

ケーブル構造に関する一理論解析*

A THEORETICAL ANALYSIS OF CABLE ASSEMBLIES

阿井正博**・西岡隆***・奥村敏恵****

By Masahiro AI, Takashi NISHIOKA and Toshie OKUMURA

1. はじめに

土木構造物には従来より吊橋や斜張橋のような形式の確立されたケーブル構造があるが、近年においてケーブル・トラスやケーブル・ネットなどを用いた種々の新しいケーブル構造が考えられるようになり、一部はすでに実用の段階にはいつている。それに伴い、ケーブルの力学的特性に即した合理的かつ適用範囲の広い解析理論が必要とされるようになってきている。

ケーブル構造の解析では部材の曲げ剛性は無視されるのが普通である。この仮定のもとではケーブルの形状は不定形であり、確定しているのは長さや伸び剛性だけである。ケーブルの形状とは作用外力に呼応した抗外力機構としての形状であり、外力変化に対して幾何形の変わらないつり合いは一般に考えられない。すなわち、ケーブル部材自体に無限自由度の構造機構 (Structural Mechanism) がある。ケーブル構造の形状は内力により生じた幾何剛性で維持されており、解析では変位が小さくとも有限変位性を考慮する必要がある。このことは安定構造物とは異なるケーブル構造の基本的な力学特性といえる。

部材が非抗圧縮性であること、曲げ剛性がほとんどないこと、および部材断面が小さいことなどによりケーブル構造の変形は一般に大きい。そのために変形解析は幾何学的非線形問題として扱われる場合が多い。解法としてこれまでに提示されているもののほとんどは、基本的には骨組構造 (ピン結合) の大変形問題として解く方法^{8)~13)}である。また、ケーブル・ネットではさらに実際的な制約条件のもとに、網目に一致する格子を用いた特有の差分方程式の形で支配方程式が示されている^{14), 15)}。

これらはいずれもケーブル構造の中に選んだ有限個の代表点 (節点) の空間位置を基本の未知量とする変位法であり、節点間のケーブルを直線 (あるいは、曲率の小さい特定の曲線¹³⁾) とみなすことにより、節点の空間位置でケーブル構造の形状が離散的に記述されている。したがって、初期張力が大きく、外力を節点上の集中外力に置換しても十分な近似ができる場合には有効な方法であるが、大きくたわむ部材を含むケーブル構造の挙動を適確に表現することは難しい。また、分布外力を扱う場合の解は厳密には近似解でしかない。このような適用性の限界を考えると、ケーブルを直線部材とするこれらの方法は、骨組として近似できるケーブル構造を骨組として解いているものであり、ケーブルの集合体一般を扱う解析理論としては必ずしも適当ではないように思われる。

一方、以上のような変位法とは別に、単一ケーブルの変形解析の方法に Michalos, Birnstiel⁹⁾ や O'Brien, Francis⁹⁾ らのものがある。Michalos, Birnstiel が示したのは、分布外力を含むすべての外力を有限個の集中外力に置換する近似解法であるが、ケーブルの片端での断面力を基本の未知量として他端での適合条件から問題を解く応力法であり有効な実用計算法といえる。次いで、O'Brien, Francis は同様の考え方を受け継いで、区分的等分布外力と集中外力が作用した単一ケーブルの二次元問題を厳密に解き、さらに三次元にも拡張している⁶⁾。これらの応力法による単一ケーブルの変形解析において注目されることは、外力条件によらず繰り返し計算の対象となる未知量が一断面力だけであることである。このことは、ケーブルのように大きく変形する不定形部材を扱う場合には、前述した変位法と比較してきわめて合理的であるように思われる。

ケーブル構造は、前述したように初期引張力および外力を作用させてはじめて形状が決まり、変形も大きいことからいわゆる形状決定の問題が実用上重要となる。形状決定とは、部材長、部材断面定数等の構造パラメータを変化させることにより所定の外力条件のもとでのつ

* 本報告の一部内容は、土木学会第 29, 30 回年次学術講演会にて発表

** 学生会員 東京大学大学院博士課程

*** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

**** 正会員 工博 埼玉大学教授 理工学部建設基礎工学科

り合い状態を制御しようとする解析であり、これまでに多くの研究成果^{(14)~(20), (22)}が報告されている。しかし、変形解析と同様にケーブルを直線部材とした解析がほとんどであり、分布荷重をそのまま評価して形状決定を論じたものはないようである。

本報告では、最初に、任意の分布外力と集中外力が作用したケーブルのつり合い形状の一般解を求め、その解をケーブル構造一般に適用する変形解析の一方法を示している。その方法は一般解に含まれる未知パラメーターとしての適合力を対応する適合条件が満たされるように決める応力法であり、ケーブルの曲げ剛性を無視するという仮定のもとにケーブル構造一般に適用可能であり理論的に厳密であると考えられる。

次に、変形解析の繰り返し計算で用いる線形式を発展させて、つり合い形状、部材断面力と部材長、支持節点位置等間の線形式を求めて、それを修正式として形状決定へ応用することを試みた。また、外力の増分とつり合い形状の増分の関係も同様に求めて、つり合い状態での接線撓性を定式化することも行っている。

さらに、ケーブル構造を解析する上で常に問題とされる強非線形性による繰り返し計算での収束の問題についても考察し、収束域を広げるための一改良 Newton-Raphson 法を提示した。それは、Buchholdt⁽¹¹⁾による変位法で用いられている全ポテンシャル・エネルギーの最小化を考えた繰り返しの方法に対応するものであり、補ポテンシャル・エネルギーの最小化を考えて行う方法である。

2. 基礎方程式

ケーブルの曲げ剛性は無視するものとし、引張部材力は伸び率と線形関係にあるものとする。テンソル表示を採用するものとし、特に断わらない限り方向成分を表わす添字に関しては総和規約を適用している。

Fig. 1 に示すように、空間に固定された一般曲線座標系 $\{x^1, x^2, x^3\}$ を考え、無応力時の長さが l のケーブルの片端を原点 0 に固定して考える。原点 0 から伸び変形前のケーブルの重心線の長さに沿って埋込座標 s をとり、ケーブルの形状は s 座標を独立変数として

$$x^\alpha = x^\alpha(s), \alpha=1, 2, 3 \dots (1)$$

で記述するものとする。

ケーブルに作用する外力を

$$\text{分布外力: } \mathbf{q} = q_\alpha \mathbf{g}^\alpha, \text{ 集中外力: } \mathbf{P}_{(i)} = P_{(i)\alpha} \mathbf{g}^\alpha, \\ i=1, \dots, n \dots (2)$$

と表わす。ここに、分布外力は伸び前の単位長さ当りで定義されている。 $\{\mathbf{g}^\alpha\}$ は空間座標の反変基ベクトルであり、 $\mathbf{P}_{(i)}$ の作用点 s_i のしめる空間位置の反変基ベク

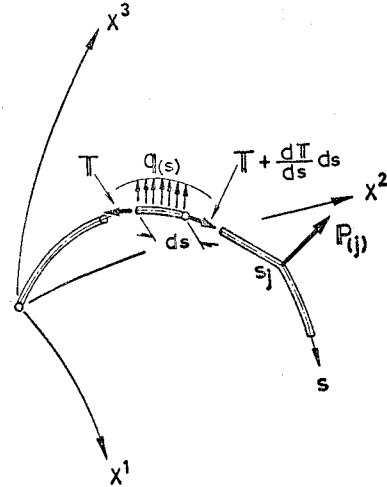


Fig. 1 Cable Element in Curvilinear Coordinates

トルを $\{g_{(i)\alpha}\}$ で表わしている。

伸び前の線素 ds とその伸び後の長さ $d\bar{s}$ の比を g 、伸び剛性を $\alpha(s)$ として、伸び率 ϵ 、引張部材力 T は

$$\epsilon = g - 1 = \{g_{\alpha\beta}^{(1)} x^\alpha x^\beta\}^{1/2} - 1 \dots (3)$$

$$T = \alpha \epsilon \dots (4)$$

と与えられる。ここに、 $\{g_{\alpha\beta}\}$ は空間座標の共変計量テンソルであり、記号 (1) は s に関する 1 階微分を表わす。

前式のスカラー量 T とは別に、 s 点の断面力(ベクトル量)を

$$\mathbf{T} = T_\alpha \mathbf{g}^\alpha \dots (5)$$

とすれば、微小区間 $[s, s+ds]$ での仮想仕事の式は

$$T \delta \epsilon ds - \left(\mathbf{T} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} ds \right) \cdot \left(\delta \mathbf{x} + \frac{d\delta \mathbf{x}}{ds} ds \right) \\ + \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{x} ds = 0$$

となり、式(2),(3),(5)を代入して展開すれば、つり合い方程式：

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{T}{g} g_{\alpha\beta}^{(1)} x^\beta \right] - \frac{T}{2g} g_{\beta\gamma, \alpha} x^\beta x^\gamma + q_\alpha = 0, \\ \alpha=1, 2, 3 \dots (6)$$

引張部材力 T と断面力の成分 $\{T_\alpha\}$ の関係式

$$T_\alpha = \frac{T}{g} g_{\alpha\beta}^{(1)} x^\beta \dots (7)$$

が得られる。ここで、 $\{g_{\alpha\beta}\}$ は $\{x^\alpha\}$ に関しては既知であるが、以上の式に含まれている $g_{\alpha\beta}$ は s 点の空間位置での計量テンソルであり、 $\{x^\alpha\}$ と同様に s に関する未知関数である。

