

二次元 Cosserat 弾性体の応力集中問題に対する基本解

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR STRESS CONCENTRATION PROBLEMS OF TWO-DIMENSIONAL COSSERAT ELASTIC BODY

平 島 健 一*・富 沢 茂 司**
By Ken-ichi HIRASHIMA and Shigeji TOMISAWA

1. 緒 言

従来までの古典連続体力学の諸理論は、対象とする材料の全領域にわたって密度の一樣連続性すなわち、いかなる無限小要素に対しても一定均質であるという基本仮定に立ち、その材料の構成組織の微細構造を無視して成立しているものである。したがって、これらの理論からえられる力、変位、応力、ひずみその他の諸量は内部組織のスケール以上の大きさの領域での平均値を表わすにすぎない。しかしながら、実際の材料は種々の形状特性、たとえば粒状性、結晶性、多孔性、繊維状性あるいは層状性等の特性を有し、またそれらの規則的あるいは不規則な配列、分布を示す複雑な結合ないし混合状態を有しているのが普通である。このような材料に対して古典理論を適用することは真の力学挙動を正確に説明することができないような場合も生じてくることも考えられる。したがって、材料の構成要素の形状、組織特性までも考慮した力学理論が必要とされる。

構成要素の幾何学的特性および局所回転を考慮した連続体力学は総称して一般化連続体力学 (mechanics of generalized continua) とよばれており、本論文で主として取り扱う偶応力理論およびマイクロポーラ理論もその一つである注1)。

古典連続体力学では材料の表面要素における荷重の伝達はこの表面上で定義される応力ベクトル \hat{t}_j —単位面積当りの力—のみの場で完全に記述されるとするもので

* 正会員 工修 山梨大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 千葉県水道局

注 1) 一般化連続体力学の理論を構築するに際して、各研究者により対象とする連続体に対して、多様な名称が与えられている。たとえば、次のようなものが列挙される。Cosserat continua, multipolar continua, oriented media, fibrous media, theories with directors, micromorphic continua, nonlocal media, structured continua, materials of grade N., そのほか。

ある。すなわち、曲げおよびねじりのモーメントなどは力のモーメントで置きかえられると仮定するのである。しかるに、この慣用の応力ベクトルに加えて、表面を横切って伝達される単位面積当りの偶力を表わす“偶応力ベクトル” \hat{m}_j を含む概念が多結晶性固体の特性を説明するために最初 Voigt (1887) によって導入され、やや遅れて E. and F. Cosserat (1909) によって展開された。Cosserat 兄弟は偶応力を考慮したばかりでなく、物体は微小な剛体からなる内部接合された粒子から成り、変形中にそれらの各粒子は変位と回転を互いに独立に行いうると考えたのである。いいかえれば連続体の各点が極性を有する媒質 (polar media) であってそれらの各点が変位と同時に回転もしようとしたのである。この概念は上述したような様々の尺度の内部構造をもつ材料に対し平均的な意味においてではあるが、適切であると考えられ、そのような材料の微細構造を含めた理論の展開が一つの例外 [Günther (1958)] はあるが、1960 年代になって突然といってよいほど爆発的な勢いでなされ、数百におよぶ論文が発表されるに至る。それらのうちの主たるものを列挙すると Truesdell and Toupin (1960), Grioli (1960), Aero and Kuvshinski (1960), Toupin (1962), Mindlin and Tiersten (1962), Mindlin (1962), Schaefer (1962), Mindlin (1964), Green and Rivlin (1964), Eringen and Suhubi (1964), Muki and Sternberg (1964), Pal'mov (1964), Neuber (1964), そして 1967 年に IUTAM では一般化連続体力学に関するシンポジウムを開催することになる注2) (次ページ参照)。その後もさらに夥しい数の論文が発表されて現在に至っている。

これらの研究者によって展開された理論は材料の微視的影響をある程度反映する反面、その数学的取り扱いも古典連続体力学に比べて相当複雑化する。またこれらの理論は対象とする材料の全体的な挙動を把握する場合には、二次的効果しか示さないかも知れないが、孔、切欠

き、クラックなどの近傍の応力集中あるいは破壊といった現象に関連する局所的な挙動に対しては重要な意味をもってくるのが予測される。

これらの理論のうち、Mindlin and Tiersten (1962) および Eringen and Suhubi (1964) によって提案された理論はそれぞれ一般に「不確定」偶応力理論（または拘束回転を有する Cosserat 連続体理論）および、マイクロポーラ理論（または自由回転を有する Cosserat 連続体理論）とよばれているものである。特に、前者の場合の中心対称均質等方弾性（すべての点が線形弾性の特性をもち、かつ弾性対称の中心である）材料に対する線形偶応力理論は古典弾性論を一方の極とすれば 2. に示すような意味においてそれと対極をなすものと考えられ、両者の間にはいくつかの顕著な差異が指摘される。たとえば、第一に構成方程式が導出される修正ひずみエネルギー密度関数は通常の無限小ひずみの項のほかに、通常の剛体回転（macrorotation）—この場合は後述の微視的回転（microrotation）にも等しい—の勾配または曲率の項を含む。また第二には、等方弾性材料に対する一般化構成方程式は古典的な2つの弾性定数（Lamé 定数）に加えてさらに2つの新しい弾性定数を含み、それらは Lamé 定数との比をとれば長さの次元をもつ材料パラメーター l, l_1 で表わされる。この特性長の存在が古典理論では認識されていない内部構造あるいは寸法効果の影響の導入を可能ならしめるものといわれ、この l, l_1 が零に近づくと2つの新しい弾性定数も零に近づき、したがって偶応力理論は古典理論に収束する。

偶応力理論と古典理論の差異の具体例としてたとえば力学定数の異なる2つの材料が Fig. 1 のように完全に接合されているような場合、前者ではひずみ、回転（または変位の1次勾配）までの連続性を保証する (Fig. 1(c)) のに対し、後者では Fig. 1(b) のように変位までの連続性が成り立つにすぎない。

Mindlin and Tiersten (1962) によって提唱された偶応力理論は応力テンソルの非対称部分と偶応力テンソル

注 2) このシンポジウムの結果をまとめたものが Kröner 編の "Mechanics of Generalized Continua" (1967) であるが、その前文でこのシンポジウムの目的として次の諸点を掲げている。

- 1) 微視的な物質世界を洞察する目的をもって最近（当時）までに展開された連続体力学の各種の理論的アプローチの統一化
- 2) 微視的（または原子的）な力学研究と現象論的（または連続体力学的）なそれとの間に存在する喰い違い（gap）に対する橋渡し
- 3) 実際の材料の挙動と新しい理論で導入された法則との間の関係ならびにそれらの物理的解釈
- 4) （必要ならば）理論のさらなる発展と未解決の問題の解明
- 5) 現在（当時）までにえられた成果の実績調査と将来への発展の予測

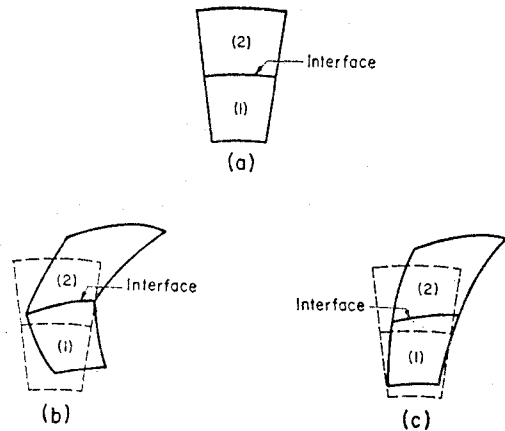


Fig. 1 Deformation continuity conditions at interface. (a) Undeformed elements; (b) bond in accordance with classical theory; (c) bond and "locking" (equal rotations) for couple-stress theory. (after Y. Weitsman⁴⁹⁾)

の対角線部分（spherical part）に関して不確定（indeterminate）であって、すべての可能な微視構造の効果の部分的な評価にすぎないものであるが、ある種の力学現象を研究するためのモデルとしてきわめて有用なものであるといわれている（たとえば Biot (1965); Lippman (1968) 参照）。

一方、単純微視弾性体（simple microelastic solids）に対する一般的な非線形理論が Eringen and Suhubi (1964) によって展開され^{注3)}、その理論の特別なものがいわゆるマイクロポーラ弾性理論である。この理論に支配される材料の変形は Cosserat の考え方と同じように変位ベクトルおよび独立な微視的回転ベクトル（microrotation vector）によって完全に記述される。この microrotation の独立性が偶応力理論との基本的な差異であるが、これが macrorotation としての通常の剛体回転に等しくなるような特別な場合にはマイクロポーラ理論は不確定偶応力理論に収束する。簡単な例で説明すると Fig. 2 に示すように、従来までの座標系 (x, y) 内の macroelement としての微小要素 OABC のひずみ（macrostrain）に対して、この要素内にとった微視座標（micro-coordinates） (x', y') の microelement として、たとえば図中の要素 O'A'B'C' の変形、ひずみおよび回転がそれぞれ、microdeformation, microstrain $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}$ および microrotation ϕ_z とよばれるものであり、これらの $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}$ および ϕ_z が macrostrain と次節の式 (4)' で関係づけられるとするものである。このうち、microstrain $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}$ が一般に等しくない（i.e. $\varepsilon_{xy} \neq \varepsilon_{yx}$ ）とする考え方がいわゆるマイクロポーラ理

注 3) これに関連した微視連続流体力学の広範な概説が Ariman ら (1973, 1974) によって発表されている⁴⁹⁾。

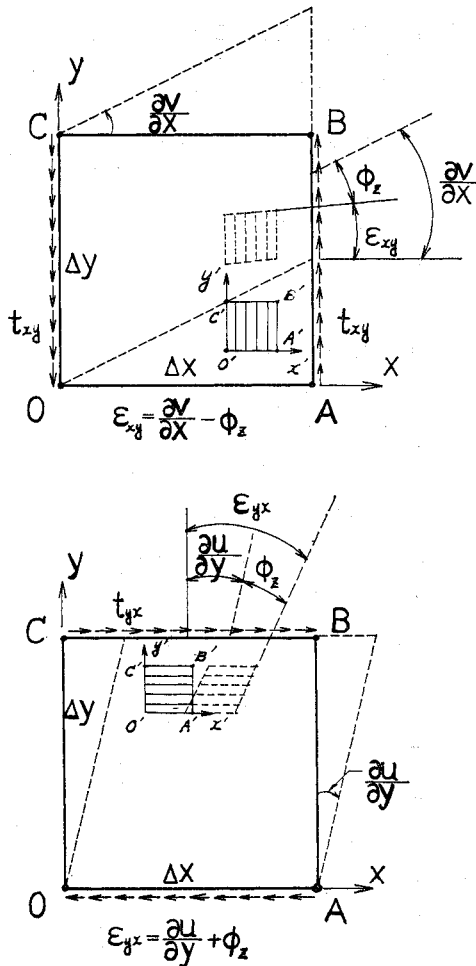


Fig. 2 Geometrical relations among macrostrains, microstrains and microrotation.

