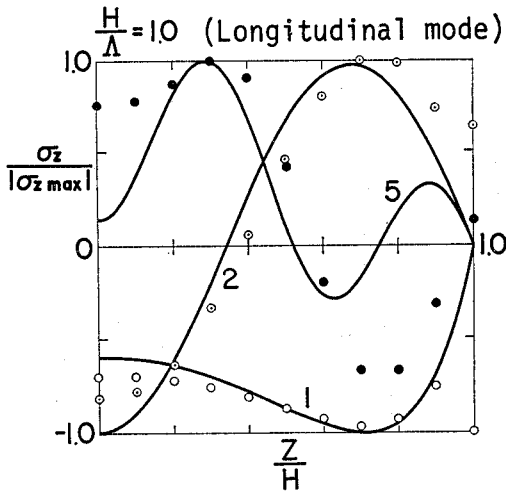
図-4 変位成分 U の比較 (縦波)

には同一要素数ではなくて同一節点数, すなわち, 同一自由度にすべきことは論をまたないであろう。

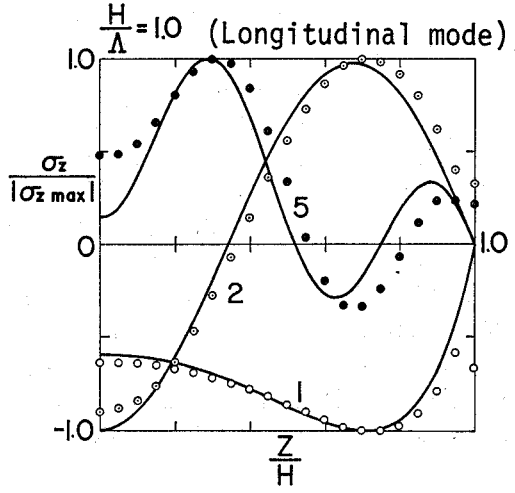
表-2 は H/Λ の 10 個の値に関しそれぞれ第 5 分枝まで, 変位および応力成分すべてを計算した際の所要時間, いわゆる CPU TIME である。まったく同形の要素で分割し要素の計算を 1 個だけで済ませているため, 計算時間の差はおもに固有値および固有ベクトル計算の際の, べき乗法による収束時間に由来していると考えてさしつかえない。次節で示すように, ここで用いた 2 次要素はまわりくどい計算方法を採用しているため, いずれの場合も 300 秒ほど計算時間が多くなっている。したがってまったく対等の比較とは言えないが, 少ない時間で精度を上げるためには, 1 次要素で節点数を増やすよりも 2 次要素を用いる方がよいことは明瞭に現われている。

図-4 は, 同様の比較を $H/\Lambda=0.1$ の時の変位成分 u の振幅分布 U に関して行ったものである。位相速度の場合とは逆に, 2 次要素の 11 節点の方が 1 次要素の 21 節点よりもよい結果を与えていることが注目される。なお, 以後の変位および応力の振幅分布図では, 図の煩雑さを避けるため適宜 3~5 分枝を取り上げる。

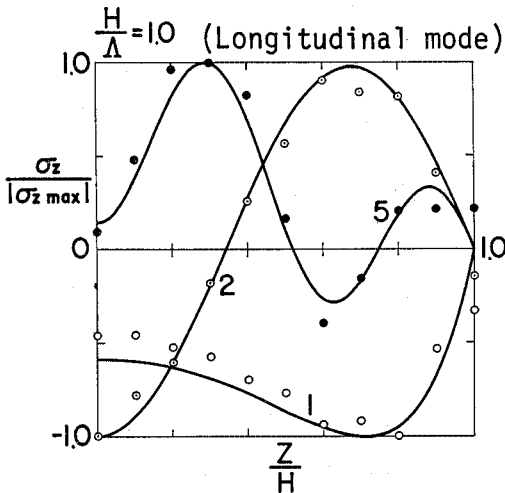
図-5 は, $H/\Lambda=1.0$ の時の応力成分 σ_z の振幅分布を示したものである。理論上 $\sigma_z=0$ となるべき板の表面 ($z/H=1.0$) での値は誤差の目安と考えられ, 1 次要素ではかなり精度が落ちることが解る。また, 2 次要素で 11 節点の結果は 1 次要素で 21 節点のものに匹敵する精度と言えるが, 第 5 分枝までの応力分布を表すには 11 節点では不十分であることも明らかであろう。なお, 応力値は節点を共有するすべての要素の算術平均を用いたが, それでも 2 次要素による値には若干の振動が