次に境界条件を考える。集中外力の作用点 s_i をはさむ微小区間のつり合いを考えて、 s_i 点での境界条件：

$$\left[\frac{T}{g} g_{\alpha\beta}^{(1)} x^\beta \right]_{s_i-0}^{s_i+0} + P_{(i)\alpha} = 0, i=1, \dots, n, \alpha=1, 2, 3$$

$$\dots\dots\dots(8)$$

が求まる。終端が $\{x^{*1}, x^{*2}, x^{*3}\}$ の位置に固定されている場合には幾何学的条件:

$$x^\alpha|_{s=l} = x^{*\alpha}, \alpha=1, 2, 3 \dots\dots\dots(9)$$

がある。

3. 変形解析

(1) つり合い形状の一般解

作用する分布外力, 集中外力が, 作用点の空間位置にかかわらず, s 座標のみの関数で与えられる場合を考える。

2. に示した一般曲線座標系での成分表示による支配方程式をベクトル表示に直せば

$$\text{つり合い方程式: } \overset{(1)}{T}(s) + q = 0 \dots\dots\dots(10)$$

$$\text{ひずみ-変位関係: } \epsilon = g - 1 = |\overset{(1)}{x}| - 1 \dots\dots\dots(11)$$

$$\text{部材力-ひずみ関係: } T = a\epsilon \dots\dots\dots(12)$$

$$T \text{ と } T \text{ の関係: } T = T \overset{(1)}{x} / g \dots\dots\dots(13)$$

$$\text{集中外力作用点で: } [T(s)]_{s_i^+}^{s_i^0} + P_{(i)} = 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$\text{終端支持で: } x(l) = x^* \dots\dots\dots(15)$$

と書くことができる。

ここで, 空間座標を Fig. 2 のように直交デカルト座標にとるものとし, 式(10)~(15)に含まれる各ベクトルは3次元数ベクトルとして扱うものとする。また, 方向成分を表わす添字はすべて下付きとする。

q は s の関数, $P_{(i)}$ は既知量であるから, 式(10)を式(14)の条件のもとに積分することにより断面力 $T(s)$ は,

$$\begin{aligned} T(s) &= T_0 - \int_0^s q(s) ds - \sum_{s_i < s} P_{(i)} \\ &= T_l + \int_s^l q(s) ds + \sum_{s_i > s} P_{(i)} \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

となり区分的に連続な s の関数として得られる。 T_0, T_l は $s=0, l$ での断面力を表わす。

式(11), (12)を用いて式(13)の $\overset{(1)}{x}$ を $T \geq 0$ の条件のもとに a, T で表わし, s に関して積分すれば, ケ

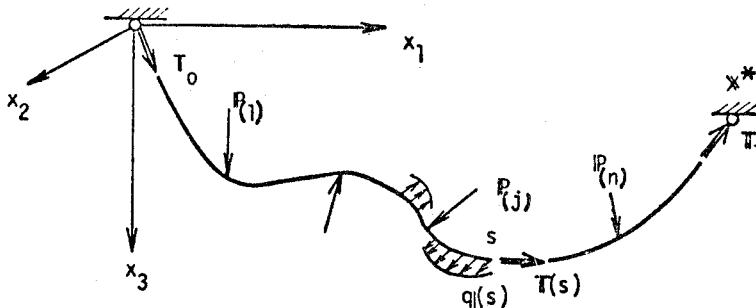


Fig. 2 Single Cable Under General Loading

ーブルのつり合い形状は,

$$x(s) = \int_0^s \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{|T(s)|} \right) T(s) ds \dots\dots\dots(17)$$

として求まる。このとき, ケーブルが片端だけで支持されている場合では式(16)の T_0 または T_l は力学的境界条件より直接決まるが, 両端で支持されている場合には, 式(15)を満たす T_0 や T_l をたとえば後述する繰り返し計算で求めなくてはならない。

(2) ケーブル構造の変形解析

Fig. 3 に示すようなケーブル構造の変形解析を考える。支持節点 j^* ($j^*=1, \dots, N_f$) が反力に応じて変位することは考慮するが, その場合にはケーブル構造に接する構造物の支持節点の反力と変位の関数関係は既知であるものとする。

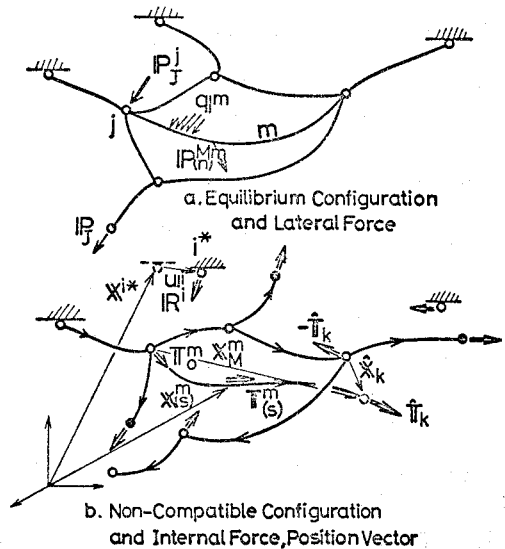


Fig. 3 Cable Assembly

構造の中の3本以上のケーブルが結合している点と自由端に浮動節点 j ($j=1, \dots, N$) を設け, 節点間を部材 m ($m=1, \dots, M$) と考えるものとする。部材の両端は始端と終端とに区別して s 座標の方向 (始端で $s=0$) を決める。その際に, 浮動節点 j に接続する部材数を M_j, M_j の内 j を終端とする部材数を M_j^e とするとき, $M_j^e \geq 1, j=1, \dots, N$ となるような部材方向をとるものとする。

次に, b図にしめすように, j を終端とする M_j^e 本の部材のうち, 任意の1部材を除いた $M_j^e - 1$ 本の部材を j から切り

離して別の擬似節点 i' をその終端に設け、連続しているはずの断面力は適合力 \hat{T}_i (擬似節点側に \hat{T}_i , 浮動節点側に $-\hat{T}_i$ とする) で置換するものとする。また、支持節点 j^* では、 j^* を終端とする $M_{j^*}^e$ 本の部材すべてを切り離して擬似節点を考え、適合力を考えるものとする。以上により、部材の s 方向は有限個の自由端に、反対方向は各一つの支持節点に連続することになり、a 図のケーブル構造は s 方向に分岐する部材の組み合わせ (b 図) に置き換えられる。以後、b 図のように考えたものを分岐型の組み合わせケーブルとよぶことにする。

分岐型の組み合わせケーブルでは、任意点の断面力はその点から s 座標方向側にある全部材に作用する外力と適合力の和で与えられ、適合力の値を仮定すれば式(17)を用いて各部材の形状が決まる。問題は、切断した箇所の適合条件が満たされるような適合力を求めることに帰着せられる。

適合条件 (適合力) の数 N_c は

$$N_c = \sum_j (M_j^e - 1) + \sum_{j^*} M_{j^*}^e = M - N \quad \dots\dots\dots(18 \cdot a)$$

で与えられる。ここに、 M, N はそれぞれ部材数、浮動節点数を表わす。あるいは、ケーブル構造の断面力は、式 (16) と節点のつり合いを連続の条件とするケーブル網での力の流れと考えることができ、 N_c は独立な回路の数を表わしている。支持節点が 2 つあればその間に回路が 1 つあり、それ以上支持節点が増すごとに独立な回路が 1 つずつ作られる。また、構造中でケーブルが閉じている部分 (閉合部) にも回路があり、

$$N_c = N_f + N_{\text{closed}} - 1 \quad \dots\dots\dots(18 \cdot b)$$

とも表わすことができる。ここに、 N_f, N_{closed} は支持節点数、閉合数を表わす。

適合力を考えて分岐した組み合わせケーブルに置換すれば、前述したように、ケーブル構造の内力は適合力と外力の一次結合で表わすことができる。内力のうち、各部材始端の断面力、支持節点反力 (節点を受ける力) を表わす一般式は

$$\begin{aligned} \text{部材始端の断面力: } \{T_0\} &= [S_P] \{\hat{T}\} \\ &+ [S_{PJ}] \{P_j\} + [S_{PM}] \{\bar{P}_M\} \\ &\dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{支持節点反力: } \{R\} &= [S_{P^*}] \{\hat{T}\} + [S_{P_j^*}] \{P_j\} \\ &+ [S_{P_M^*}] \{\bar{P}_M\} \quad \dots\dots(20) \end{aligned}$$

$\{\hat{T}\}$: 適合力, $\{P_j\}$: 浮動節点の集中外力
 $\{\bar{P}_M\}$: 各部材上の外力の和

と表わすことができる。ここに、 $\{\bar{P}_M\}$ は

$$\bar{P}_M^m = \left(\int_0^l q(s) ds + \sum_j P_{(j)}^M \right)^m, \quad m=1, \dots, M$$

を成分とする列ベクトルである。また、 $[S_P], [S_{PJ}], [S_{PM}], [S_{P^*}], [S_{P_j^*}], [S_{P_M^*}]$ は接続マトリックス

であり、 (3×3) の $\pm I, O$ 行列 (I : 単位行列) を成分とする。

$\{P_j\}, \{\bar{P}_M\}$ は既知であるから適合力 $\{\hat{T}\}$ を仮定すれば式 (16), (19) より部材断面力が決まり、式 (17) より部材の形状が決まる。ここで、そのように得られた部材の始端から終端までの相対位置ベクトルを $x_M^m, m=1, \dots, M$ で表わすことにする。