論であり、等しい ($\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$) と考えるのが偶応力理論である。

微視構造を持つ材料の理論的な取扱いは急速に進化したにも拘らず、実際の材料に対するこれらの理論の適用可能性についての実験的検証はまだ大変限られたものである。まず、Koiter (1964) は円柱状供試体の単純ねじりと板の曲げ試験により、特性長を表わすパラメーター l の決定のための手続きを示唆し、それによって Schjive (1966) および Ellis and Smith (1967) は金属材料 (アルミニウムおよび低炭素鋼の 2 種) を用いて実験を行ったが、彼らの行った実験範囲内では非古典的影響は認められていない。Brown and Evans (1972) は弾性球より成る粒状体でねじの伝播を解析し、偶応力の影響は意外なことに金属材料におけるよりも粒状体の方が少ないとの結論を下している。また、最近、Gauthier and Jansman (1975) はマイクロポーラ弾性理論における 6 つの定数を決定するために必要な実験とその解析を示し、エポキシ樹脂の母材に一樣に分布させたアルミニウ

ム粒を埋設して試験を実施したがその結果は古典弾性論からのずれはあまり認められなかったと報告している。他方、連続体の格子モデルについて行った Hoppmann and Shahwan (1965) の実験は偶応力の存在の可能性を示すものであり、Perkins and Thompson (1973) によるポリ塩化ビニールの気泡状材料についての振動試験では偶応力理論に従う顕著な挙動が観察されたと報告されている。いずれにしても高次振動あるいは短い波長が卓越するような現象に対する説明は理論の成り立ちから考えて適切な情報がこれらの一般化理論から得られるであろうこと、したがって、古典理論に破たんが生じるであろうことの指摘がなされている。

以上、偶応力を考慮した、より一般的弾性論の歴史の概略を述べたが、本論文では偶応力理論およびマイクロポーラ理論に対する二次元的な問題を複素変数法によって定式化したものである。この方面の研究としては、Mindlin (1963), Huilgol (1967) および Ariman and Zika (1971) を列挙することができるが本文ではそれらをより一般化し、さらに上記の研究者の結果に二、三の誤りがあることを指摘する注 4)。また、弾性論の基本問題である無限板に集中力あるいは集中偶力が作用した場合について閉じた形での解を提示する。

2. 基礎方程式

前節でも述べたように偶応力理論はマイクロポーラ理論の係数を特殊化することによって導き出せるものであるが、Cowin²⁹⁾ に従って連成数 (coupling number) N を導入して両者の理論を統一的に記述する。

線形マイクロポーラ弾性論は Eringen³⁰⁾ によって要約した結果が簡潔に与えられている。その結果を簡単のため直交デカルト系でテンソル表示して示すと次のようになる。

- a) 運動量のつり合い方程式

$$t_{lk,l} + \rho(f_k - \dot{u}_k) = 0 \dots \dots \dots (1)_a$$
- b) 角運動量のつり合い方程式

$$m_{lk,l} + \epsilon_{kmn} t_{mn} + \rho(l_k - J \dot{\phi}_k) = 0 \dots \dots \dots (1)_b$$
- c) エネルギーの保存法則

$$\rho \dot{\epsilon} = t_{lk} \dot{u}_{k,l} - \epsilon_{kmn} t_{mn} \dot{\phi}_k + m_{lk} \dot{\phi}_{k,l} \dots \dots \dots (2)$$
- d) 応力および偶応力に対する構成方程式

$$t_{kl} = \lambda \epsilon_{jj} \delta_{kl} + (\mu + \kappa) \epsilon_{kl} + \mu \epsilon_{lk} \dots \dots \dots (3)_a$$

$$m_{kl} = \alpha \phi_{j,j} \delta_{kl} + \beta \phi_{k,l} + \gamma \phi_{l,k} \dots \dots \dots (3)_b$$
- e) 運動学的関係式

$$\epsilon_{kl} = e_{kl} - \epsilon_{klm} (r_m - \phi_m), \}$$

注 4) この論文の印刷の段階になって Bhargava & Ghosh (1975) の論文⁴⁰⁾ を入手したが、これは Ariman & Zika の理論²⁹⁾ の拡張であり、彼らと同様の問題点がある。

$$\left. \begin{aligned} e_{kl} &= \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \\ r_m &= \frac{1}{2} \varepsilon_{mnp} \phi_{p,n}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

f) 適合条件式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} + \tau_{ikj} - \tau_{jki} &= 0, \\ \varepsilon_{klr} (\tau_{klm,n} - \tau_{kln,m}) &= 0, \\ \tau_{klm} &= \varepsilon_{kln} \phi_{n,m}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

g) 応力の境界条件

$$\hat{i}_k = n_i t_{ik}, \quad \hat{m}_k = n_i m_{ik} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 ε_{kmn} は交代記号 (permutation symbol), λ, μ は古典的な Lamé 定数であり、一方、 κ, α, β および τ は対象とする媒体の微視構造の考察から導入される4つの新たな定数である。その他の記号の説明は注5)に示した。

ここで、直交デカルト座標系として x_k ($k=1, 2, 3$) が用いられ、繰り返し指標に対しては通常の和の規約が適用される。また、コンマの次の指標はその座標での偏微分を意味する。

内部ひずみエネルギーが非負 (non-negative) となるための必要十分条件として6つの定数の間に次のような関係が成立しなければならない³⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} 3\lambda + 2\mu + \kappa &\geq 0, \quad 2\mu + \kappa \geq 0, \quad \kappa \geq 0 \\ 3\alpha + \beta + \tau &\geq 0, \quad \tau \geq \beta \geq -\tau, \quad \tau \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

さて、静的問題で物体力ならびに物体偶力を無視した場合の、2次元弾性体に対して(1)_aおよび(1)_bのつり合い方程式を具体的に表示すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial m_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yz}}{\partial y} + t_{xy} - t_{yx} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

平面ひずみ状態での構成方程式は(3)_aより、

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + (2\mu + \kappa)\varepsilon_{xx}, \\ t_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + (2\mu + \kappa)\varepsilon_{yy}, \\ t_{yx} &= (\mu + \kappa)\varepsilon_{yx} + \mu\varepsilon_{xy}, \\ t_{xy} &= (\mu + \kappa)\varepsilon_{xy} + \mu\varepsilon_{yx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)'_a$$

注5) t_{kl} = 応力テンソル

ρ = 質量密度

f_i = 物体力ベクトル

u_k = 変位ベクトル

m_{kl} = 偶応力テンソル

\hat{i}_k = 物体偶力ベクトル

ε = 内部エネルギー密度

\hat{i}_j = 単位面積当りの表面力ベクトル

m_j = 単位面積当りの表面偶力ベクトル

δ_{kl} = クロネッカーのデルタ

ϕ_k = microrotation ベクトル

r_m = macrorotation ベクトル

J = micro-inertia の係数

ε_{kl} = microstrain テンソル

e_{kl} = macrostrain テンソル

i_{klm} = micropolar ひずみテンソル

あるいは、これを逆変換すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2G} \{t_{xx} - \nu(t_{xx} + t_{yy})\}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2G} \{t_{yy} - \nu(t_{yy} + t_{xx})\}, \\ \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2G} (t_{xy} + t_{yx}), \\ \varepsilon_{xy} - \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{\kappa} (t_{xy} - t_{yx}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)''_a$$

ここに、

$$G = \frac{1}{2}(2\mu + \kappa), \quad \nu = \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu + \kappa} \dots\dots\dots (3)'''_a$$

とおいた。これは古典理論におけるせん断弾性係数とポアソン比に相当するものである。

偶応力に対する構成式は(3)_bにより、

$$m_{xz} = \tau \frac{\partial \phi_z}{\partial x}, \quad m_{yz} = \tau \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \dots\dots\dots (3)''_b'$$

であり、microstrain テンソル ε_{kl} と変位の関係は(4)で $u_1 \equiv u, u_2 \equiv v$ において求めると、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \phi_z, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \phi_z, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)'$$

が得られる。また、単連結領域での変位の一価連続性を保証する適合条件式(5)を書き下すと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \phi_z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial m_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial m_{yz}}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)'$$

この適合条件式(5)'_{1,2}を、(3)''_a'の関係を用いて応力成分の式で書くと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_{xz}}{\tau} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{4G} (t_{xy} + t_{yx}) - \frac{1}{2\kappa} (t_{xy} - t_{yx}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2G} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [t_{xx} - \nu(t_{xx} + t_{yy})], \\ \frac{m_{yz}}{\tau} &= \frac{1}{2G} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [t_{yy} - \nu(t_{xx} + t_{yy})] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{4G} (t_{xy} + t_{yx}) + \frac{1}{2\kappa} (t_{xy} - t_{yx}) \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)''_a$$

この式はさらに後述する l, N を用いて書き変えると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} m_{xz} &= l^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (t_{xy} + t_{yx}) - \frac{1-N^2}{N^2} (t_{xy} - t_{yx}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial}{\partial y} \{t_{xx} - \nu(t_{xx} + t_{yy})\} \right], \\ m_{yz} &= l^2 \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \{t_{yy} - \nu(t_{xx} + t_{yy})\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (t_{xy} + t_{yx}) + \frac{1-N^2}{N^2} (t_{xy} - t_{yx}) \right\} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)'''_a$$

さて、ここで次式で表わされるような二つの応力関数 $U(x, y)$ および $V(x, y)$ を導入すると、これらの式はつり合い方程式 (8) を恒等的に満たすことが容易に証明される⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, & t_{yx} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ t_{yy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, & t_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \\ m_{xz} &= \frac{\partial V}{\partial x}, & m_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

(3)'_a, (3)'_b および (9) を用いて適合条件式 (5)' を満たすための U, V の関係式を求めると、二、三の演算のうち最終的に次のような基礎方程式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(V - l_1^2 \nabla^2 V) &= -2(1-\nu)l^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 U, \\ \frac{\partial}{\partial y}(V - l_1^2 \nabla^2 V) &= 2(1-\nu)l^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 U, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} l^2 &= \frac{r}{2(2\mu + \kappa)}, & l_1^2 &= \frac{r(\mu + \kappa)}{\kappa(2\mu + \kappa)} \equiv \frac{l^2}{N^2}, \\ N^2 &= \frac{\kappa}{2(\mu + \kappa)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