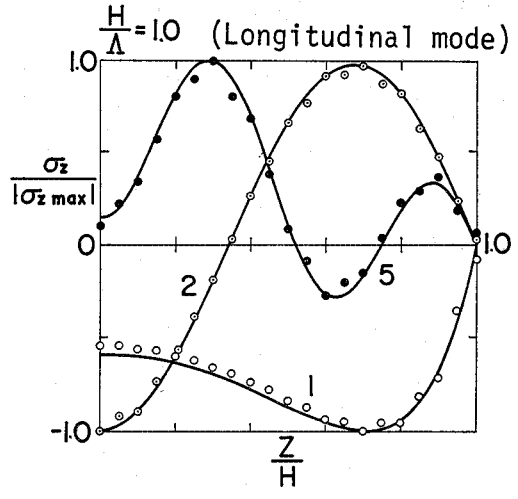
(a) 1次要素, 11 節点



(b) 1次要素, 21 節点



(c) 2次要素, 11 節点



(d) 2次要素, 21 節点

図-5 応力成分 σ_z の比較 (縦波)

認められる。

以上のように精度と計算時間を比較した結果、応力分布などを問題とする場合は1次要素では不十分であり、2次要素を用い節点数も一方に21程度は必要であることが解った。

4. 2次要素による計算例

ここで用いた2次要素は直接18節点の三角柱要素として計算せずに、プログラミングを簡単にするため図-6のような10節点の四面体要素を3個組み合わせた。この組み合わせ方は図-7に示すように6種類あるのですべての相加平均を用いたが、計算時間の面からは得策でない。なお、四面体要素の諸マトリックスの計算は体積座標¹⁰⁾によった。2次要素を用いた場合の運動方程式の2次元化は1次要素を用いた場合と同様であり、中間点の位相を考慮する必要があることと、全体的にマトリックス成分が増えて煩雑になること以外は特に目新しいことはない。

図-8は、変位および応力成分のうち図-4,5に示したものの以外の振幅分布を $H/\Lambda=0.1$ または $H/\Lambda=1.0$ に関して示したものである。理論値と計算値は全体を通じきわめてよく一致しており、わずかに τ_{zx} の第5分枝で若干のずれと振動が見られるだけである。

まったく同様の計算を曲げ波 (Flexural wave) についても行った。無限板の場合は、境界条件を $z=0$ の面上で $u=0$ とおくことにより曲げ波が得られる。図-9は位相速度曲線であり、非常に精度のよいことがわかる。ちなみに、この範囲での相対誤差の最大は0.55%であり、縦波の場合(表-1)と似た値を示している。