支持節点の反力 $\{R\}$ と変位 $\{u\}$ の関係:

$$u^j = u^j(R^1, \dots, R^{N_f}), \quad j=1, \dots, N_f \quad \dots\dots(21)$$

が既知であれば、式 (20) を代入して支持節点変位は決まる。

仮定した適合力は一般には真値ではないから、以上の結果として適合力を考えている箇所に不適合が生じる。この不適合ベクトル $\{\mathfrak{x}\}$ は部材両端間の相対ベクトル $\{x_M\}$, 支持節点変位 $\{u\}$ および変位前の支持節点位置 $\{x^*\}$ の一次結合で表わされ

$$\begin{aligned} \text{不適合ベクトル: } \{\mathfrak{x}\} &= [S_X] \{x_M\} \\ &+ [S_{X^*}] \{x^* + u\} \quad \dots\dots(22) \end{aligned}$$

と書ける。ここに、 $[S_X], [S_{X^*}]$ は接続マトリックスであるが、反傾関係 (Contragredience) により、式 (19), (20) の $[S_P], [S_{P^*}]$ と

$$[S_X] = [S_P]^t, \quad [S_{X^*}] = [S_{P^*}]^t \quad \dots\dots(23)$$

の関係にある。反傾関係については、補遺 1. に述べている。

適合条件: $\{\mathfrak{x}\} = \{O\}$ を満たす適合力は、4. (2) で述べている繰り返し計算より求まる。それにより真の適合力 $\{\hat{T}\}^*$ が得られたものとする。 $\{\hat{T}\}^*$ での $\{x_M\}, \{u\}$ を用いてつり合い状態での浮動節点位置 $x_j^j, j=1, \dots, N$, 部材上の s 点の空間位置 $x^m(s), m=1, \dots, M$, は

$$\begin{aligned} \text{浮動節点位置: } \{x_j\} &= [S_{X_j}] \{x_M\} \\ &+ [S_{X_j^*}] \{x^* + u\} \quad \dots\dots(24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s \text{ 点の位置: } \{x(s)\} &= [S_{X_M}] \{x_M\} \\ &+ [S_{X_M^*}] \{x^* + u\} \\ &+ \left\{ \int_0^s \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{|T(s)|} \right) T(s) ds \right\} \\ &\dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

と表わすことができる。式(25)の最初の 2 項は部材始端の空間位置を表わしている。接続マトリックス $[S_{X_j}], [S_{X_M}], [S_{X_j^*}], [S_{X_M^*}]$ は、反傾関係により式 (19), (20) の $[S_{P_j}], [S_{P_M}], [S_{P_j^*}], [S_{P_M^*}]$ と

$$\begin{aligned} [S_{X_j}] &= [S_{P_j}]^t, \quad [S_{X_j^*}] = [S_{P_j^*}]^t \\ [S_{X_M}] &= [S_{P_M}]^t - [I], \quad [S_{X_M^*}] = [S_{P_M^*}]^t \\ &\dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

の関係にある。

4. 線形化式と繰り返し計算

本報告では解析の際に生じる一連の非線形代数方程式

の解法として、線形式から求めた修正式による繰り返し計算を考えている。

(1) 単一ケーブルの線形式

断面力が $\mathbf{T}(s)$ である単一ケーブルのつり合い形状は式 (17) で与えられる。断面力の微小増分 $\delta\mathbf{T}(s)$, $s=\tau$ の点にて部材長の増分 δl を考えたときのつり合い形状の増分は、式 (17) をそのまま線形式化することにより、

$$\delta\mathbf{x}(s) = \int_0^s [\mathbf{A}(s)]\delta\mathbf{T}(s)ds + [\mathbf{H}(\tau, s)]\mathbf{e}(\tau)\delta l \quad \dots\dots\dots(27)$$

として与えられる。ここに、 $[\mathbf{A}(s)]$, $[\mathbf{H}(\tau, s)]$, $\mathbf{e}(\tau)$ は

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{A}(s)] &= \left(\frac{1}{\alpha(s)} + \frac{1}{|\mathbf{T}(s)|} \right) \mathbf{I} - \frac{\mathbf{T}(s)\mathbf{T}(s)^t}{|\mathbf{T}(s)|^3} \\ [\mathbf{H}(\tau, s)] &= \begin{cases} \mathbf{I} & (\tau < s) \\ \mathbf{0} & (s < \tau) \end{cases} \\ \mathbf{e}(\tau) &= \left(\frac{1}{\alpha(\tau)} + \frac{1}{|\mathbf{T}(\tau)|} \right) \mathbf{T}(\tau) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(28)$$

であり、ケーブルの伸びを考える場合 ($1/\alpha > 0$) には $[\mathbf{A}(s)]$ は正値対称行列である (補遺 2.)。

式 (27) はケーブルの形状の増分量を表わす線形式の一般形であり、問題に応じた $\delta\mathbf{T}(s)$, δl を考えることにより対応する線形式化式が得られる。

両端固定の単一ケーブルにおいて幾何学的条件式 (15) を満たす適合力 \mathbf{T}_l を求めることを考える。適合力の増分 $\delta\mathbf{T}_l$ による断面力の増分は、式 (16) より、 $\delta\mathbf{T}(s) = \delta\mathbf{T}_l$: const. であるから、式 (27) の第 1 項のみを考えて線形式化式は

$$\delta\mathbf{x}(l) = \left[\int_0^l \mathbf{A}(s)ds \right] \delta\mathbf{T}_l \quad \dots\dots\dots(29)$$

となる。したがって、最初に適合力 $\mathbf{T}_{l[\alpha]}$ を仮定し、不適合量に応じて適合力を

$$\mathbf{T}_{l[\alpha+1]} = \mathbf{T}_{l[\alpha]} + \left[\int_0^l \mathbf{A}(s)ds \right]_{[\alpha]}^{-1} (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(l)_{[\alpha]})$$

と修正する繰り返し計算により収束値を得ることが期待される。ここに、 $[\alpha]$ は繰り返し回数を表わす。

(2) ケーブル構造の適合力を求める繰り返し計算

ケーブル構造の適合力の増分による部材断面力、支持節点反力の増分は、式 (16), (19), (20) より、 $\{\delta\mathbf{T}(s)\} = \{\delta\mathbf{T}_0\} = [\mathbf{S}_P]\{\delta\hat{\mathbf{T}}\}$, $\{\delta\mathbf{R}\} = [\mathbf{S}_P^*]\{\delta\hat{\mathbf{T}}\}$ で与えられる。 $\delta\mathbf{T}_0^m$ による \mathbf{x}_M^m の増分は式 (29) と同様に表わされ、関係式 (21) と同様に支持節点の反力と変位の間の微係数 $\partial u^i / \partial R^j$, $i, j=1, \dots, N_f$ も既知であるとすれば、 $\{\delta\mathbf{R}\}$ による $\{\delta\mathbf{u}\}$ もわかる。以上より、 $\{\delta\hat{\mathbf{T}}\}$ による不適合量の増分 $\{\delta\mathbf{x}\}$ は

$$\{\delta\mathbf{x}\} = [\mathbf{U}_X^P]\{\delta\hat{\mathbf{T}}\} \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$[\mathbf{U}_X^P] = [\mathbf{S}_X][\mathbf{Q}][\mathbf{S}_P] + [\mathbf{S}_X^*][\mathbf{Q}^*][\mathbf{S}_P^*] \quad \dots\dots\dots(31)$$

とマトリックス表示することができる。ここに、 $[\mathbf{Q}][\mathbf{Q}^*]$ は、

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{Q}(\mathbf{T}_0)] &= \begin{bmatrix} \left[\int_0^l \mathbf{A}ds \right]^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[\int_0^l \mathbf{A}ds \right]^M \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{Q}^*(\mathbf{R})] &= \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial u^1}{\partial R^1} \right] & \dots & \left[\frac{\partial u^1}{\partial R^{N_f}} \right] \\ \vdots & & \vdots \\ \left[\frac{\partial u^{N_f}}{\partial R^1} \right] & \dots & \left[\frac{\partial u^{N_f}}{\partial R^{N_f}} \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(32 \cdot a, b)$$

で表わされる $(3M \times 3M)$, $(3N_f \times 3N_f)$ の正方マトリックスである。補遺 2. で述べているように $[\mathbf{U}_X^P]$ は一般に正値対称行列であり、不適合量 $\{\mathbf{x}\}$ と適合力 $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ の間には一対一の対応がある。

$\{\mathbf{x}\}$ と $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ の間の接線係数 $[\mathbf{U}_X^P(\hat{\mathbf{T}})]$ を用いて、適合力を求める Newton-Raphson 法の修正式は

$$\{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha+1]} = \{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha]} - [\mathbf{U}_X^P]_{[\alpha]}^{-1} \{\mathbf{x}\}_{[\alpha]} \quad \dots\dots\dots(33)$$

で与えられる。ここに、 $[\mathbf{U}_X^P]_{[\alpha]} = [\mathbf{U}_X^P(\hat{\mathbf{T}}_{[\alpha]})]$ であり、 $[\alpha]$ は繰り返し回数を表わす。このとき、前述した $\{\mathbf{x}\}$ と $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ の一対一の対応は、初期値 $\{\hat{\mathbf{T}}\}_{[0]}$ が真値に十分近い場合には、 $\{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha]}$ が $\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{0}\}$ となる適合力に収束することを保証するが、任意の初期値に対して収束することはいえない。一般には収束域が存在する。ケーブル構造解析の多くは強非線形問題であり、本報告で考えている応力法では、特に適合力の数が多い場合に収束域の中に初期値を見出すことはきわめて難しい。

3. で述べたようにして適合力 $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ を考えて、ケーブル構造を分岐形の組合せケーブルに置換すれば、式 (19), (20) および式 (16) で表わされるケーブル構造の内力のはり合い式 (10)、力学的境界条件式 (14) を満たしており、補ポテンシャル・エネルギー $F(\hat{\mathbf{T}})$ の全微分は

$$dF(\hat{\mathbf{T}}) = \sum_m \left[\int_0^l \{ \epsilon - (\frac{1}{|\mathbf{x}|} - 1) \} d\mathbf{T} ds \right]^m + (\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{0}\})^t \{d\hat{\mathbf{T}}\}$$