である。上式のような N を Cowin は連成数 (coupling number) と名付けている²⁹⁾。すなわち、この N は $0 \leq N \leq 1$ の範囲にあり、 N が 0 に近づくとき古典理論に、1 に近づくとき偶応力理論に漸近する。マイクロポーラ理論では、0 と 1 の間のある値をとる。なお、(10) の ∇^2 は 2 次元のラプラス演算子：

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \dots\dots\dots (12)$$

を意味する。

(10) から、次の式が容易に求められる。

$$\nabla^4 U = 0, \nabla^2(V - l_1^2 \nabla^2 V) = 0 \dots\dots\dots (13)$$

したがって、この式では U と V との間の連成は生じないことになる。 U は従来までの 2 次元問題に対する Airy の応力関数であり、 V は新しく導入された偶応力関数である。

文献 26), 33) に従って、複素変数形で Airy の応力関数 U を次のように表示する。

$$U = \text{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 Re はかっこの内の実部をとることを意味し、 $\phi(z), \chi(z)$ は複素解析関数を表わす。

上式と複素変数表示した $V = V(z, \bar{z})$ を用いて応力成分間の関係を求めると次式がえられる²⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} + t_{yy} &= 4 \text{Re}[\phi(z)], \\ t_{yx} - t_{xy} &= 4 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \bar{z}}, \\ t_{yy} - t_{xx} + i(t_{xy} + t_{yx}) &= \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} &= 2 \left[\bar{z}\phi'(z) + \Psi(y) + 2i \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right], \\ m_{xz} - im_{yz} &= 2 \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

上式では次のような新しい記号を用いた。

$$\phi(z) = \varphi'(z), \Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z) \dots\dots\dots (16)$$

さらに、(15) を整理すると、

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} - it_{xy} &= 2 \text{Re}[\phi(z)] - [\bar{z}\phi'(z) + \Psi(z)] \\ &+ 2i \left[\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となる。また変位成分 u, v は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u + iv &= \frac{1}{2G} \left[k\phi(z) - z\phi'(z) - \bar{\Psi}(z) + 2i \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \right], \\ &\dots\dots\dots (18) \end{aligned} \right\}$$

上式における係数 G および k はそれぞれ次の値をとる。

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{1}{2}(2\mu + \kappa), & k &= \frac{2(\lambda + \mu) + 3\kappa}{2(\lambda + \mu) + \kappa} = 3 - 4\nu, \\ &\dots\dots\dots (19) \end{aligned} \right\}$$

(平面ひずみ状態)

ここに、 G, ν はそれぞれ古典弾性論におけるせん断弾性係数および Poisson 比である。

上式中で導入された応力関数 $\phi(z)$ と $V(z, \bar{z})$ の間には、次式のような基礎関係式が成立しなければならない。

$$V - l_1^2 \nabla^2 V = 8(1-\nu)l^2 \text{Im}[\phi(z)] \dots\dots\dots (20)$$

偶応力理論では、上式において $l_1 = l$ のように置きかえてやればよい。なお、Fig. 3 のように平面上の任意の弧 AB に作用する座標軸方向の合応力ならびに原点 O のまわりの合偶力を求めると最終的には次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X + iY &= \int_A^B (X_n + iY_n) ds \\ &= -i[\varphi(z) + \overline{z\phi'(z)} + \bar{\psi}(z)]_A^B - 2 \left[\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \right]_A^B \\ &\dots\dots\dots (21) \end{aligned} \right\}$$

$$M = \int_A^B m_{nz} ds = [U]_A^B$$

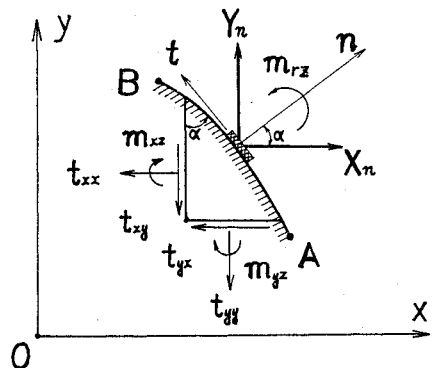


Fig. 3 The first boundary condition at an arc AB.

$$\begin{aligned}
 & -\left[x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} \right]_A^B - \left[x \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial x} \right]_A^B \\
 & = \operatorname{Re}[\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\varphi'(z)]_A^B \\
 & \quad + i \left[z \frac{\partial V}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \right]_A^B \dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

3. 複素変数法による一般解法²⁷⁾

(13)₂ によって支配される関数 $V(z, \bar{z})$ は偶応力成分の式を考慮すると実関数でなければならないから、次式のようになる。

$$V - 4l_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} = f(z) + \overline{f(z)} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $f(z)$ は考えている問題に適するような任意の複素解析関数である。

(23) で右辺を零とおいた同次方程式：

$$V - 4l_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

の解は以下のようにして求められる。

まず、 V を変数分離形：

$$V = V_1\left(\frac{r}{l_1}\right) V_2(\theta) \dots\dots\dots (25)$$

におき、(24) に代入し、ラプラス演算子 ∇^2 の極座標表示：

$$\nabla^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V_1} \left(\frac{r^2}{l_1^2} V_1'' + r V_1' - \frac{r^2}{l_1^2} V_1 \right) &= -\frac{V_2''}{V_2} \equiv \alpha^2 \\
 &\dots\dots\dots (26)
 \end{aligned}$$

が得られる。 α は任意定数である。なお上式のプライム記号はそれぞれの引数のうちの変数で微分したものであるとする。

a) $\alpha \neq 0$ の場合：

(26) を解くと (24) の一般解として

$$\begin{aligned}
 V &= \left[\hat{A}_\alpha I_\alpha\left(\frac{r}{l_1}\right) + \hat{B}_\alpha K_\alpha\left(\frac{r}{l_1}\right) \right] \\
 &\quad \cdot (C_\alpha \sin \alpha\theta + D_\alpha \cos \alpha\theta) \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

を得る。ここに $I_\alpha(\)$ および $K_\alpha(\)$ はそれぞれ α 次の第1種および第2種の変形ベッセル関数である。

b) $\alpha = 0$ の場合：

$$V = \left[\hat{A}_0 I_0\left(\frac{r}{l_1}\right) + \hat{B}_0 K_0\left(\frac{r}{l_1}\right) \right] (C_0\theta + D_0) \dots\dots (28)$$

(27) の α は一般に零でない数でよいが、ここでは対象とする問題の性質上、整数に限定する。また、本文では無限に広がった領域問題を取り扱うものとすれば、変形ベッセル関数の性質から、(27) の係数 \hat{A}_α は恒等的に零でなければならない。

上述のように問題を限定すると (13)₂ の一般解は次式

のようになる。

$$\begin{aligned}
 V &= f(z) + \overline{f(z)} + (d_0 + h_0\theta) \cdot K_0\left(\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{l_1}\right) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} K_n\left(\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{l_1}\right) (C_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta) \\
 &\quad \dots\dots\dots (29)_1
 \end{aligned}$$

ここに、

$$f(z) + \overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n z^{-n} + \bar{b}_n \bar{z}^{-n}] \dots\dots\dots (29)_2$$

b_n は一般に複素係数でよいが、 d_0, h_0, c_n および d_n は V が実関数であることから、共に実係数でなければならない。

(20), (23) および (29)₂ より、

$$8(1-\nu)l^2 \operatorname{Im}[\phi(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n z^{-n} + \bar{b}_n \bar{z}^{-n}] \dots (30)$$

となる。そこで、いまポテンシャル $\phi(z)$ が Laurent 級数によって

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

の形に展開できるものとすれば、(30) より、

$$b_n = -4i(1-\nu)l^2 a_n, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots (31)$$

が成立する。

(29)₁ で与えられる $V(z, \bar{z})$ は $h_0\theta K_0$ の項^{注6)}を除いて、一価の導関数たとえば $\partial V/\partial \bar{z}$ などを有することが証明できる。したがって、以下ではこの項を除いて考えることにしよう。

いま、多連結の無限領域に対して、すべての境界 L_κ ($\kappa=1, 2, \dots, m$) を含むような原点のまわりの大きな円 L_R を描けば、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned}
 \phi(z) &= \int \theta(z) dz = z \sum_{\kappa=1}^m \tilde{A}_\kappa \log(z - z_\kappa) \\
 &\quad + \sum_{\kappa=1}^m r_\kappa \log(z - z_\kappa) + \phi^*(z), \\
 \psi(z) &= \int \Psi(z) dz = \sum_{\kappa=1}^m r'_\kappa \log(z - z_\kappa) + \phi^*(z) \\
 &\quad \dots\dots\dots (32)
 \end{aligned} \right\}$$

ここに $\phi^*(z)$ および $\psi^*(z)$ は L_κ の外部で holomorphic であるような任意関数である。

ところで、上述した関数に変位式 (18) の一価性を満足させるためには (32) において

$$\tilde{A}_\kappa = 0, \quad kr_\kappa + r'_\kappa = 0, \quad (\kappa=1, 2, \dots, m) \dots\dots (33)$$

が成立しなければならない。そして、文献 33) によれば複素係数 r_κ, r'_κ は次のようになる。

$$r_\kappa = -\frac{X_\kappa + iY_\kappa}{2\pi(1+k)}, \quad r'_\kappa = \frac{k(X_\kappa - iY_\kappa)}{2\pi(1+k)} \dots\dots (34)$$

ここに、 (X_κ, Y_κ) は境界 L_κ で、この境界の外方向法線方向に作用する外力の合ベクトル成分である。

いま、 $\phi^*(z)$ および $\psi^*(z)$ をそれぞれ

注 6) この項を含めて一価性の条件を考慮した結果、恒等的に $h_0=0$ とならなければならないことが容易に証明できる。

$$\varphi^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n z^n, \quad \psi^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{a}'_n z^n$$

の如く Laurent 級数展開すれば、 $z \rightarrow \infty$ に対し $\partial^2 V / \partial z^2 \rightarrow 0$ であることを考慮すると、 $\hat{a}_n = 0, \hat{a}'_n = 0$ ($n \geq 2$) でなければならないことが証明される。

したがって、結局複素ポテンシャル $\Phi(z)$ 、および $\Psi(z)$ に対する級数：

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^{-n} \dots \dots \dots (35)$$

の係数 a_n, a'_n と (29)₁ の係数 c_n, d_n を決定することに帰着される。

4. 円孔をもつ無限板に対する第1種境界値問題

以下では、Muskhelishvili の方法³³⁾ と記号を採用して理論展開を行う。いま、Fig. 4 のように座標系の原点を半径 $r=R$ の円の中心にとるものとすれば、この円周上で、

$$t_{rr} - it_{r\theta} = N_t - iT \dots \dots \dots (36)$$

となる。ここに、 N_t および T は原点の側に向いた法線 n の方向をもち円周上に作用する外荷重応力の垂直およびせん断応力成分を表わすものである。

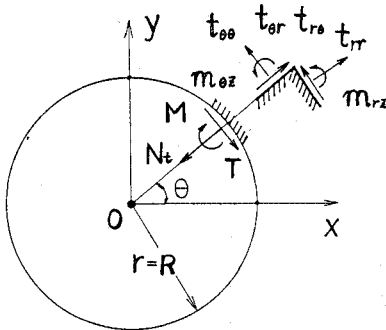


Fig. 4 Boundary conditions of forces and moment around a circular hole with radius R .