図-10は、曲げ波の変位および応力成分の振幅分

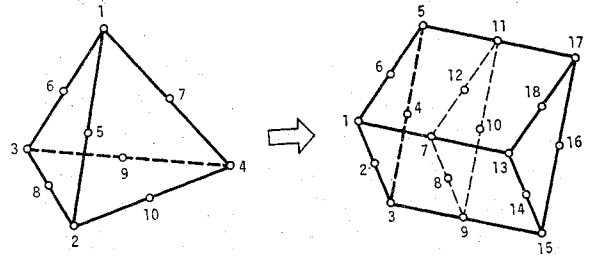


図-6 四面体要素と三角柱要素

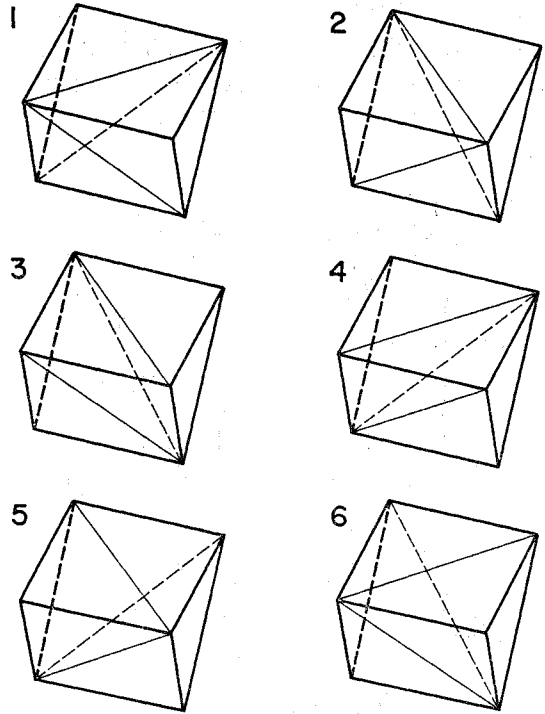
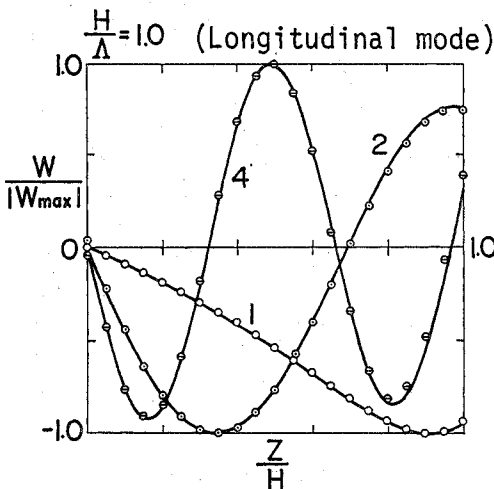
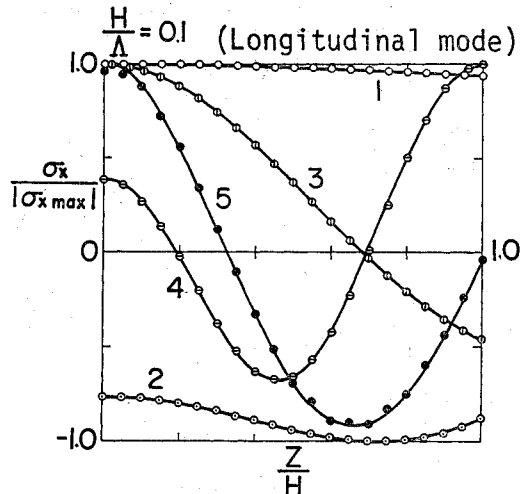


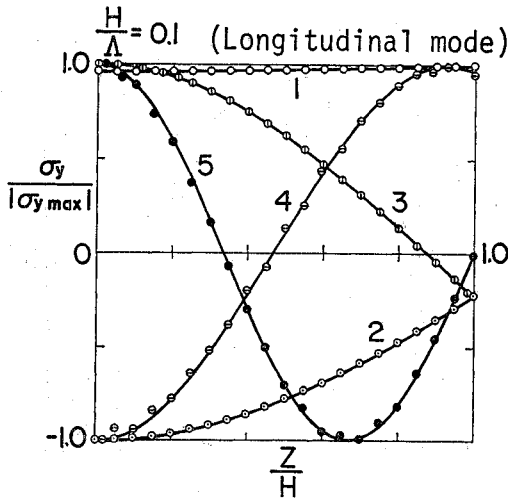
図-7 組み合わせのすべて



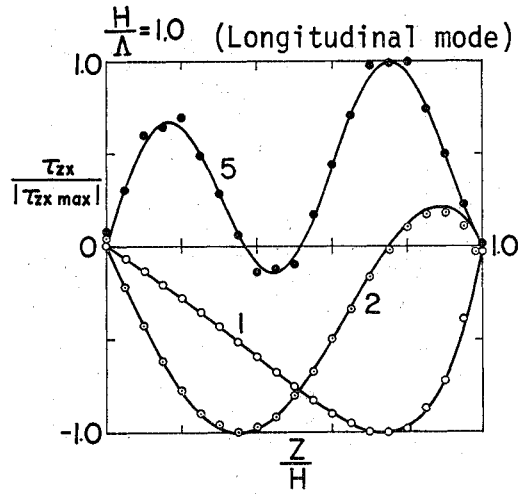
(a) 変位成分 W



(b) 応力成分 σ_x



(c) 応力成分 σ_y



(d) 応力成分 τ_{zx}

図-8 変位, 応力の振幅分布 (縦波)