と表わされる。さらに、各ケーブルの形状を式 (17) で表わせば、式 (17) は式 (11) を満たしており、適合力 $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ を変数とした $dF(\hat{\mathbf{T}})$ は

$$dF(\hat{\mathbf{T}}) = \{\mathbf{x}(\hat{\mathbf{T}})\}^t \{d\hat{\mathbf{T}}\} \quad \dots\dots\dots(34)$$

となる。マトリックス $[\mathbf{U}_X^P(\hat{\mathbf{T}})]$ の対称性より式 (34) は完全微分形であり、 $F(\hat{\mathbf{T}})$ の存在は明らかである。式 (34) に式 (22) を代入し、反傾関係 (23) を考えれば、

$$dF(\hat{\mathbf{T}}) = \{\mathbf{x}_M\}^t \{d\mathbf{T}_0\} + \{\mathbf{x}^*\}^t \{d\mathbf{R}\} + \{\mathbf{u}\}^t \{d\mathbf{R}\} \quad \dots\dots\dots(35)$$

と書くことができる。ここに、 $\{d\mathbf{T}_0\} = [\mathbf{S}_P]\{d\hat{\mathbf{T}}\}$,

$\{d\mathbf{R}\} = [S_P^*] \{d\hat{\mathbf{T}}\}$ である。式 (35) の第1項は、式 (17) より

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_M\}^t \{d\mathbf{T}_0\} &= \left\{ \int_0^l \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{|\mathbf{T}|} \right) T ds \right\}^t \{d\mathbf{T}\} \\ &= \sum_{m=1}^M d \left(\int_0^l \left[\frac{|\mathbf{T}|^2}{2\alpha} + |\mathbf{T}| \right] ds \right)^m \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

と表わすことができる。また、式 (32・b) の $[Q^*(\mathbf{R})]$ はケーブル構造に接する構造物の撓性マトリックスであり、一般には正値対称である。したがって、式 (35) の第3項も完全微分形と考えられ、

$$dF^*(\mathbf{R}) = \{\mathbf{u}(\mathbf{R})\}^t \{d\mathbf{R}\} \dots\dots\dots (37)$$

で定義されるケーブル構造に接する構造物の補ひずみエネルギー $F^*(\mathbf{R})$ の存在がいえる。 $\{\mathbf{u}\}$ と $\{\mathbf{R}\}$ が線形関係にある場合には、

$$F^*(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \{\mathbf{R}\}^t [Q^*] \{\mathbf{R}\}, [Q^*] = \text{const.}$$

で与えられる。以上より、 $F(\hat{\mathbf{T}})$ は、

$$\begin{aligned} F(\hat{\mathbf{T}}) &= \sum_{m=1}^M \left(\int_0^l \left[\frac{|\mathbf{T}|^2}{2\alpha} + |\mathbf{T}| \right] ds \right)^m \\ &\quad + \{\mathbf{x}^*\}^t \{\mathbf{R}\} + F^*(\mathbf{R}) \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

として求まる。

$\{\hat{\mathbf{x}}\}$ は $F(\hat{\mathbf{T}})$ の勾配であり、 $[U_X^P(\hat{\mathbf{T}})]$ の正値性より $\{\hat{\mathbf{x}}\} = \{\mathbf{0}\}$ での $F(\hat{\mathbf{T}})$ は最小値である。本文ではベクトル量 $\{\hat{\mathbf{x}}\}$ の収束状況を表わすスカラー量の指標として $F(\hat{\mathbf{T}})$ を以下のように用いる。

$F(\hat{\mathbf{T}})$, $\{\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{T}})\}$ を $\{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha]}$ に関して Taylor 展開すれば

$$\begin{aligned} F(\hat{\mathbf{T}}) &= F(\hat{\mathbf{T}}_{[\alpha]}) + \{\hat{\mathbf{x}}\}_{[\alpha]}^t \{d\hat{\mathbf{T}}\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{d\hat{\mathbf{T}}\}^t [U_X^P]_{[\alpha]} \{d\hat{\mathbf{T}}\} + O(d\hat{\mathbf{T}}^3) \\ &\dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{T}})\} &= \{\hat{\mathbf{x}}\}_{[\alpha]} + [U_X^P]_{[\alpha]} \{d\hat{\mathbf{T}}\} + O(d\hat{\mathbf{T}}^2) \\ &\dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

と表わすことができる。ここに、 $\{d\hat{\mathbf{T}}\} = \{\hat{\mathbf{T}}\} - \{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha]}$ であり、式 (39) の第4項 $O(d\hat{\mathbf{T}}^3)$ 、および式 (40) の第3項 $O(d\hat{\mathbf{T}}^2)$ は $\{d\hat{\mathbf{T}}\}$ の3次、2次以上の項を表わす。

ここで、Newton-Raphson 法での修正式 (33) に代えて

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha+1]} &= \{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha]} - \theta_{[\alpha]} [U_X^P]_{[\alpha]}^{-1} \{\hat{\mathbf{x}}\}_{[\alpha]} \\ &\dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

で表わされる修正式を考える。 $\theta_{[\alpha]}$, $(0 < \theta_{[\alpha]} \leq 1)$ は未定定数である。

式(41)を式(39)に代入すれば $\{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha+1]}$ での $F(\hat{\mathbf{T}}_{[\alpha+1]})$ は

$$\begin{aligned} F(\hat{\mathbf{T}}_{[\alpha+1]}) &= F(\hat{\mathbf{T}}_{[\alpha]}) \\ &\quad - (2\theta - \theta^2)_{[\alpha]} \frac{1}{2} R_{[\alpha]} + O(\theta_{[\alpha]}^3 R_{[\alpha]}^3) \\ &\dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

と書くことができる。ここに $R_{[\alpha]}$ は

$$R_{[\alpha]} = (\{\hat{\mathbf{x}}\}_{[\alpha]}^t [U_X^P]_{[\alpha]}^{-1} \{\hat{\mathbf{x}}\}_{[\alpha]})^{1/2} \dots\dots\dots (43)$$

で定義した物理量である。式 (42) より明らかであるように、任意の $\{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha]}$ に対して $\theta_{[\alpha]}$ さえ十分小さくすれば、式 (42) の第3項は他項に比べて高次の微小項となり、 $0 < \theta \leq 1$ で $(2\theta - \theta^2) > 0$ である。したがって、任意の $\{\hat{\mathbf{T}}\}_{[\alpha]}$ に対して

$$\theta_{[\alpha]} R_{[\alpha]} < R_{\max} \dots\dots\dots (44)$$

が成り立つ $\theta_{[\alpha]}$ を決めれば、

$$F(\hat{\mathbf{T}}_{[\alpha+1]}) < F(\hat{\mathbf{T}}_{[\alpha]}) \dots\dots\dots (45)$$

となる有限値 R_{\max} が存在して、下に有界な数列 $\{F(\hat{\mathbf{T}}_{[\alpha]})\}$ の収束がいえる。

式 (42) よりもっとも早く収束する $\{\theta_{[\alpha]}\}$ では、収束が進むにつれて、 $\theta_{[\alpha]}$ が1に収束することは明らかである。このことと条件式 (44) を考え合わせて $\theta_{[\alpha]}$ の値を

$$\theta_{[\alpha]} = \min \left(\theta \frac{R_{[0]}}{R_{[\alpha]}}, 1 \right) \dots\dots\dots (46)$$

で与えるものとする。

ここに、 θ , $(0 < \theta \leq 1)$, は $R_{[0]}$ に応じて定める定数であり、 $\theta R_{[0]} < R_{\max}$ であるように決めれば任意の初期値に対して以上の繰り返し計算は収束する。

(3) 形状決定への応用

4. (2) では接線係数を用いた繰り返し計算で適合力を求めることを述べたが、部材長、支持節点位置等の微小増分によるつり合い状態の変化量を表わす線形化式が得られるならば、その線形化式を修正式とした繰り返し計算によりつり合い形状を制御する方法が考えられよう。

3. (2), 4. (2) の方法で求めたケーブル構造のつり合い状態に部材長と支持節点位置の増分 $\{\delta l\}$, $\{\delta \mathbf{x}^*\}$ を考える。部材長の増減は部材の終端部で考えるものとし、 δl^m の区間に働く分布外力は $\mathbf{q}^m(l)$ とする。 $\{\delta l\}$, $\{\delta \mathbf{x}^*\}$ に伴う適合力の増分を $\{\delta \hat{\mathbf{T}}\}$ とすると部材断面力、支持節点反力の増分は、式 (16), (19), (20) より

$$\begin{aligned} \{\delta \mathbf{T}(s)\} &= \{\delta \mathbf{T}_0\} = [S_P] \{\delta \hat{\mathbf{T}}\} + [S_{PM}] [D] \{\delta l\} \\ &\dots\dots\dots (47 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\delta \mathbf{R}\} &= [S_P^*] \{\delta \hat{\mathbf{T}}\} + [S_{PM}^*] [D] \{\delta l\} \\ &\dots\dots\dots (47 \cdot b) \end{aligned}$$

で与えられる。 $[D]$ は式 (49) に示すような部材終端部の分布外力を対角成分とするマトリックスである。

$\{\delta l\}$, $\{\delta \mathbf{x}^*\}$ による $\{\mathbf{x}_M\}$, $\{\mathbf{u}\}$ の増分は、式 (27), (47・a), 式 (32・b), (47・b) より

$$\begin{aligned} \{\delta \mathbf{x}_M\} &= [Q] \{\delta \mathbf{T}_0\} + [G] \{\delta l\}, \{\delta \mathbf{u}\} = [Q^*] \{\delta \mathbf{R}\} \\ &\dots\dots\dots (48 \cdot a, b) \end{aligned}$$