いま、この作用外力を複素 Fourier 級数：

$$N_t - iT = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta} \dots \dots \dots (37)$$

ここに、

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [N_t - iT] e^{-in\theta} d\theta$$

に展開しておく。

ここで、複素ポテンシャル $\Phi(z)$ および $\Psi(z)$ を (35)、すなわち

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^{-n} \dots \dots \dots (38)$$

とおけば、極座標系における応力、変位の成分との間に、

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} + t_{\theta\theta} &= 4 \operatorname{Re}[\Phi(z)] \\ t_{\theta r} - t_{r\theta} &= 4 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} - it_{r\theta} &= 2 \operatorname{Re}[\Phi(z)] + 2i \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} \\ &\quad - e^{2i\theta} \left[\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z) + 2i \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] \\ m_{rz} - im_{\theta z} &= 2 e^{i\theta} \frac{\partial V}{\partial z} \\ 2G(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta} \left[k\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)} + 2i \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

なる関係が成立するから、(39)₃ に (29)₁、(38) を代入して (37) の右辺との係数比較をすると次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{R^n} a_n e^{-in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{R^n} e^{in\theta} - a_0' e^{2i\theta} \\ & - \frac{a_1'}{R} e^{i\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_{n+2}}{R^{n+2}} e^{-in\theta} - \frac{iK_1}{l_1 R} d_0 + \frac{i}{4l_1^2} \cdot \\ & \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{in\theta} + \bar{\alpha}_n e^{-in\theta}) K_n - 2i \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(n+1)}{R^{n+2}} \cdot \right. \\ & \cdot b_n e^{-in\theta} + \frac{e^{2i\theta}}{2} (\alpha_n e^{in\theta} + \bar{\alpha}_n e^{-in\theta}) K_n \left. \right] \\ & + \frac{n}{R} \{ \alpha_n e^{i(n-1)\theta} - \bar{\alpha}_n e^{-i(n+1)\theta} \} K_n' + \frac{n}{4R^2} \cdot \\ & \cdot \{ (n-2)\alpha_n e^{i(n-2)\theta} + (n+2)\bar{\alpha}_n e^{-i(n+2)\theta} \} K_n \left. \right] \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta} \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$

ここに $\alpha_n = d_n - ic_n$ とおいた。また、変形ベッセル関数 $K_n = K_n(\sqrt{z\bar{z}}/l)$ に付されたプライム記号は K_n を変数 z によって微分したことを意味するものとする。

変形ベッセル関数に関する微分公式および漸化公式 (付録 I, II) を利用して上式を再整理すると最終的に次のようになる。

$$\begin{aligned} & (a_0 + \bar{a}_0 - \frac{a_2'}{R^2} - \frac{iK_1}{l_1 R} d_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{a}_n}{R^n} - \frac{a_{2-n}}{R^{2-n}} h^{n, 1, 2} \right. \\ & \left. + \frac{(n-1)K_{n-1}}{2l_1 R} (c_n + id_n) \right\} e^{in\theta} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{R^n} \left\{ 1 - 8n(1-\nu) \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right\} a_n \right. \\ & \left. - \frac{a'_{n+2}}{R^{n+2}} + \frac{(n+1)K_{n+1}}{2l_1 R} (c_n - id_n) \right] e^{-in\theta} \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta} \dots \dots \dots (40)' \end{aligned}$$

ここに、 $h^{n,i,j}$ は次の意味を有する記号として定義している。

$$h^{n,i,j} = \begin{cases} 1 & (i \leq n \leq j) \\ 0 & (n < i, j < n) \end{cases} \dots \dots \dots (41)$$

この記号はクロネッカーのデルタとの関係で示せば、

$$h^{n,i,j} = \sum_{k=i}^j \delta_{nk} \text{ が成立する。}$$

両辺の係数比較から

$$\left. \begin{aligned} a_0 + \bar{a}_0 - \frac{a_2'}{R^2} - \frac{iK_1}{l_1 R} d_0 &= A_0, \quad \frac{1}{R} (\bar{a}_1 - a_1') = A_1, \\ -a_0' \delta_{n2} + \frac{\bar{a}_n}{R^n} + (c_n + id_n) \frac{(n-1)K_{n-1}}{2l_1 R} &= A_n, \end{aligned} \right\} (n \geq 2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(n+1)a_n}{R^n} - \frac{a'_{n+2}}{R^{n+2}} - \frac{2n(n+1)}{R^{n+2}} i\bar{b}_n \\ & + (c_n - id_n) \frac{(n+1)K_{n+1}}{2l_1 R} = A_{-n}, \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

を得る。

しかしながら、これだけの条件では未知係数 a_n, a'_n, c_n および d_n を完全には決定できない。残りの条件は円孔境界での偶応力に関する情報である。われわれは、現在第1種境界値問題を考えているのであるから、孔の境界での外荷重による偶応力成分を M とすれば、

$$M = m_{rz} = 2 \operatorname{Re} \left[e^{i\theta} \frac{\partial V}{\partial z} \right] \dots\dots\dots(43)$$

となる。ここで、先と同様にこの M を複素 Fourier 級数に展開して

$$M = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n e^{in\theta} + \bar{B}_n e^{-in\theta}) \dots\dots\dots(44)$$

のように書けるものとすれば、(43), (44) を比較し整理すると最終的に

$$\left. \begin{aligned} & \frac{K_1}{l_1} d_0 = -B_0, \\ & \frac{n}{R^{n+1}} i\bar{b}_n + (c_n + id_n) \frac{K_{n+1} + K_{n-1}}{4l_1} = -iB_n, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

が得られる。

また(42), (45) および (31) の連立の式を解けば最終的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\bar{A}_n + \delta_{n2} \bar{a}'_0 - \frac{2(n-1)K_{n-1}}{R(K_{n-1} + K_{n+1})} i\bar{B}_n}{\frac{1}{R^n} \left\{ 1 + \frac{8n(n-1)(1-\nu)K_{n-1}}{K_{n-1} + K_{n+1}} \left(\frac{l}{R} \right)^2 \right\}}, \\ & \quad (n \geq 2) \\ b_n &= -4i(1-\nu)l^2 a_n, \quad (n \geq 0) \\ a'_1 &= \bar{a}_1 - RA_1, \\ a'_2 &= R^2(a_0 + \bar{a}_0 - A_0) - i \frac{RK_1}{l_1} d_0, \\ a'_{n+2} &= (n+1)R^2 a_n \left\{ 1 - 8n(1-\nu) \left(\frac{l}{R} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left. \left(1 - \frac{K_{n+1}}{K_{n-1} + K_{n+1}} \right) \right\} + \frac{2(n+1)K_{n+1}}{K_{n-1} + K_{n+1}} \\ & \quad \cdot R^{n+1} i\bar{B}_n - R^{n+2} A_{-n}, \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

したがって、 a_0, a'_0 および a_1 以外のすべての係数が A_n, B_n で決定されたことになる。このうち、 a_0, a'_0 は無限遠に作用する外荷重応力から決定され、残りの a_1 は後出の(47)の変位に対する一価性の条件 $k_1 a_1 + \bar{a}'_1 = 0$ と(46)を組み合わせてることによって

$$a_1 = \frac{R}{1+k} \bar{A}_1 \dots\dots\dots(46)'$$

として定まるものである。

いずれにしても、 A_n および B_n が与えられるならば、すべての係数が決定でき、問題は完全に解けたことになる。したがって、次節以下では上述の結果を用いて二、三の例題を考えることにする。その前に、ここで以後の計算に便利のように複素数表示による応力、変位の式を示しておこう。

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} - it_{r\theta} &= \left(a_0 + \bar{a}_0 - \frac{a'_2}{r^2} \right) - \frac{K_1}{l_1 r} id_0 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{a}_n}{r^n} - \frac{a'_{2-n}}{r^{2-n}} h_{n,2} + \frac{(n-1)K_{n-1}}{2l_1 r} (c_n + id_n) \right] \\ & \cdot e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{r^n} \left\{ 1 - 8n(1-\nu) \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right\} a_n \right. \\ & \left. - \frac{a'_{n+2}}{r^{n+2}} + \frac{(n+1)K_{n+1}}{2l_1 r} (c_n - id_n) \right] e^{-in\theta}, \\ t_{rr} + t_{\theta\theta} &= 2(a_0 + \bar{a}_0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (a_n e^{-in\theta} + \bar{a}_n e^{in\theta}), \\ t_{\theta r} - t_{r\theta} &= \frac{K_0}{l_1^2} d_0 + \frac{1}{2l_1^2} \\ & \cdot \sum_{n=1}^{\infty} K_n \{ (d_n + ic_n) e^{-in\theta} + (d_n - ic_n) e^{in\theta} \}, \\ m_{rz} - im_{\theta z} &= -\frac{K_1}{l_1} d_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{r^{n+1}} b_n + \frac{K_{n+1}}{4l_1} \right. \\ & \left. \cdot (d_n + ic_n) \right] e^{-in\theta} + \frac{K_{n-1}}{4l_1} (d_n - ic_n) e^{in\theta}, \\ 2G(u_r + iu_\theta) &= \left\{ (ka_0 - \bar{a}_0) r + \frac{\bar{a}'_2}{r} \right\} - \frac{K_1}{l_1} id_0 \\ & + \left\{ (ka_0 - \bar{a}'_0) + (ka_1 - \bar{a}'_1) \log r + i\theta (ka_1 + \bar{a}'_1) \right. \\ & + \frac{K_0}{2l_1} (c_1 - id_1) \left. \right\} e^{-i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ -\bar{a}'_0 r \delta_{n2} \right. \\ & + \frac{-ka_n}{(n-1)r^{n-1}} + \frac{K_{n-1}}{2l_1} (c_n - id_n) \left. \right\} e^{-in\theta} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\bar{a}_n}{r^{n-1}} + \frac{\bar{a}'_{n+2}}{(n+1)r^{n+1}} - \frac{2n}{r^{n+1}} i\bar{b}_n \right. \\ & \left. - \frac{K_{n+1}}{2l_1} (c_n + id_n) \right\} e^{in\theta}, \\ 4l^2 G\phi_z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} (b_n e^{-in\theta} + \bar{b}_n e^{in\theta}) + K_0 d_0 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \{ (d_n - ic_n) e^{in\theta} + (d_n + ic_n) e^{-in\theta} \}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