布である。全体的にきわめてよい結果が得られており、ただ1つ τ_{zx} の第3分枝だけが例外で理論値とかけ離れ大きく振動している。W および σ_z から推測できるように、 $H/\Lambda=1.0$ の時の第3分枝は偶然にも特別な場合になっており、実際に τ_{zx} の値を他の応力成分値と比

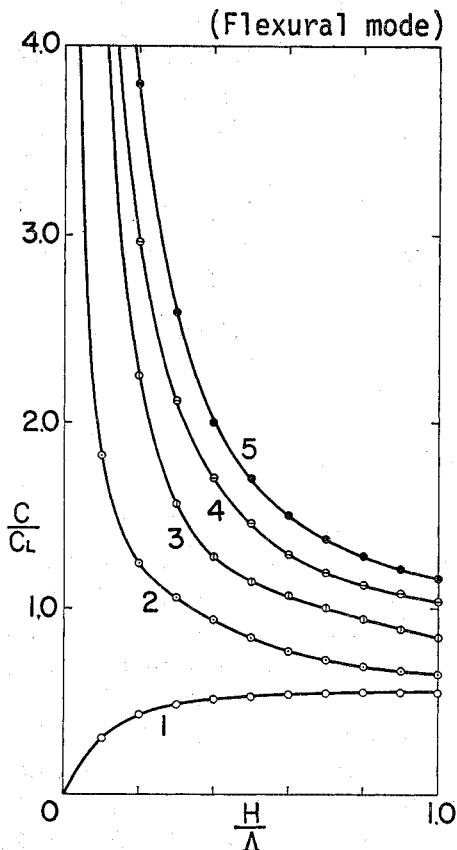
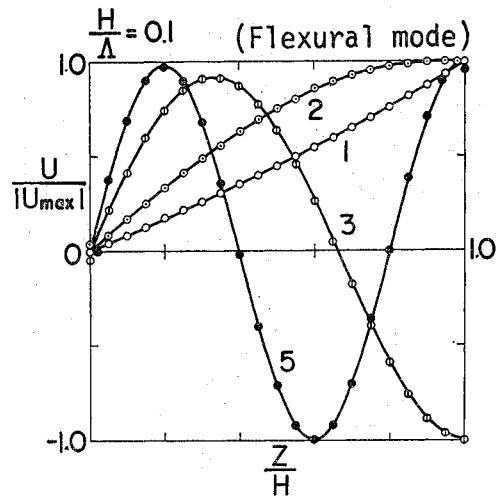
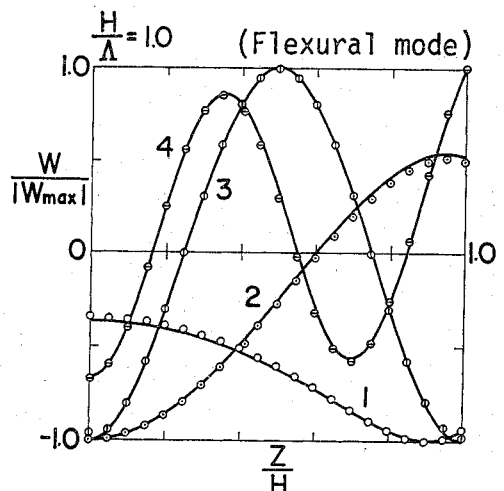


図-9 位相速度曲線 (曲げ波)