である。ここに、 $[D]$, $[G]$ は

$$\begin{aligned} [D] &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}(l)^1 & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}(l)^M \end{bmatrix}, [G] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(l)^1 & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}(l)^M \end{bmatrix} \\ &\dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

で表わされる $(3M \times M)$ のマトリックスである。

以上に含まれる適合力の増分 $\{\delta \hat{T}\}$ は増分後の適合条件より決まる。すなわち、 $\{\delta \hat{x}\} = [S_X] \{\delta x_M\} + [S_X^*] \{\delta x^* + \delta u\} = \{0\}$ を $\{\delta \hat{T}\}$ に関して展開すれば、

$$\begin{aligned} \{\delta \hat{T}\} = & -[U_X^P]^{-1}([U_X^{PM}][D] \\ & + [S_X][G])\{\delta l\} - [U_X^P]^{-1}[S_X^*]\{\delta x^*\} \\ & \dots\dots\dots(50) \end{aligned}$$

として得られる。前式右辺中の $[U_X^{PM}]$ を含めて今後用いる $[U_{XJ}^{PM}]$, $[U_{XJ}^P]$, ……等は $[U_X^P]$ と同様に

$$\begin{aligned} [U_B^A] = & [S_B][Q][S_A] + [S_B^*][Q^*][S_A^*] \\ & \dots\dots\dots(51) \end{aligned}$$

で定義して。

式(50)で表わされる $\{\delta \hat{T}\}$ を式(47), (48)にもどすことにより、 $\{\delta T(s)\}$, $\{\delta R\}$, $\{\delta x_M\}$, $\{\delta u\}$ は $\{\delta l\}$, $\{\delta x^*\}$ で表わされ以下のようになる。

$$\begin{aligned} \{\delta T(s)\} = & [[S_{PM}][D] \\ & - [S_P][U_X^P]^{-1}([U_X^{PM}][D] + [S_X][G])]\{\delta l\} \\ & - [S_P][U_X^P]^{-1}[S_X^*]\{\delta x^*\} \dots\dots\dots(52 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\delta R\} = & [[S_{PM}^*][D] \\ & - [S_P^*][U_X^P]^{-1}([U_X^{PM}][D] + [S_X][G])]\{\delta l\} \\ & - [S_P^*][U_X^P]^{-1}[S_X^*]\{\delta x^*\} \dots\dots\dots(52 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\delta x_M\} = & [[Q][S_{PM}][D] + [G] \\ & - [Q][S_P][U_X^P]^{-1}([U_X^{PM}][D] \\ & + [S_X][G])]\{\delta l\} \\ & - [Q][S_P][U_X^P]^{-1}[S_X^*]\{\delta x^*\} \dots\dots(53 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\delta u\} = & [Q^*][S_{PM}^*][D] \\ & - [S_P^*][U_X^P]^{-1}([U_X^{PM}][D] + [S_X][G])]\{\delta l\} \\ & - [Q^*][S_P^*][U_X^P]^{-1}[S_X^*]\{\delta x^*\} \dots\dots(53 \cdot b) \end{aligned}$$

浮動節点位置、部材上の s 点の空間位置の $\{\delta l\}$, $\{\delta x^*\}$ による増分量 $\{\delta x_J\}$, $\{\delta x(s)\}$ は接続マトリックス $[S_{XJ}]$, $[S_{XJ}^*]$, $[S_{XM}]$, $[S_{XM}^*]$ と式(53)を用いて表わすことができ、次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \{\delta x_J\} = & [[U_{XJ}^{PM}][D] + [S_{XJ}][G] \\ & - [U_{XJ}^P][U_X^P]^{-1}([U_X^{PM}][D] \\ & + [S_X][G])]\{\delta l\} \\ & + [[S_{XJ}^*] - [U_{XJ}^P][U_X^P]^{-1}[S_X^*]]\{\delta x^*\} \\ & \dots\dots\dots(54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\delta x(s)\} = & [[U_{XM}^{PM}][D] + [S_{XM}][G] \\ & - [U_{XM}^P][U_X^P]^{-1}([U_X^{PM}][D] \\ & + [S_X][G]) + [Q(s)]([S_{PM}][D] \\ & - [S_P][U_X^P]^{-1}([U_X^{PM}][D] + [S_X][G]))]\{\delta l\} \\ & + [[S_{XM}^*] - [U_{XM}^P][U_X^P]^{-1}[S_X^*] \\ & - [Q(s)][S_P][U_X^P]^{-1}[S_X^*]]\{\delta x^*\} \dots\dots(55) \end{aligned}$$

ここに、 $[Q(s)]$ は式(32・a)と同様のマトリックスであるが、始端から s 点までの積分値を成分としている。

式(50), (52)~(55)が部材長と支持節点位置の増分に

よるつり合い状態の変化量を表わす線形化式である。

形状決定において制御する量(所要値を考える量)としては、(A) 部材断面力、(B) 支持節点反力、(C) 支持節点の変位後の位置、(D) 部材上の確定点の空間位置等が考えられる。これらを制御する量としてここでは、(a) 無応力時の部材長、(b) 変位前の支持節点位置を考えている。

本文で扱う形状決定とは、(A)~(D)を(a),(b)の関数と考えて、(A)~(D)の関数値を指定したときの変数値を求める問題に帰着する。解の付近でこれらのベクトル値関数とベクトル変数の間には一対一の対応が必要であり、その条件を満たすような被決定量 $Y(X)$ を(A)~(D)の成分から、変数 X を(a),(b)の成分から同数 N_s 選ぶものとする。このとき、 X の領域に対する Y の写像領域は N_s 次元ベクトル空間の一部に片寄るのが普通であり、任意の所要値 Y^* に対し解 X^* が存在することは一般には言えない。これに対しては、何らかの価値判断で Y と Y^* の距離を表現する目的関数を定め最適値問題として取扱うのが普通であるが、ここでは所要値が実現できる場合のみを考えるものとし、実現可能な領域に所要値 Y^* があることを想定した形状決定の問題を考える。

繰り返し計算の手順は4.(2)の適合力を求める場合と同様である。初期値 $X_{[0]}$ を仮定し、与えられた荷重条件と $X_{[0]}$ に対して3.(2), 4.(2)の変形解析を行うことによりつり合い状態が求まり、 $X_{[0]}$ に対する $Y_{[0]} = Y(X_{[0]})$ が得られる。形状決定に関する不一致量 $\Delta Y_{[0]} = Y^* - Y_{[0]}$ と関数 $Y(X)$ の $X_{[0]}$ での接線係数より $X_{[0]}$ を修正した $X_{[1]}$ を求めて、同じ手順を $\Delta Y = 0$ となるまで繰り返す。

線形化式による X の修正は、4.(2)で述べた適合力の修正式(41),(46)に対応して

$$X_{[\beta+1]} = X_{[\beta]} + \varphi_{[\beta]} [\partial Y / \partial X]_{[\beta]}^{-1} \Delta Y_{[\beta]} \dots\dots\dots(56)$$

$$\varphi_{[\beta]} = \min \left[\varphi \frac{\|\Delta Y_{[0]}\|}{\|\Delta Y_{[\beta]}\|}, 1 \right] \dots\dots\dots(57)$$

で行う。 $\|\cdot\|$ はノルムを表わす。 φ は式(46)の θ と同様に扱う定数である。また、繰り返しの前後での収束判定は式(45)に対応して

$$\|Y_{[\beta+1]}\| < \|Y_{[\beta]}\| \dots\dots\dots(58)$$

で行うものとする。式(56),(57)による繰り返し計算においても、初期値 $X_{[0]}$ と真値 X^* を含む領域で Y と X に一対一の対応があれば、 φ は有限値であり任意の初期値に対して収束する。それについては、補遺3.に述べている。

微係数マトリックス $[\partial Y / \partial X]$ の多くの成分は式(52)~(55)から X, Y に対応する列、行成分を直接取り出

して得られ、他の成分は式 (52)~(55) を多少変形して得られる。ここで、所要値 Y^* が実現不可能なときには繰り返し計算の途中で係数マトリックス $[\partial Y/\partial X]_{[s]}$ は特異となり、変数 X の成分を選び直すか、または所要値を定め直す必要がある。

(4) ケーブル構造の接線撓性

つり合い状態を把握するためには、構造の剛性や撓性を知ることも必要である。ここでは、ケーブル構造のつり合い状態における接線撓性について考える。

接線撓性は外力の微小増分によるつり合い状態の変化を定式化することにより得られるが、展開の方法は 4. (3) の場合と独立増分量が異なるだけで同様である。

独立増分量 $\{\delta Z\}$ をケーブル構造のつり合い状態で考えれば、一般に $\{\delta Z\}$ に伴って適合力の増分 $\{\delta \hat{T}\}$ が生じる。それにより、つり合い状態を記述する任意の物理量 $\{W\}$ の増分は

$$\{\delta W\} = [U_W^Z] \{\delta Z\} + [U_W^P] \{\delta \hat{T}\} \dots (59)$$

の形で表わされることになる。マトリックス $[U_W^Z]$, $[U_W^P]$ は具体的な $\{Z\}$, $\{W\}$ に対して展開して得られる。 $\{\delta Z\}$ による $\{\delta \hat{T}\}$ は、増分後の適合条件: $\{\delta \hat{x}\}$

$= \{0\}$ より決まり、

$$\{\delta \hat{T}\} = -[U_X^P]^{-1} [U_X^Z] \{\delta Z\} \dots (60)$$

の一般形で表わされる。したがって、式 (60) を式 (59) にもどして、 $\{W\}$ の $\{\delta Z\}$ による増分は

$$\{\delta W\} = ([U_W^Z] - [U_W^P] [U_X^P]^{-1} [U_X^Z]) \{\delta Z\} \dots (61)$$