ここに、変位式中の α_0, α'_0 は積分定数として導入された複素定数である。

5. 円孔を有する無限板の例 (Kirsch 問題の解)

前節で得た解を利用して円孔を有する無限板の基本問題である Fig. 5 のような無限遠より等分布一定応力 $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0 (= \tau_{yx}^0)$ が作用するいわゆる Kirsch 問題を考えよう。

この場合の応力成分は $r \rightarrow \infty$ において

$$t_{xx}^0 = \sigma_x^0, \quad t_{yy}^0 = \sigma_y^0, \quad t_{xy}^0 = t_{yx}^0 = \tau_{xy}^0 \dots\dots(48)$$

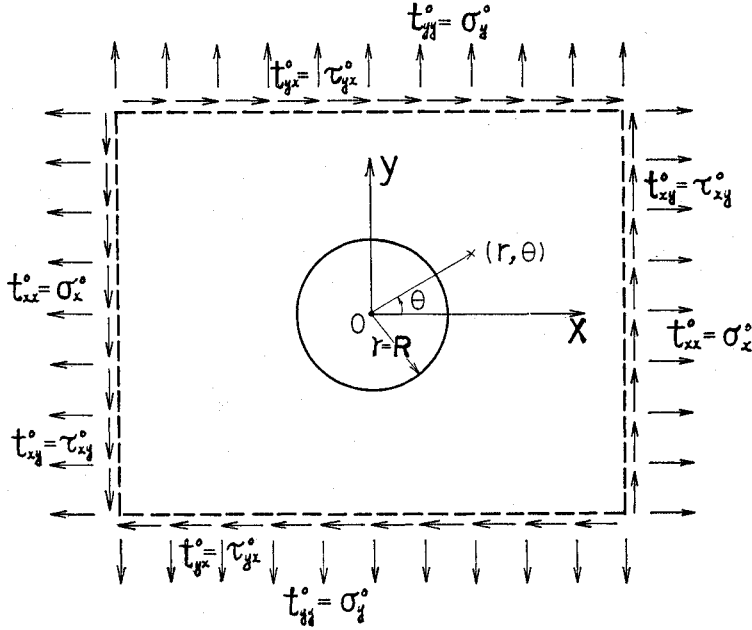


Fig. 5 Circular hole in an infinite plate subjected to the uniform stresses σ_x^0 , σ_y^0 and τ_{xy}^0 .

である。ところで、(5)'' および (11) から

$$\left. \begin{aligned} m_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} [l^2(t_{xy} + t_{yx}) - l_z^2(t_{xy} - t_{yx})] \\ &\quad - 2l^2 \frac{\partial}{\partial y} [t_{xx} - \nu(t_{xx} + t_{yy})], \\ m_{yz} &= 2l^2 \frac{\partial}{\partial x} [t_{yy} - \nu(t_{xx} + t_{yy})] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} [l^2(t_{xy} + t_{yx}) + l_z^2(t_{xy} - t_{yx})], \end{aligned} \right\} \dots(49)$$

ここに、

$$l_z^2 = \frac{r}{2\kappa} = \frac{1-N^2}{N^2} l^2 \dots\dots\dots(50)$$

なる関係が成立しなければならないから、(48) のような等分布応力が作用する場合には、 m_{xz}^0 , m_{yz}^0 は恒等的に零でなければならない。すなわち、

$$m_{xz}^0 = m_{yz}^0 = 0 \dots\dots\dots(51)$$

ゆえに問題は、無限遠での外荷重応力が(48), (51) で与えられるような場合の円孔周辺の応力、変位を計算すればよい。

極座標系と直交デカルト座標系の間の応力の変換公式:

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} &= t_{xx} \cos^2 \theta + t_{yy} \sin^2 \theta + (t_{xy} + t_{yx}) \sin \theta \cos \theta \\ t_{\theta\theta} &= t_{xx} \sin^2 \theta + t_{yy} \cos^2 \theta - (t_{xy} + t_{yx}) \sin \theta \cos \theta \\ t_{r\theta} &= (t_{yy} - t_{xx}) \sin \theta \cos \theta + t_{xy} \cos^2 \theta - t_{yx} \sin^2 \theta \\ t_{\theta r} &= (t_{yy} - t_{xx}) \sin \theta \cos \theta - t_{xy} \sin^2 \theta + t_{yx} \cos^2 \theta \\ m_{rz} &= m_{xz} \cos \theta + m_{yz} \sin \theta \\ m_{\theta z} &= -m_{xz} \sin \theta + m_{yz} \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(52)$$

に(48), (51) を代入し、円孔がないと考えたときの任意

の座標位置 (r, θ) での $t_{r\theta}$ および m_{rz} を求め複素表示すると

$$\left. \begin{aligned} t_{rr}^0 &= \frac{1}{4} \{ 2(\sigma_x^0 + \sigma_y^0) + (\sigma_x^0 - \sigma_y^0 - 2i\tau_{xy}^0) e^{2i\theta} \\ &\quad + (\sigma_x^0 - \sigma_y^0 + 2i\tau_{xy}^0) e^{-2i\theta} \}, \\ t_{r\theta}^0 &= \frac{1}{4} \{ [2\tau_{xy}^0 - \tau(\sigma_y^0 - \sigma_x^0)] e^{2i\theta} \\ &\quad + [2\tau_{xy}^0 + i(\sigma_y^0 - \sigma_x^0)] e^{-2i\theta} \}, \\ m_{rz}^0 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(53)$$

が得られる。

しかるに、半径 $r=R$ に自由境界の円孔が存在するのであるから、この円孔周縁上での半径方向の応力 t_{rr} , $t_{r\theta}$ ならびに偶応力 m_{rz} は零とならなければならない。そのためには、[I] $r=R$ 上で(53)の応力成分とは逆符号をもったものを作用させて得られた結果と、[II] (52)に(48), (51)を代入したもの、ならびにそれから求めた変位等の結果を重ね合わせてやれば所期の問題の解が得られる。

そこで、(36), (43) から上述の [I] の問題に対しては、

$$N_i - iT = -(t_{rr}^0 - it_{r\theta}^0), \quad M = -m_{rz}^0 \dots\dots(54)$$

であるように A_n および B_n を決定すればよい。(53)を上式に代入し、(37), (44)を考慮すると次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{2}(\sigma_x^0 + \sigma_y^0) \\ A_2 &= -\frac{1}{2}\{(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - 2i\tau_{xy}^0\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(55)$$

$$\begin{aligned} A_1=0, A_n=0, (n \leq -1, 3 \leq n) \\ B_n=0, (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

したがって、上記の値を (46) に代入し、かつ、孔内に集中荷重が作用せず、また無限遠で無応力(問題 [I] ではこの条件が成立する)であることを考慮すれば各係数の値として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{(\sigma_y^0 - \sigma_x^0) - 2i\tau_{xy}^0}{2(1+F)} R^2 \\ b_2 &= \frac{-2(1-\nu)l^2 R^2 \{2\tau_{xy}^0 + i(\sigma_y^0 - \sigma_x^0)\}}{1+F} \\ c_2 &= \frac{l_1 R F (\sigma_y^0 - \sigma_x^0)}{K_1 (1+F)} \\ d_2 &= \frac{2l_1 R F \tau_{xy}^0}{K_1 (1+F)} \\ a_2' &= \frac{1}{2} R^2 (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) \\ a_4' &= \frac{3R^4 (1-F) \{(\sigma_y^0 - \sigma_x^0) - 2i\tau_{xy}^0\}}{2(1+F)} \end{aligned} \right\} \dots (56)$$

ここに、

$$F = \frac{8(1-\nu)}{4 + \left(\frac{R}{l_1}\right)^2 + 2\left(\frac{R}{l_1}\right) \frac{K_0}{K_1}} \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 \dots (57)$$

その他の係数はすべて零となる。

これより、標記の問題に対する応力、変位成分は以下の式から計算される。

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} &= (t_{rr})_I + (t_{rr})_{II} = (t_{rr})_I + t_{rr}^0 \\ t_{r\theta} &= (t_{r\theta})_I + (t_{r\theta})_{II} = (t_{r\theta})_I + t_{r\theta}^0 \\ \dots & \dots \\ u_r &= (u_r)_I + (u_r)_{II} = (u_r)_I + u_r^0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \dots (58)$$

ここに、 $(t_{rr})_I, \dots, (u_r)_I, \dots$ は (56) を (47) に代入して得られる応力、変位であり、 $t_{rr}^0, \dots, u_r^0, \dots$ は与えられた外荷重が作用したときの孔のない無限板内の応力、変位である。

以上の結果のさらに特別な場合として x 軸方向の無限遠より等分布の直応力 σ_x^0 のみが作用する場合 (i.e. $\sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0$) についての結果のうち、応力成分式は Eringen の得たもの³⁰⁾ と完全に一致するのでここでは式の再録は割愛する。またその式で、 $N=1$ とおいたものは Mindlin の結果⁹⁾ と、 $N=0$ とおいたものは古典的な Kirsch 問題の解と一致するのは当然である。他方、変位および microrotation ϕ_z について計算すると、

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\sigma_x^0}{4Gr} \left[\frac{k-1}{2} r^2 + R^2 + \left\{ (k+1)R^2 + (1+F)r^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(1-F)R^4}{r^2} - 16(1-\nu)l^2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{2Fl_1^2 R}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left(4 + \frac{r^2}{2l_1^2} + \frac{2r}{l_1} \cdot \frac{K_0}{K_1} \right) - FRr \right\} \frac{\cos 2\theta}{1+F} \right], \\ u_\theta &= -\frac{\sigma_x^0}{4Gr} \left\{ (k-1)R^2 + (1+F)r^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-F)R^4}{r^2} + 16(1-\nu)l^2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{2Fl_1^2 R}{r} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &\cdot \left(4 + \frac{r^2}{2l_1^2} + \frac{2r}{l_1} \cdot \frac{K_0}{K_1} \right) + FRr \left\} \frac{\sin 2\theta}{1+F}, \right. \\ \phi_z &= \frac{\sigma_x^0 \sin 2\theta}{4G(1+F)} \left\{ 4(1-\nu) \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{R}{l} F \frac{K_2}{K_1} \right\}, \end{aligned} \right\} \dots (59)$$

ここに、 F は (57) で与えられるものである。

上式で、 $l_1=l$ とおけば偶応力理論の問題となり、Huigol の導いた式と一致する注7)。さらにその式で $l \rightarrow 0$ とすれば従来までの古典弾性論の結果とも一致する。

6. 無限板内の1点に作用する集中力または集中偶力

まず、はじめに座標系 (x, y) の原点に座標軸方向の集中力 X および Y が作用する Fig. 6 のような問題を考えよう。

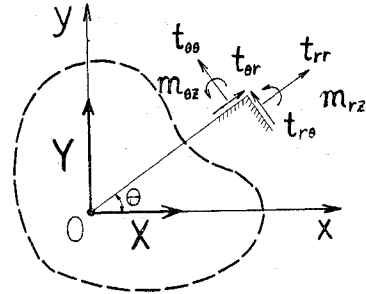


Fig. 6 An infinite plate applied the concentrated forces X and Y at the origin of coordinates (x, y) .