(a) 変位成分 U



(b) 変位成分 W

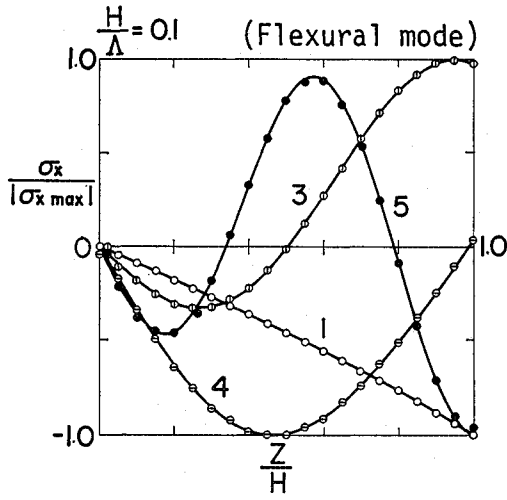
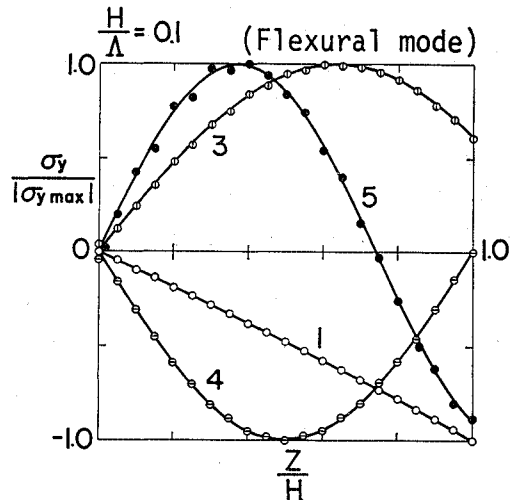
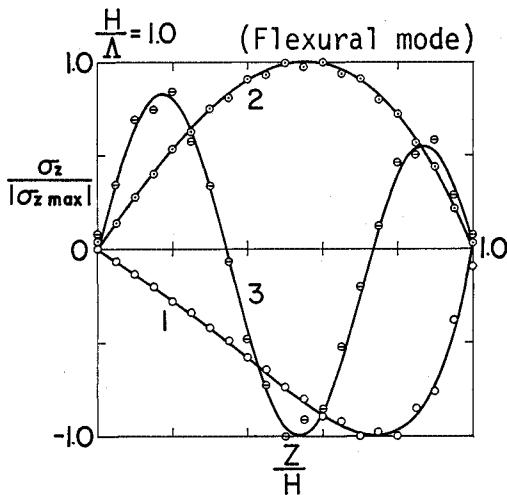
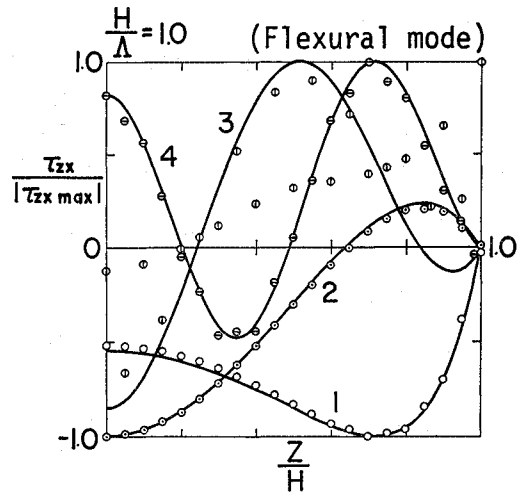
(c) 応力成分 σ_x (d) 応力成分 σ_y (e) 応力成分 σ_z (f) 応力成分 τ_{zx}

図-10 変位, 応力の振幅分布 (曲げ波)

較すると 1/100 程度である。すなわち、図では $|\tau_{zx, \max}|$ で割って無次元化したために誤差の部分 unnecessary に拡大した訳で、変位法により応力を求める場合 0 に近い値に誤差が多くなることはやむを得ないと言えよう。

以上のように、Lamb の解を対象とし H/Λ が 0.1 から 1.0 の範囲で低次の 5 分枝程度を問題にする限りは、2 次要素を用いて z 軸方向に 21 節点を設ければきわめて良好な結果が得られることが示された。もちろんより高次の分枝を問題にする場合は、さらに節点数を増やしより高次の要素を用いる必要が生じると思われるが、一般的に重要なのは低次の 5 分枝程度であることから本稿の範囲外とした。

5. あとがき

有限要素法により任意の断面形状をした無限に長い棒中の弾性波を解析する Aalami の手法は、独立になされた著者の研究によりその妥当性が裏付けられた。本法では一般に位相速度、変位、応力と順次精度が悪くなるため、位相速度と変位分布の概形のみを考察した Aalami が 1 次要素で満足したのは自然であると思われる。しかしながら、無限板中の弾性波を対象として厳密解と本法による計算値を比較した結果、応力分布を問題とするためには少なくとも 2 次要素の使用が必要であり、低次の 5 分枝程度を扱うためには 1 つの軸に沿って 21 節点程度を用いれば十分であることが解った。