で与えられることになる。

部材長、支持節点位置の増分を考えた場合の式 (60), (61) が式 (50), (52)~(55) であり、外力増分に対する結果を次に述べる。

外力増分として節点集中外力の増分 $\{\delta P_j\}$, 部材上の集中外力の増分 $\{\delta P^M\}$ を考える。ここに、 $\{P^M\}$ は

$$\{P^M\} = \begin{Bmatrix} \{P^{M1}\} \\ \vdots \\ \{P^{Mm}\} \end{Bmatrix}, \quad \{P^{Mm}\} = \begin{Bmatrix} P_{(j)}^{Mm} \\ \vdots \\ P_{(nm)}^{Mm} \end{Bmatrix} \dots (62)$$

であり、 $P_{(j)}^{Mm}$ は部材 m 上の j 番目の集中外力 (作用点は s_j^m) を表わす。また、 $P_{(j)}^{Mm}$ の作用点の空間位置を $x_{(j)}^{Mm}$ として、ベクトル $\{x^M\}$ を $\{P^M\}$ と同様に定義するものとする。 $\{\delta P_j\}$, $\{\delta P^M\}$ に対して式 (60), (61) を展開した結果は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \{\delta \hat{T}\} &= -[U_X^P]^{-1} \left\{ [U_X^{PJ}] : [U_X^{PM}] [C] + [S_X] \langle [C] [D_A] - [Q] [C] \rangle \right\} \begin{Bmatrix} \{\delta P_j\} \\ \{\delta P^M\} \end{Bmatrix} \\ \{\delta T(s)\} &= [[V^{PJ}] : [V^{PM}] [C] - [V] \langle [C] [D_A] - [Q] [C] \rangle] \begin{Bmatrix} \{\delta P_j\} \\ \{\delta P^M\} \end{Bmatrix} - \left\{ \sum_{s_j < s} \delta P_{(j)}^M \right\} \\ \{\delta R\} &= [[V^{PJ*}] : [V^{PM*}] [C] - [S_P^*] [U_X^P]^{-1} [S_X] \langle [C] [D_A] - [Q] [C] \rangle] \begin{Bmatrix} \{\delta P_j\} \\ \{\delta P^M\} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \{\delta x_j\} \\ \{\delta x^M\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [V_{XJ}^{PJ}] & [V_{XJ}^{PM}] [C] + [V_{XJ}] \langle [C] [D_A] - [Q] [C] \rangle \\ [C]^t [V_{XM}^{PM}] [C] + [C]^t [V_{XM}] \langle [C] [D_A] - [Q] [C] \rangle + [D_A] [C]^t [V^{PM}] [C] \\ \text{Sym.} & - [D_A] [C]^t [V] \langle [C] [D_A] - [Q] [C] \rangle - [T_A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta P_j\} \\ \{\delta P^M\} \end{Bmatrix} \dots (63) \end{aligned}$$

以上に含まれている各マトリックスは次のように定義している。

$$\left. \begin{aligned} [V_{XJ}^{PM}], [V_{XM}^{PJ}], \dots \text{etc.} : [V_B^A] &= [U_B^A] - [U_B^P] [U_X^P]^{-1} [U_X^A] \\ [V_{XJ}], [V_{XM}] &: [V_A] = [S_A] - [U_A^P] [U_X^P]^{-1} [S_X] \\ [V^{PJ}], [V^{PM*}], \dots \text{etc.} : [V^B] &= [S_B] - [S_P] [U_X^P]^{-1} [U_X^B] \\ [V] &: [V] = [S_P] [U_X^P]^{-1} [S_X] \end{aligned} \right\} \dots (64)$$

$$\begin{aligned} [C] : \{\delta \bar{P}_M\} &= [C] \{\delta P^M\} \\ [D_A] \dots [D_A] &= \begin{bmatrix} [d_A]^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [d_A]^M \end{bmatrix}, \quad [d_A]^m = \begin{bmatrix} \int_0^{s_1} A ds & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \int_0^{s_n} A ds \end{bmatrix} \\ [T_A] \dots [T_A] &= \begin{bmatrix} [t_A]^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [t_A]^M \end{bmatrix}, \quad [t_A]^m = \begin{bmatrix} \int_0^{s_2} A ds & \mathbf{0} \\ \int_0^{s_1} A ds & \int_0^{s_n} A ds \\ \vdots & \vdots \\ \int_0^{s_n} A ds & \int_0^{s_{n-1}} A ds \end{bmatrix} \mathbf{0} \dots (65) \end{aligned}$$

注1) 太字の $[U]$ は模式的に用いたマトリックス、細字の $[U]$ は具体的に定義して用いたマトリックスを表わす。

5. 解析例

(1) 伸びを考慮したカタナリー曲線

等分布外力が作用した単一ケーブルの形状は、式(17)を積分して

$$x_\alpha(s) = \frac{T_{0\alpha}s - q_\alpha \frac{s^2}{2}}{\alpha} - \frac{q_\alpha}{q^2} (T(s) - T(0)) + \frac{T_{0\alpha}q^2 - q_\alpha \sum_{\beta=1}^3 T_{0\beta}q_\beta}{q^3} \cdot \ln \left\{ \frac{qT(s) - \sum_{\beta=1}^3 T_{0\beta}q_\beta + q^2s}{qT(0) - \sum_{\beta=1}^3 T_{0\beta}q_\beta} \right\}, \alpha=1, 2, 3 \tag{66}$$

で与えられる。ここに、 $\{q_\alpha\}$ は等分布外力、 $\{T_{0\alpha}\}$ は $s=0$ での断面力成分であり、 $q, T(s)$ は

$$q = \left(\sum_{\beta=1}^3 q_\beta^2 \right)^{1/2}, T(s) = \left\{ \sum_{\beta=1}^3 (T_{0\beta} - q_\beta s)^2 \right\}^{1/2} \tag{67}$$

を表わす。

等分布外力の方向を y 軸に一致させ、始端断面力を (T_{0x}, T_{0y}) とすれば、式 (66) は

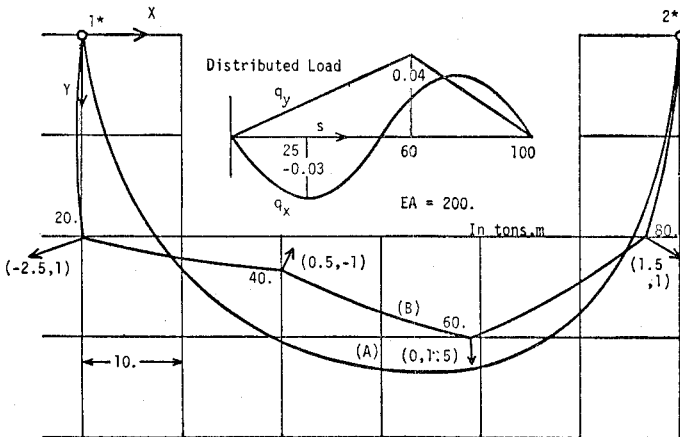


Fig. 4 Equilibrium Configuration in Example 1

Table 1 Coordinates of point 1, 2, 3, 4

No.	s (m)	x (m)	y (m)	Tensile Force (t)
1*	0.0	0.00	0.00	0.952
1	20.0	6.31	18.94	0.950
2	40.0	21.74	31.28	1.118
3	60.0	41.49	32.85	1.077
4	80.0	55.66	19.59	1.272
2*	100.0	60.00	0.00	1.476

Equilibrium (A)
Extension Length = 0.594 m

No.	s (m)	x (m)	y (m)	Tensile Force (t)
1*	0.0	0.00	0.00	1.801
1	20.0	-0.07	20.14	1.676
2	40.0	19.94	23.43	3.250
3	60.0	39.13	29.93	2.803
4	80.0	56.70	20.02	2.849
2*	100.0	60.00	0.00	3.126

Equilibrium (B)
Extension Length = 1.376 m

$$x(s) = \frac{T_{0x}s}{\alpha} + \frac{T_{0x}}{q} \cdot \ln \left\{ \frac{T_{0y} + (T_{0x}^2 + T_{0y}^2)^{1/2}}{(T_{0y} - qs) + (T_{0x}^2 + (T_{0y} - qs)^2)^{1/2}} \right\} \tag{68}$$

$$y(s) = \frac{T_{0y}s - \frac{q}{2}s^2}{\alpha} + \frac{1}{q} \{ (T_{0x}^2 + T_{0y}^2)^{1/2} - (T_{0x}^2 + (T_{0y} - qs)^2)^{1/2} \}$$

となり、伸びを考慮したカタナリー曲線 (Elastic Catenary) といわれている^{5), 26)}。

(2) 数値計算例 1

長さ 100 m, 伸び剛性 $EA=200$ t のケーブルをスパン 60 m に張り、分布外力

$$q_x(s) = -0.03 \sin\left(\frac{\pi}{50}s\right)$$

$$q_y(s) = \begin{cases} \frac{1}{1500}s, & (0 \leq s \leq 60) \\ \frac{100-s}{1000}, & (60 \leq s < 100) \end{cases} \quad (\text{t/m})$$

を作用させた時のつり合い形状を数値計算した。形状は Fig. 4 の (A) のように求まり、 $s=20, 40, 60, 80$ m の座標値を Table 1 に示す。さらに、以上の分布外力に加えて Fig. 4 の (B) のような集中外力を作用させたときのつり合い形状を計算した。座標値を Table 1 (B) に示す。