この種の問題はいわゆる“特異性を有する問題”(singular problems) といわれるものであって、従来までの古典弾性論においても解の唯一性が成立せず、擬特異解(pseudo-singular solutions)の存在が指摘されているのと同様に、あるいはそれ以上にマイクロポーラ理論あるいは偶応力理論の、場の方程式は古典理論のそれよりも一般に高次であるから、より多彩な間違っただ解が得られる危険性があるが、そのことに注意しながら考えていくことにする。

無限遠での応力は作用せず、また半径 $r=R$ の円孔周縁に作用する応力は次のように一定の大きさや方向を持っているとする。

$$X_n = \frac{X}{2\pi R}, Y_n = \frac{Y}{2\pi R} \dots (60)$$

このことから、 $a_0 = a_0' = 0$ であり、また

注7) しかしながら、Huigol の論文²⁷⁾には非常に多くのミスプリントと間違いが散見される。たとえば、この例の場合に対する複素ポテンシャル $\Phi(z)$ および $\Psi(z)$ に間違いがあり、彼の論文の変位式に符号および係数にミスプリントおよび誤りがある。根本的には Huigol の論文の (4.6)₁ に問題があり、本論文の (42)₄ で $n=1$ とおいたものが正しい。

$$a_1 = -\frac{X+iY}{2\pi(1+k)}, a_1' = \frac{k(X-iY)}{2\pi(1+k)} \dots\dots(61)$$

が成立することになる³³⁾。またその他の係数のうち、以下のものは零、すなわち

$$a_n = 0 \quad (n \geq 2), a_2' = a_n' = 0 \quad (n \geq 4) \dots\dots(62)$$

となる。

ここで、標記の問題とするために2つの極限操作を行う。すなわち、まずその第1は孔の半径を零に収縮していったとき (i.e. $R \rightarrow 0$ のとき)、 X_n, Y_n は X および Y が一定値を保ちながら (つまり、 R に反比例して) 無制限に増大するとする。このことは、 a_1 および a_1' はその値を保持したままであることを意味する。第2は Huilgol と同様に $R \rightarrow 0$ のとき $m_{rz} \rightarrow 0$ と仮定する (この仮定の妥当性については問題のあるところであり、いわゆる擬特異解の可能性が生じるところである。これについては後で触れる)。

第2の仮定は (45) を考慮すると次の式と等価な意味を有するものである。

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{n}{R^{n+1}} i\bar{b}_n + (c_n + id_n) \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{4l_1} \right] = 0 \quad (n \geq 1) \dots\dots(63)$$

ここで、

$$\lim_{R/l_1 \rightarrow 0} \left[\frac{R}{l_1} \cdot \frac{K_0(R/l_1)}{K_1(R/l_1)} \right] = 0, \quad \lim_{R/l_1 \rightarrow 0} \left[\frac{R}{l_1} K_1 \left(\frac{R}{l_1} \right) \right] = 1$$

および 付録 I に示した変形ベッセル関数に対する漸化公式を考慮して整理すると、(63) は最終的に次式のようになる。

$$i\bar{b}_n + \frac{2^n \cdot n!}{4^n} l_1^n (c_n + id_n) = 0, \quad (n \geq 1) \dots\dots(64)$$

係数の基礎関係式 (31) を考慮すると

$$c_1 - id_1 = 8(1-\nu) \frac{l^2}{l_1} a_1 = -4(1-\nu) \frac{l^2}{l_1} \cdot \frac{X+iY}{\pi(1+k)} \dots\dots(65)$$

であり、(62)₁ よりそのほかの c_n, d_n はすべて零となる。

係数 a_3' は (41)₄ で $n=1$ とおいて求めると次のようになる。

$$a_3' = 2a_1 \left[R^2 - 8(1-\nu)l^2 + 4(1-\nu)R^2 \frac{l^2}{l_1^2} K_2 \left(\frac{R}{l_1} \right) \right] \dots\dots(66)$$

ここで、 $R \rightarrow 0$ の極限操作を行うと $a_3' = 0$ となり、したがって、複素ポテンシャル ϕ, Ψ および偶応力関数 V は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(z) &= a_1 z^{-1}, \quad \Psi(z) = a_1' z^{-1} \\ V(z, \bar{z}) &= b_1 z^{-1} + \bar{b}_1 \bar{z}^{-1} + K_1 (c_1 \sin \theta + d_1 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots(67)$$

ここに、 a_1, a_1' は (61) で与えられ、 b_1, c_1 および d_1 は、(31), (65) より

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{2(1-\nu)(-Y+iX)}{\pi(1+k)} l^2 \\ c_1 &= -\frac{4(1-\nu)X}{\pi(1+k)} \cdot \frac{l^2}{l_1}, \quad d_1 = -\frac{Y}{X} c_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(65)'$$

となる。

これから、マイクロポーラ理論による、いわゆる Kelvin 問題に対する応力、変位が以下のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} &= -\frac{X \cos \theta + Y \sin \theta}{2\pi(1+k)r} \left\{ (k+3) - 8(1-\nu) \cdot \left(\frac{l}{r} \right)^2 \left[2 - 2\frac{r}{l_1} K_1 - \left(\frac{r}{l_1} \right)^2 K_0 \right] \right\}, \\ t_{\theta\theta} &= \frac{X \cos \theta + Y \sin \theta}{2\pi(1+k)r} \left\{ (k-1) - 8(1-\nu) \cdot \left(\frac{l}{r} \right)^2 \left[2 - 2\frac{r}{l_1} K_1 - \left(\frac{r}{l_1} \right)^2 K_0 \right] \right\}, \\ t_{r\theta} &= \frac{X \sin \theta - Y \cos \theta}{2\pi(1+k)r} \left\{ (k-1) + 8(1-\nu) \cdot \left(\frac{l}{r} \right)^2 \left[2 - 2\frac{r}{l_1} K_1 - \left(\frac{r}{l_1} \right)^2 K_0 \right] \right\}, \\ t_{\theta r} &= \frac{X \sin \theta - Y \cos \theta}{2\pi(1+k)r} \left\{ (k-1) + 8(1-\nu) \left(\frac{l}{r} \right)^2 \cdot \left[2 - 2\frac{r}{l_1} K_1 - \left(\frac{r}{l_1} \right)^2 K_0 - \left(\frac{r}{l_1} \right)^3 K_1 \right] \right\}, \\ m_{rz} &= \frac{4(1-\nu)(X \sin \theta - Y \cos \theta)}{\pi(1+k)} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{r}{l_1} \right)^2 \left(\frac{l_1}{r} K_1 + K_0 \right) - 1 \right\}, \\ m_{\theta z} &= \frac{4(1-\nu)(X \cos \theta + Y \sin \theta)}{\pi(1+k)} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{r}{l_1} K_1 \right), \\ u_r &= \frac{X \cos \theta + Y \sin \theta}{4\pi G(1+k)} \left\{ H_0 - 2k \log r + 1 - 8(1-\nu) \left(\frac{l}{r} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{l_1} \right) K_1 \right] \right\}, \\ u_\theta &= \frac{-X \sin \theta + Y \cos \theta}{4\pi G(1+k)} \left\{ H_0' - 2k \log r - 1 + 8(1-\nu) \left(\frac{l}{r} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{l_1} \right)^2 K_0 - \left(\frac{r}{l_1} \right) K_1 \right] \right\}, \\ 4l^2 G \phi_z &= \frac{(X \sin \theta - Y \cos \theta)(1-\nu)}{\pi(1+k)} \cdot \frac{l^2}{r} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{r}{l_1} \right) K_1 \right\} \dots\dots(68) \end{aligned} \right.$$

なお、(68)_{7,8} の係数 H_0, H_0' は未定の積分定数で、たとえば、ある距離はなれた位置で集中力の影響がなくなるといふ仮定を導入することによって決定されるものである。

注 8) Huilgol と同じ誤りが Ariman & Zika の論文³³⁾にも見られる。また、Huilgol の結果を訂正することなくそのまま利用して別種の問題を解いた Hsu & Wang³⁴⁾ も根本的に疑問が生じる。さらに、Herrman 編 "R.D. Mindlin and Applied Mechanics" の本³⁵⁾も Huilgol の結果がそのまま引用されている。

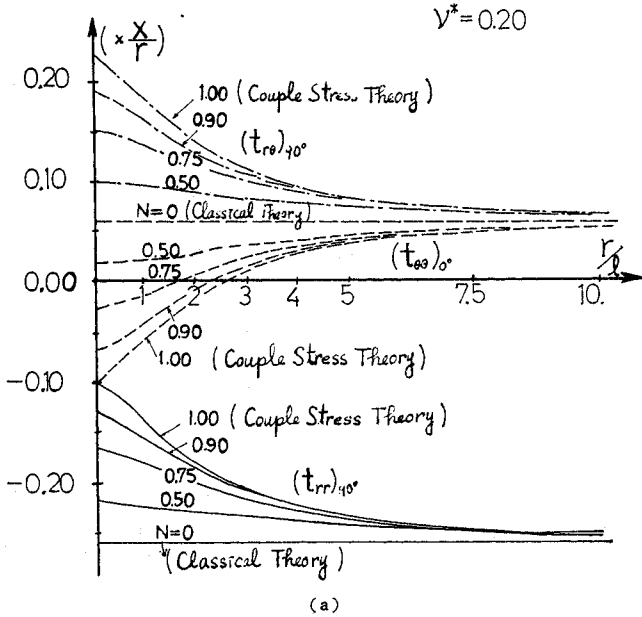
この結果で、 $l_1=l$ においても Huilgol の結果とは一致しない。これは 52 頁の脚注 7) で述べたように、基本関係式 (42) において Huilgol は誤りを犯していることによると考えられる注 8・前ページ参照。