なお、実際に複雑な形状をした断面の棒に適用する場合は、節点数が非常に多くなりコンピュータの内部記憶容量では処理できなくなるためさらに若干の工夫が必要である。また四面体要素を組み合わせたのでは計算時間が長くなるので、三角柱の2次要素を直接計算するのが望ましい。これらの点に関しては別の機会に稿を改めて述べたいと考えている。

本研究の遂行に必要な計算は東北工業大学計算センターの TOSBAC-3400/41 により、また同センターの諸氏には計算上有益なご助言をいただいた。記して謝意を表す次第である。

付録 A

まず、棒の表面に平面の部分があるとして、その平面に垂直に z 軸を定める。ここで位相差を表わすために未知数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を用い変位成分を次のように仮定すると

$$\begin{aligned} u &= U(y, z) e^{i(\omega t - \kappa x)} \\ v &= (\alpha + \beta i) V(y, z) e^{i(\omega t - \kappa x)} \\ w &= (\gamma + \delta i) W(y, z) e^{i(\omega t - \kappa x)} \end{aligned}$$

せん断応力は

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= G \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} + (\delta - \gamma i) \kappa W \right\} e^{i(\omega t - \kappa x)} \\ \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= G \left\{ (\gamma + \delta i) \frac{\partial W}{\partial y} + (\alpha + \beta i) \frac{\partial V}{\partial z} \right\} e^{i(\omega t - \kappa x)} \end{aligned}$$

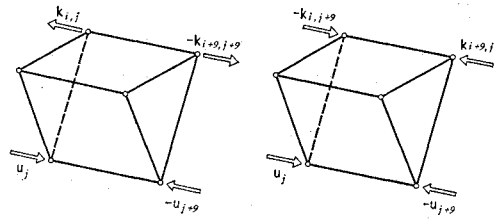
となる。ここで G はせん断弾性係数。注目する表面ではこれらが恒等的に 0 でなければならないから

$$\begin{aligned} \gamma i \kappa W &= 0 \\ \alpha \frac{\partial V}{\partial z} + \gamma \frac{\partial W}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

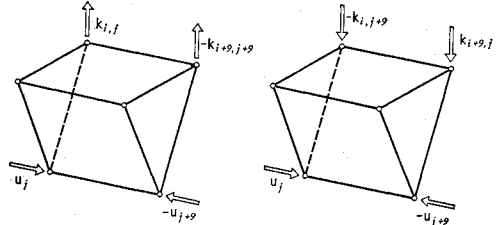
ここで κ は 0 でなく、 W も表面上で常に 0 とは限らないので $\gamma = 0$ 、同様に $\partial V / \partial z$ も一般には 0 でないから $\alpha = 0$ 、したがって式 (1) の仮定は妥当であることが知られる。なお一般には棒の表面に平面の部分があるとは限らないので、 y, z については曲線座標で議論すべきであるが、その場合も式が複雑になるだけで考え方は同様である。

付録 B

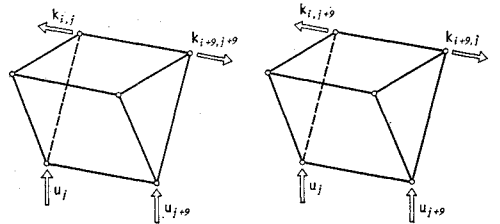
要素の剛性マトリックス成分 $k_{i,j}$ は式 (3) からもわかるように、要素の節点変位ベクトル成分 u_j が 1 で他はすべて 0 の状態にするための要素の節点力ベクトル成分 f_i を表わしている。まず i, j ともに 1, 4, 7 すなわ



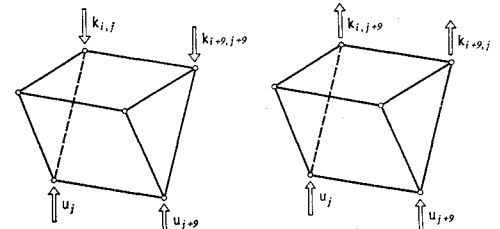
① $k_{i,j} = k_{i+9,j+9}$ ② $k_{i,j+9} = k_{i+9,j}$
(a) $i=1, 4, 7; j=1, 4, 7$