(3) 数値計算例 2

Fig. 5 に示すケーブル・ネット構造の形状決定を行った。ケーブルの特性値は、内側ケーブルの伸び剛性 $EA=9056$ t, 自重 $q_d=4.593$ kg/m, 外側ケーブルの $EA=18112$ t, $q_d=9.187$ kg/m とした。自重のみが作用したつり合い状態での浮動節点の x, y 座標が Fig. 5 のようになり、内側ケーブルの引張力の面内成分が 1 t となるように部材長を決める形状決定問題とした。解析の結果得られた部材長、浮動節点の x 座標、および外側ケーブルの引張力を Table 2 に示す。部材長の初期値に対するつり合い形状 (破線) と形状決定の結果得られたつり合い形状 (実線) は Fig. 5 のようであった。

次に、5, 18, 25 部材の中央点 A, B, C に 10 t の x 方向集中外力をそれぞれ作

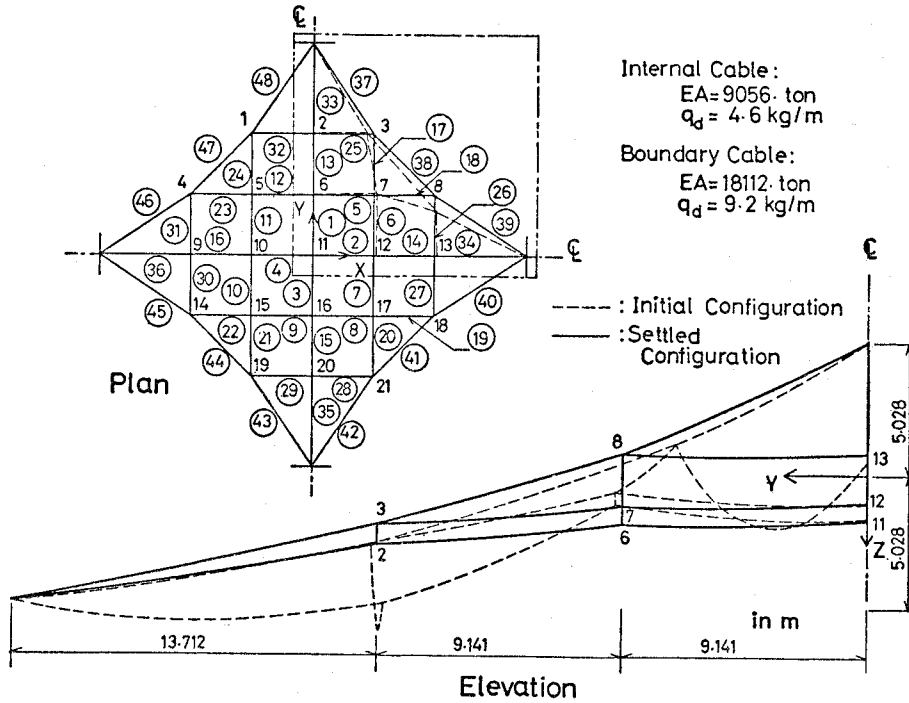


Fig. 5 Initial Equilibrium Configuration and Settled Equilibrium Configuration in Example 2

Table 2 Settled Values as A Result of Shape Determination

Member No.	Length (m)	Flow Joint	z-Coord. (m)
1, 3	9.147	1, 3, 19, 21	-2.024
2, 4	9.166	2, 20	-2.788
5, 8, 9, 12	9.169	4, 8, 14, 18	0.713
6, 7, 10, 11	9.146	5, 7, 15, 17	-1.274
13, 15	9.182	6, 16	-1.951
14, 16	9.326	9, 13	0.773
17, 20, 21, 24	9.174	10, 12	-1.062
18, 19, 22, 23	9.357	11	-1.699
25, 28, 29, 32	9.176		
26, 27, 30, 31	9.144	Boundary Member	Max. Member Force (t)
33, 35	13.899	37, 42, 43, 48	7.344
34, 36	14.362	38, 41, 44, 47	7.240
37, 42, 43, 48	16.750	39, 40, 45, 46	7.474
38, 41, 44, 47	13.213		
39, 40, 45, 46	17.034		

Table 3 Displacements of Joints

Flow Joint	Displacements (m)		
	x	y	z
1	0.378	-0.222	-1.091
2	0.254	-0.093	-2.605
3	-0.064	-0.235	-2.100
4	0.394	-0.255	0.943
5	0.447	-0.165	-0.312
6	0.318	-0.080	-1.899
7	0.231	-0.202	-2.329
8	-0.049	-0.291	-0.220
9	0.030	-0.145	0.643
10	0.051	-0.114	-0.536
11	0.033	-0.042	-1.176
12	0.040	-0.056	-0.845
13	0.044	-0.155	0.406
14	-0.063	-0.066	0.451
15	0.009	-0.074	-0.563
16	0.008	-0.043	-1.053
17	0.010	-0.039	-0.618
18	0.074	-0.079	0.443
19	-0.013	0.012	-1.528
20	-0.006	-0.004	-1.965
21	0.001	0.020	-1.527

Point	Coordinates (m)		
	x	y	z
A	4.825	9.003	-3.371
B	14.014	8.896	-2.041
C	4.766	18.121	-4.290

用させた時のつり合い形状を求めた。形状は Fig. 6 のようであり、節点変位と A, B, C 点の空間位置を Table 3 に示す。また、部材引張力は Table 4 のように得られた。Fig. 7 は、Fig. 5 のつり合いでの適合力を初期値とした場合の収束過程を表わしたものであり、それについては考察に述べる。

(4) 数値計算例 3

Fig. 8 に示すケーブル・トラス構造の形状決定を行った。ケーブルの自重、伸び剛性、および柱の曲げ剛性は以下に示す通りである。

Table 4 Secondary Member Forces

Member No.	Max. Member Force (t)	Member No.	Max. Member Force (t)	Member No.	Max. Member Force (t)
1	0.493	17	0.106	33	1.756
2	0.832	18	33.011	34	0.878
3	0.481	19	1.031	35	0.493
4	0.848	20	0.194	36	0.898
5	30.282	21	0.137	37	63.027
6	0.209	22	1.030	38	75.712
7	0.196	23	30.303	39	102.036
8	1.015	24	0.139	40	4.478
9	1.016	25	19.418	41	3.681
10	0.129	26	0.079	42	3.304
11	0.125	27	0.096	43	3.164
12	30.289	28	0.766	44	3.586
13	1.177	29	0.767	45	4.386
14	0.846	30	0.096	46	95.855
15	0.485	31	0.084	47	71.603
16	0.867	32	18.555	48	59.573

上弦ケーブル：自重=19.7 kg/m
 伸び剛性=37 600 t
 下弦ケーブル：自重=13.5 kg/m
 伸び剛性=25 800 t
 対角ケーブル：自重=2.2 kg/m
 伸び剛性=4 360 t
 柱の曲げ剛性=2.46×10⁴ tm²

自重と下弦ケーブルの節点に 2.0 t の集中外力を垂直方向に作用させた時のつり合い状態において、**Table 5** の所要値が満たされることを形状決定の条件として各部材長を決める問題とした。**Table 5** の節点位置は、節点が 2 次曲線 $y=3.5/300x^2+2$, $y=-1/300x^2$ の上にあるように定めた数値である。結果は **Table 6** のように得られた。**Fig. 9** は、この形状決定計算の収束過程を表わしたものであり、 θ_T, θ_X は引張力、座標の所要値との不一致量のノルムである。 $\beta=13$ での不連続は考察に述べている理由による。

Table 7 は、**Fig. 8** のつり合い状態での節点変位に関する接線撓性マトリッ

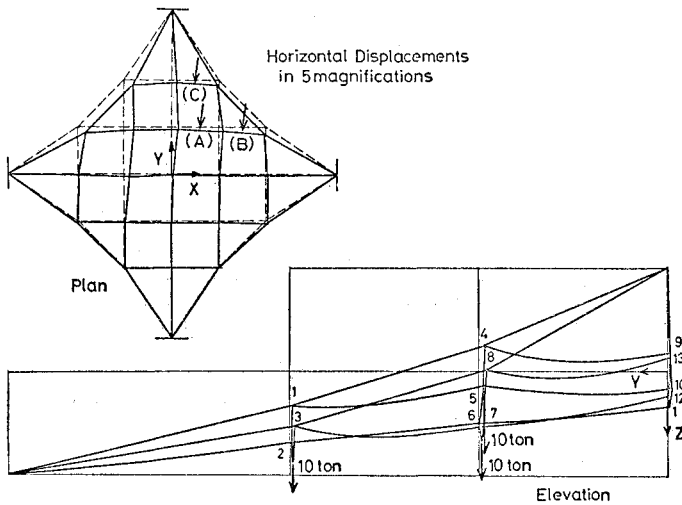


Fig. 6 Secondary Equilibrium Configuration in Example 2

Table 5 Required Values of Shape Determination

Joint	Coordinates (m)	
	x	y
1	0.00	0.000
2	5.00	2.292
3	10.00	-0.333
4	15.00	4.625
5	20.00	-1.333
1*	40.00	-5.333
2*	30.00	12.500
3*	30.00	-3.000

Member Forces
 across Symmetric Line
 $H_1 = 20.0$
 $H_2 = 20.0$ (t)

Table 6 Gained Member Lengths and Member Forces

Member No.	Length (m)	Max. Member Force (t)
1, 14	9.991	16.54
2, 15	9.991	20.00
3, 16	10.258	19.00
4, 17	10.030	20.65
5, 18	16.918	18.85
6, 19	10.114	23.28
7, 20	20.389	34.93
8, 21	10.245	23.58
9, 22	17.067	0.68
10, 23	7.771	4.36
11, 24	7.040	1.38
12, 25	5.640	5.63
13, 26	5.496	3.82