ところで、上記の結果の導出過程において 2 つの極限操作を行ったが、特に第 2 の仮定は必ずしも妥当でないことが考えられる。Weitsman が指摘しているように、このような特異性を持つ問題の解は“正当に (properly)”

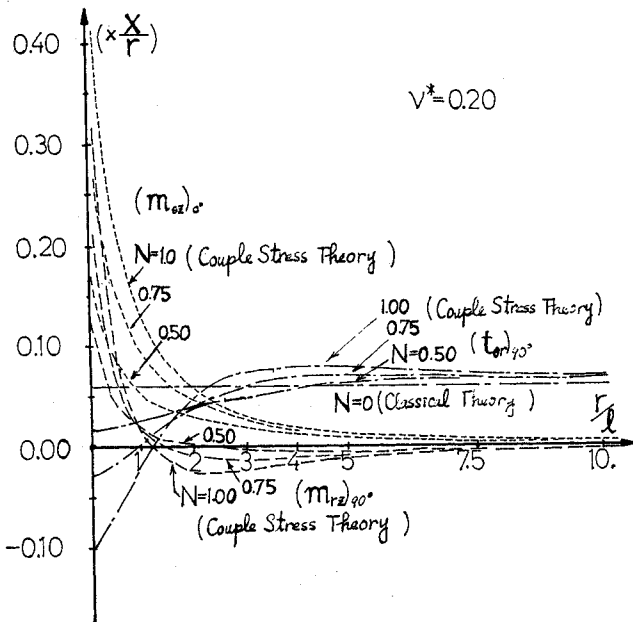
解が組み立てられたとき初めて正しい結果が得られる。そのような “proper” な方法としては対応する非特異な問題の解の適切な極限をとって望むべき特異解を得るか、あるいは、それ自身 “properly” に構築された既知の 2 次元または 3 次元特異解の重ね合わせによって 2 次元の特異解を作り上げるかのどちらかが考えられる。Weitsman は偶応力理論による 3 次元 Kelvin 問題の解を利用して後者の方法で 2 次元 Kelvin 問題の解を導出している³⁹⁾が、その結果と上記で得た著者らの解で $l_1=l$ とした偶応力理論に相当する結果は完全に一致する。また l_1, l を共に零に近づけた結果は古典弾性論のそれと一致する。したがって以上のことにより、 $R \rightarrow 0$ で $m_{rz} \rightarrow 0$ とした第二の仮定は偶応力理論までに対しては妥当であるといえる。しかし、最も一般の場合に相当する $l_1 \neq l$ のマイクロポーラ理論の 2 次元解として、(68) が妥当か否かは今後に残された課題である注 9)。

原点 O に x 軸方向の集中力 X が作用する場合の代表的な点の応力値と r/l との関係を、連成数 N をパラメーターとして図示したものの一例が Fig. 7 である。 $N=0$ (古典解) から $N=1$ (偶応力理論) の間にスムーズな遷移が認められる。

次に、座標系の原点に集中偶力 M が作用する問題を取り上げる。この例の場合も、先の集中力の場合と同様に解を一意に決定することはできない。したがって、3 次元結果の助けをかりることが最終的に必要である。まず、Fig. 8 において半径 $r=R$ の円上に働く $t_{r\theta}$ および m_{rz} が原点に働く反時計廻りの集中偶力 M_0 。



(a)



(b)

Fig. 7 Stress values at special points as a function of r/l for $\nu^*=0.20$ and various values of coupling number N .

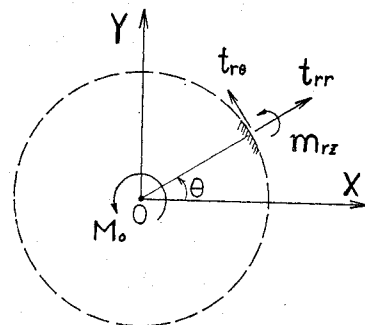


Fig. 8 An infinite plate applied the concentrated couple M_0 at the origin of coordinates (x, y) .

注 9) 2 次元のマイクロポーラ理論の変位に関する基礎方程式を Fourier 変換法によって Kelvin 問題を解析した 福井の結果⁴⁰⁾と 著者らのそれとは完全に一致している。

とつり合わなければならない。すなわち、

$$\int_0^{2\pi} (R t_{r\theta} + m_{rz}) R d\theta + M_0 = 0 \dots\dots\dots (69)$$

上式の $t_{r\theta}$ および m_{rz} は与えられた問題の性質から θ には無関係でなければならないから、

$$R t_{r\theta} + m_{rz} = -\frac{M_0}{2\pi R} \dots\dots\dots (70)$$

となる。

ところで、 m_{rz} に関係する偶応力関数 $V(z, \bar{z})$ において θ に無関係な値が求められるのは（一価性までも考慮すると）、(29) のうち、

$$\hat{V} = d_0 K_0 \left(\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{l_1} \right) \dots\dots\dots (71)$$

だけであることがわかる。この項からの応力成分への貢献を計算すると半径 $r=R$ の位置で

$$\left. \begin{aligned} \hat{t}_{rr} = \hat{t}_{\theta\theta} = \hat{m}_{\theta z} = 0, \quad \hat{t}_{r\theta} &= \frac{K_1}{l_1 R} d_0 \\ \hat{t}_{\theta r} &= \frac{K_0 + K_2}{2 l_1^2} d_0, \quad \hat{m}_{rz} = -\frac{K_1}{l_1} d_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (72)$$

が得られる。関数 $V(z, \bar{z})$ 以外による偶応力への寄与はないから (70) の m_{rz} と上記の \hat{m}_{rz} は等しい。つまり、 $m_{rz} = \hat{m}_{rz}$ である。

したがって、(70) の $t_{r\theta}$ は (72) よりの V による分と、残りは Airy の応力関数 U による寄与分から成り立っている。いまその差を $\hat{t}_{r\theta} = t_{r\theta} - \hat{t}_{r\theta}$ としておく。この関係を (70) に代入し、(72) を考慮すると最終的に

$$R \hat{t}_{r\theta} = -\frac{M_0}{2\pi R} \dots\dots\dots (73)$$

が得られる（おもしろいことに (72) の $\hat{t}_{r\theta}$ および \hat{m}_{rz} は任意の位置でつり合った外力系を構成する）。

したがって、前述の通り応力関数 U の係数が (73) を満足するように決定すればよい。これはそのまま古典弾性論の手法が使える。すなわち、(42)_{1,2} において、半径 $r=R$ の位置で (73) による一定せん断応力 $\hat{t}_{r\theta}$ が働くのであるから、

$$A_0 = -\frac{M_0}{2\pi R^2} i, \quad A_n = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \dots\dots (74)$$

となる。

ところで、(42)₁ のうちの係数 d_0 の項による分 ($-i K_0 / l_1 R \cdot d_0$) は別途 (72) で考えてあるから、これを除いたものと上式とから、

$$a_2' = \frac{M_0}{2\pi} i \dots\dots\dots (75)$$

が得られる。そのほかの a_n, a_n' はすべて零である。

上述の結果では係数 d_0 に何らの拘束条件はなく任意の値をとり得ることを示している。これは、先にも述べたように 2 次元問題に特有の特異性に関連することであって、この特異性は 3 次元問題からの演繹によって解消される。Y. Weitsman は偶応力理論に対して実変数を用いて d_0 が次の値をとることを証明した³⁶⁾。

$$d_0 = \frac{M_0}{2\pi} \dots\dots\dots (76)$$

したがって与えられた問題に対する応力、変位成分は最終的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} = t_{\theta\theta} &= 0 \\ t_{r\theta} &= -\frac{M_0}{2\pi r^2} \left(1 - \frac{r}{l_1} K_1 \right) \\ t_{\theta r} &= -\frac{M_0}{2\pi r^2} \left\{ 1 - \frac{r}{l_1} \left(K_1 + \frac{r}{l_1} K_0 \right) \right\} \\ m_{rz} &= -\frac{M_0}{2\pi} \cdot \frac{K_1}{l_1}, \quad m_{\theta z} = 0 \\ 2Gu_r &= 0 \\ 2Gu_\theta &= \frac{M_0}{2\pi r} \left(1 - \frac{r}{l_1} K_1 \right) \\ 4l^2 G\phi_z &= \frac{M_0}{2\pi} K_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (77)$$

7. 結 言

以上、微視的考察から出発したマイクロポーラ理論および偶応力理論に対する 2 次元静的問題を複素変数法を用いて理論式を統一的に整理し、いくつかの基本問題の解を具体的に示したが、それらの結果で係数を特別な値にすれば古典理論に一致する。このほかにも、ここで得た結果から、いくつかの問題の解を導くことが可能である。

この種のいわゆる“一般化連続体”の線形理論はすでに、ほぼ完成された領域にまで達しているといえるが、個別的にはまだ多数の問題が残されている。たとえば、非円形孔（楕円形あるいは任意形状の孔）に対する解析については今後、実施しなければならない課題である。特に、ここで取り上げた複素変数法による 2 次元問題についていえば、Muskhelishvili の弾性論の本で扱われている問題に対応する形の理論式の整理、具体例の提示等を行う必要がある。なお、この種の理論の適用例として、格子構造あるいは骨組構造等のいわゆる不連続体を Cosserat 性を考慮した連続体への置換えの試み^{37)~40)}が二、三なされており、まだその評価は定まっていないが、今後の発展が期待されているものの一つである。

緒言でも述べたごとく、いま一つ重要なことはマイクロポーラ理論（または偶応力理論）の構成方程式において出現する 6 個（または 4 個）の力学定数の実験的な決定に対する努力であろう。

なお、本論文をとりまとめるにあたり、終始、ご鞭撻をいただいております京都大学 丹羽義次教授ならびに、適切な助言と文献の提供をして下さいました京都大学 小林昭一教授、福井卓雄助手に深甚の謝意を述べる次第である。