① $k_{i,j} = -k_{i+9,j+9}$ ② $k_{i+9,j} = -k_{i,j+9}$
(b) $i=1, 4, 7; j=1, 4, 7$



① $k_{i,j} = -k_{i+9,j+9}$ ② $k_{i+9,j} = -k_{i,j+9}$
(c) $i=1, 4, 7; j=1, 4, 7$



① $k_{i,j} = k_{i+9,j+9}$ ② $k_{i,j+9} = k_{i+9,j}$
(d) $i=1, 4, 7; j=1, 4, 7$

図-11 剛性マトリックス成分の相互関係

ち x 軸方向成分を表わす場合を考えると、図-11 の (a) ①で u_j のみが 1 の時の f_i が $k_{i,j}$ であり、三角柱要素の対称性から u_{j+9} のみが -1 の時の $-f_{i+9}$ は $-k_{i+9,j+9}$ となり、したがって

$$k_{i,j} = k_{i+9,j+9}$$

が知れる。同様に (a) ②では u_j のみが 1 の時の f_{i+9} は $k_{i+9,j}$ であり、 u_{j+9} が -1 の時の $-f_i$ は $-k_{i,j+9}$ となり、

$$k_{i,j+9} = k_{i+9,j}$$

が知れる。

以下 (b), (c), (d) に関してもまったく同様であり, その結果式 (9) でそれぞれ加え合わせる 4 個の成分はその中の 2 個ずつが等しいかまたは異付号であるため, 結局は実数部分または虚数部分が消えることになる.

参 考 文 献

- 1) Kolsky, H. : Stress Waves in Solids, Dover Publications Inc., New York, 1963.
- 2) Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. and Press, F. : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1957.
- 3) Akita, H. : Stress Distribution of Elastic Waves in an Infinite Plate and a Cylindrical Bar, Proc. 21st Japan National Congress for Applied Mechanics, Vol. 21, pp. 93~99, 1971.
- 4) Mindlin, R.D. and Fox, E.A. : Vibrations and Waves in Elastic Bars of Rectangular Cross Section, J. Applied Mechanics, Vol. 27, pp. 152~158, 1960.
- 5) Medick, M.A. : One-Dimensional Theories of Wave Propagation and Vibrations in Elastic Bars of Rectangular Cross Section, J. Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 489~495, 1966.
- 6) Nigro, N.J. : Steady-State Wave Propagation in Infinite Bars of Noncircular Cross Section, J. Acoustical Soc. America, Vol. 40, pp. 1501~1508, 1966.
- 7) Fraser, W.B. : Stress Wave Propagation in Rectangular Bars, Int. J. Solids and Structures, Vol. 5, pp. 379~397, 1969.
- 8) Booker, R.E. and Fraser, W.B. : Dispersion of Elastic Waves in a Triangular Bar, J. Sound and Vibration, Vol. 18, No. 2, pp. 261~269, 1971.
- 9) O.C. ツィエンキーヴィッツ著, 吉識雅夫・山田嘉昭監訳: 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 1975.
- 10) Aalami, B. : Waves in Prismatic Guides of Arbitrary Cross Section, J. Applied Mechanics, Vol. 40, pp. 1067~1072, 1973.
- 11) 秋田 宏 : 任意断面棒中の弾性波の応力分布について, 昭和 46 年度東北支部技術研究発表会講演概要 pp. 205~206, 1972.
- 12) Akita, H. : An Elastic Wave Solved by the Use of the Finite-Element Method, Proc. 22nd Japan National Congress for Applied Mechanics, Vol. 22, pp. 137~142, 1972.
- 13) 秋田 宏 : 高次のモードを含めた Lamb 波の解析例, 昭和 48 年度東北支部技術研究発表会講演概要, pp. 16~17, 1974.
- 14) 秋田 宏 : 2 次要素による Lamb 波の解析例, 土木学会第 27 回年次学術講演会講演概要集 I, pp. 522~523, 1974.
- 15) Akita, H. : Numerical Analyses of Lamb's Waves with the Aid of Quadratic Elements, Proc. 24th Japan National Congress for Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 219~226, 1974.
- 16) I. ホランド・K. ベル監修, 川井忠彦監訳 : ホランド/ベル有限要素法, 朝倉書店, 1972.

(1976.7.15・受付)