付 録 I 変形ベッセル関数 $K_n(r/l_1)$ の
微分公式および漸化公式

(A) 微分公式

以下の微分公式は $n=0$ を含めてすべての正整数に対して成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K_n}{\partial z} &= -\frac{1}{2} e^{-i\theta} \left(\frac{n}{r} K_n + \frac{1}{l_1} K_{n-1} \right), \\ \frac{\partial K_n}{\partial \bar{z}} &= -\frac{1}{2} e^{i\theta} \left(\frac{n}{r} K_n + \frac{1}{l_1} K_{n-1} \right), \\ \frac{\partial^2 K_n}{\partial z^2} &= \frac{1}{4} e^{-2i\theta} \left\{ \frac{n(n+2)}{r^2} K_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{2n}{l_1 r} K_{n-1} + \frac{1}{l_1^2} K_{n-2} \right\}, \\ \frac{\partial^2 K_n}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{n^2}{4 r^2} K_n + \frac{n-1}{2 l_1 r} K_{n-1} + \frac{1}{4 l_1^2} K_{n-2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.1)$$

ただし、 $K_n = K_n\left(\frac{r}{l_1}\right) = K_n\left(\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{l_1}\right)$ であり、 $K_{-1} = K_1$ 、 $K_{-2} = K_2$ と解釈してやればよい。

(B) 漸化公式

電子計算機を使用する場合、0 次および 1 次の変形ベッセル関数の 2 種類がライブラリーとして整備されているだけであり、それ以外の高次ものは漸化式によって計算を実施しなければならない。ここでは通常の数学公式集にある漸化公式とは異なる公式を以下に示す。

この公式は (64) を誘導する場合にも必要である。

$$K_{n+1}\left(\frac{r}{l_1}\right) = s_{n+1} K_1\left(\frac{r}{l_1}\right) + s_n K_0\left(\frac{r}{l_1}\right) \dots (A.2)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= q_n = \frac{2nl_1}{r} = \frac{2nl_1}{\sqrt{z\bar{z}}} \\ s_{j+2} &= s_{j+1}q_{j+2} + s_j \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.3)$$

付 録 II

古典弾性論における弾性定数として、せん断弾性係数を G^* 、ポアソン比を ν^* とした場合、マイクロポーラ理論における (3)_a''' の G, ν その他の係数がどのような関係になるかを連成数 N を用いて表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{1}{2} (2\mu + \kappa) \quad (\equiv G^*) \\ \nu &= \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu + \kappa} \quad (\equiv \nu^*) \\ k &= \frac{2(\lambda + 3\mu) + 3\kappa}{2(\lambda + \mu) + \kappa} = 3 - 4\nu^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{2N^2}{1-N^2} G^* \\ r &= 2\kappa l_2^2 = \frac{4N^2 G^*}{1-N^2} \cdot \frac{1-N^2}{N^2} l^2 = 4l^2 G^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.5)$$

参 考 文 献

- 1) Voigt, W. : Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse des Krystalle I, II, Abh. Ges. Wiss., Göttingen, 34 (1887).
- 2) Cosserat, E. and F. : Theory des corps deformable, Herman et Fils, Paris (1909).
- 3) Günther, W. : Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums, Abh. der Bransch. Wiss. Gesellschaft, 195~213, 10 (1958).
- 4) Truesdell, C. and R.A. Toupin : The Classical Field Theories, Encyclopedia of Physics, Vol. III/1, Springer (1960).
- 5) Grioli, G. : Elastica Asimmetrica, Annali Mat. pura appl., Ser. IV, 389~417, 50 (1960).
- 6) Aero, E.L. and E.V. Kuvshinskii : Fundamental Equations of the Theory of Elastic Media with Rotationally Interacting Particles, Soviet Physics-Solid States, 1272~1281, 2 (1961). (Eng. Translation of Fizika Tverdogo, 2 (1960)).
- 7) Toupin, R.A. : Elastic Materials with Couple-Stresses, Arch. Rat. Mech. Anal., 385~414, 11 (1962).
- 8) Mindlin, R.D. and H.F. Tiersten : Effects of Couple-Stresses in Linear Elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal., 415~448, 11 (1962).
- 9) Mindlin, R.D. : Influence of Couple-Stresses on Stress Concentrations, Exp. Mech. 1~7, Jan. (1963).
- 10) Schaefer, H. : Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuums, Mittzellanen der Angew. Mech., Festschrift W. Tollmien, 277~292 (1962).
- 11) Mindlin, R.D. : Micro-structure in Linear Elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal., 51~78, 16 (1964).
- 12) Green, A.E. and R.S. Rivlin : Multipolar Continuum Mechanics, Arch. Rat. Mech. Anal., 113~147, 17 (1964).
- 13) Eringen, A.C. and E.S. Suhubi : Nonlinear Theory of Simple Microelastic Solids, Int. J. Eng. Sci., 189~203, 389~404, 2 (1964).
- 14) Muki, R. and E. Sternberg : The Influence of Couple-stresses on Singular Stress Concentrations in Elastic Solids, ZAMP, 611~648, 16 (1965).
- 15) Pal'mov, N.A. : Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity, 496~504, PMM (1965). (Eng. Translation of PMM (1964)).
- 16) Neuber, H. : On the General Solution of Linear Elastic Problem in Anisotropic and Isotropic Cosserat Continua, Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech., Munchen, (1964), 153~158.
- 17) Kröner, E. (Ed.) : IUTAM Symp., Mechanics of Generalized Continua, Springer (1968).
- 18) Weitsman, Y. : Couple-Stress Effects on Stress Concentration Around a Cylindrical Inclusion in a Field of Uniaxial Tension, J. Appl. Mech., 424~428 (1965).
- 19) Koiter, W.Y. : Couple-Stresses in the Theory of Elasticity, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen-Amsterdam, Ser. B, 17~44, 67 (1964).
- 20) Schjive, J. : Note on Couple Stresses, J. Mech. Phys.

- Solids, 113~120, **14** (1966).
- 21) Ellis, R.W. and C.W. Smith : A Thin-plate Analysis and Experimental Evaluation of Couple-stress Effects, *Exp. Mech.*, 372~380 (1967).
 - 22) Brown, C.B. and J. Evans : On the Application of Couple-Stress Theories to Granular Media, *Geotechnique*, 356~361, **22** (1972).
 - 23) Gauthier, R.D. and W.E. Jahsman : A Quest for Micropolar Elastic Constants, *J. Appl. Mech.*, 369~374 (1975).
 - 24) Hoppman, W.H. and F.O.F. Shahwan : Physical Model of a Three-constant Isotropic Elastic Material, *J. Appl. Mech.*, 837~841 (1965).
 - 25) Perkins, R.W. Jr. and D. Thompson : Experimental Evidence of a Couple-Stress Effect, *AIAA Jour.*, 1053~1055, **11** (1973).
 - 26) Mindlin, R.D. : Complex Representation of Displacements and Stresses in Plane Strain with Couple-Stresses, *Proc. Int. Symp. on Application of the Theory of Functions in Continuum Mech.*, Tbilisi, USSR, 256~259, (1963).
 - 27) Huilgol, R.R. : On the Concentrated Force Problem for Two-Dimensional Elasticity with Couple Stresses, *Int. J. Eng. Sci.*, 81~93, **5** (1967).
 - 28) Ariman, T. and M.J. Zaka : On Complex Potentials in Micropolar Elasticity, *ZAMM*, 183~188, **51**(1971).
 - 29) Cowin, S.C. : Stress Functions for Cosserat Elasticity, *Int. J. Solids and Structures*, 389~397, **6** (1970); An Incorrect Inequality in Micropolar Elasticity Theory, *ZAMP*, 494~497, **21** (1970); Singular Stress Concentrations in Plane Cosserat Elasticity, *ZAMP*, 979~982, **20** (1969).
 - 30) Eringen, A.C. : Theory of Micropolar Elasticity, *Fracture* (Ed. by H. Liebowitz), Vol. II, Academic Press 621~729 (1968); Linear Theory of Micropolar Elasticity, *J. Math. Mech.*, 909~923, **15** (1966).
 - 31) Biot, M.A. : Further Developments of the Theory of Internal Buckling of Multilayers, *Bull. Geol. Soc. Am.*, 833~840, **76** (1965).
 - 32) Lippman, H. : A Cosserat-type Theory of Plastic Flow, *Proc. 12th Int. Cong. Appl. Mech.*, Stanford Univ. (1968).
 - 33) Muskhelishvili, N.I. : Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity (4th Ed.), (Eng. Translation by J.R.M. Radok), Noordhoff (1963).
 - 34) Hsu, Y.C. and W.J. Wang : Couple-Stresses Effects in Vicinity of Interface for Infinite Elastic Plane with a Rigid Inclusion, *Proc. Int. Cong. Mech. Behavior of Materials*, Kyoto 1971, Vol. V, 1~10 (1972).
 - 35) Tiersten, H.F. and J.L. Bleustein : Generalized Elastic Continuum, R.D. Mindlin and *Applied Mechanics*, (Ed. by G. Herrmann), Pergamon Press, 67~103 (1973).
 - 36) Weitsman, Y. : Two Dimensional Singular Solutions in Infinite Regions with Couple-Stresses, *Quat. Appl. Math.*, 485~489, **25** (1968).
 - 37) Askar, A. and A.S. Cakmak : A Structural Model of A Micropolar Continuum, *Int. J. Eng. Sci.*, 583~589, **6** (1968).
 - 38) Banks, C.B. and U. Sokolowski : On Certain Two-Dimensional Applications of the Couple-Stress Theory, *Int. J. Solids and Structures*, 15~29, **4** (1968).
 - 39) 日置興一郎 : 立体トラスと交さばりの連続体への置換, スペースストラクチャーの解析 (日本鋼構造協会編), 鹿島出版, 89~114 (1970).
 - 40) Bazant, Z.P. and M. Christensen : Analogy Between Micropolar Continuum and Grid Frameworks under Initial Stress, *Int. J. Solids and Structures*, 327~346, **8** (1972).
 - 41) Selvadurai, A.P.S. : Bending of an Infinite Beam Resting on a Porous Elastic Medium, *Geotechnique*, 407~421, **23** (1973).
 - 42) 福井卓雄 : Linear Micropolar Elasticity における二次元 Kelvin 問題の解, (1976) (未発表論文)
 - 43) Ariman, T., M.A. Turk and N.D. Sylvester : Microcontinuum Fluid Mechanics—A Review, *Int. J. Eng. Sci.*, 905~930, **11** (1973); Review Article—Applications of Microcontinuum Fluid Mechanics, *Int. J. Eng. Sci.*, 273~293, **12** (1974).
 - 44) Bhargava, R.D. and S.K. Ghosh : On the Stress Concentration Problem Around a Circular Hole in Plane Asymmetric Elasticity, *Acta Mech.*, 127~130, **21**(1975).

(1976.7.27・受付)