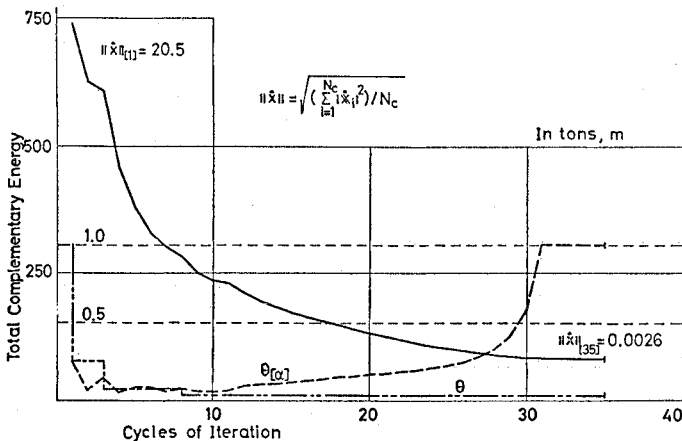


Fig. 7 Convergence Process of Deformation Analysis in Example 2

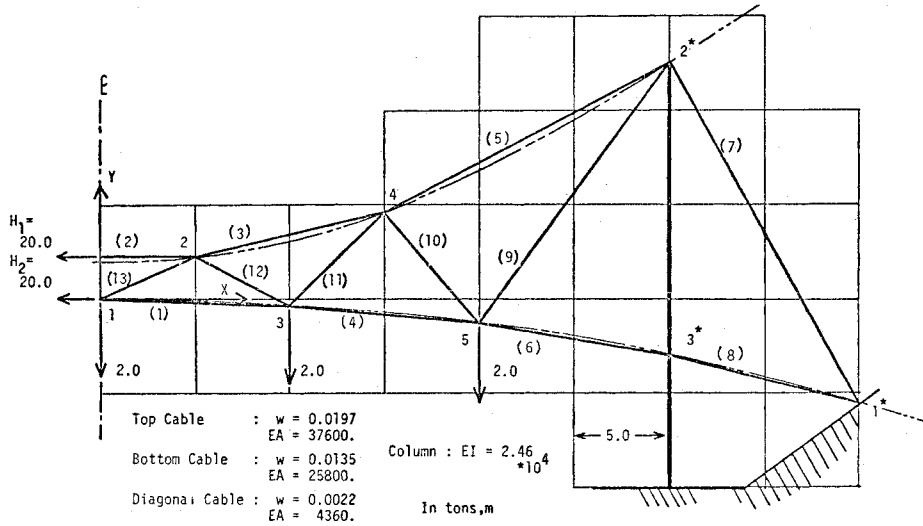


Fig. 8 Settled Equilibrium Configuration in Example 3

Table 7 Tangential Flexibility Matrix in Example 3

		Joint No.																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10									
1	0.16	0.0	0.11	0.06	0.12	0.06	0.10	0.06	0.03	0.05	0.11	0.1	0.11	-0.06	0.12	-0.06	0.10	-0.06	0.08	-0.05
	0.0	1.95	0.06	1.49	-0.07	0.99	0.24	0.58	-0.06	0.32	0.0	1.52	-0.05	1.45	0.07	0.96	-0.22	0.57	0.06	0.33
		54.44		20.02		30.90		19.07		15.14		29.01		29.01		30.90		19.07		15.14
2		0.16	0.0	0.11	-0.05	0.15	-0.07	0.06	-0.11	0.15	0.04	0.12	0.06	0.10	0.06	0.10	0.05	0.66	0.08	
		0.0	1.82	-0.07	0.13	0.19	0.89	-0.04	0.63	-0.03	0.14	-0.06	1.00	0.09	0.62	-0.19	0.30	0.07	0.09	
			46.58		27.24		28.11		14.86		38.68		30.79		21.77		19.00		11.41	
3			0.16	0.03	0.07	0.10	0.11	0.13	0.10	-0.07	0.10	-0.08	0.09	-0.05	0.10	-0.04	0.06	-0.01		
			0.03	1.49	0.02	1.23	0.04	1.12	-0.05	0.97	-0.06	0.63	0.06	0.36	-0.14	0.14	0.05	-0.01		
				48.39		20.07		22.39		24.51		21.77		19.37		13.88		9.75		
4				0.30	-0.24	0.02	-0.38	0.13	0.21	0.11	0.19	0.10	0.15	0.07	0.10	0.06	0.10			
				-0.24	1.60	0.16	1.65	-0.06	0.59	-0.05	0.32	0.04	0.15	-0.09	0.02	0.04	-0.09			
					45.90		14.34		23.56		19.01		13.89		11.78		7.23			
5					Sym.	0.18	0.29	0.06	-0.05	0.06	-0.06	0.06	-0.04	0.06	-0.03	0.04	-0.02			
						0.29	2.38	-0.09	0.36	-0.07	0.11	0.02	0.00	-0.09	-0.08	0.02	-0.02			
							32.71		13.14		11.41		9.75		7.23		4.94			
6						0.16	0.00	0.14	0.04	0.10	0.06	0.13	0.06	0.06	0.10					
						0.00	13.41	-0.03	1.44	0.07	0.97	-0.20	0.59	0.06	0.36					
							50.64		38.69		24.50		23.56		13.14					
7								0.16	0.02	0.11	0.05	0.14	0.07	0.06	0.12					
								0.02	1.82	0.06	1.31	-0.19	0.90	0.04	0.67					
									46.58		27.23		28.11		14.86					
8										0.16	-0.03	0.07	-0.10	0.12	-0.14					
										-0.03	1.49	0.00	1.26	-0.06	1.22					
											48.39		20.07		22.38					
9												0.30	0.24	0.01	0.44					
												0.24	1.60	-0.16	1.84					
													45.90		14.34					
10														0.18	-0.29					
														-0.29	2.38					
															32.71					

クスである (xx, xy, yx, yy, zz 成分を示しており, 他の成分は 0)。

次に, 節点の集中外力を除いて自重のみが作用した時

のつり合い状態を計算した。Fig. 8 の状態からの節点変位, 引張部材力は Table 8, 9 のように得られた。

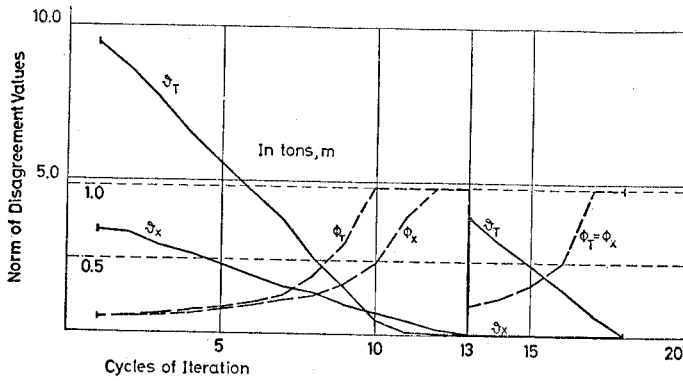


Fig. 9 Convergence Process of Shape Determination in Example 3

Table 8 Displacements of Joints

Joint No.	Displacement (cm)	
	x	y
1	0.0	11.0
2	0.0	10.6
3	0.6	12.2
4	0.1	9.2
5	1.1	10.4
2*	4.0	0.0
3*	0.1	0.0

Table 9 Secondary Member Forces

Member No.	Max. Member Force (t)
1, 14	22.99
2, 15	14.75
3, 16	12.91
4, 17	26.98
5, 18	11.96
6, 19	29.25
7, 20	23.28
8, 21	26.31
9, 22	0.12
10, 23	3.13
11, 24	0.06
12, 25	4.40
13, 26	1.89

6. 考 察

(1) 適合力に関する繰り返し計算

式 (41), (46) の繰り返し計算を説明する模式図を Fig. 10 に示す。不適合量 $\{\hat{x}\}_{[\alpha]}$ に対する適合力の修正方向は式(31)の接線係数より決まる。Newton-Raphson 法, 式 (33), で決まる $\{\hat{T}\}_{[\alpha+1]}$ は C 点であり, 図に示すように不適合量 $\{\hat{x}\}_{[\alpha]}$ が大きく AC 間の非線形項が卓越すれば C 点の不適合量 \vec{CF} が \vec{AB} より小さくなるとはいえない。この場合, 修正式 (41) のようにして, 修正量の相対値は接線係数より決めるが, 修正量の大きさは係数 $\theta_{[\alpha]}$ を用いることにより十分小さくするものとすれば相対的に非線形項は小さくなり, 不適合量は前回よりも確実に収束する。適当な $\theta_{[\alpha]}$ を求めることが重要であるが, もっとも合理的な $\theta_{[\alpha]}$ の決め方, すなわちもっとも早く収束する $\{\theta_{[\alpha]}\}$ の決め方は, 式 (41) を式 (38) の $F(\hat{T})$ に代入して

$$\partial F(\theta_{[\alpha]}) / \partial \theta_{[\alpha]} = 0 \dots \dots \dots (71)$$

の条件より AC 上で補ポテンシャル・エネルギーが最小となる $\theta_{[\alpha]}$ を求める方法であろう。現に, Buchholdt⁽¹⁾

が行った変位法によるケーブル構造の解析では, 不つり合い力に対する節点変位の修正量全体の大きさを全ポテンシャル・エネルギーの停留条件より決める方法が提示されている。しかし, このような方法の現実性は $F(\theta_{[\alpha]})$ の関数形にかかっており, 式 (38) で表わされる $F(\theta_{[\alpha]})$ に対して式 (71) を繰り返してごとに必要な精度で解くことには多大の労力を要し実用的でないと考え, 本報告では式 (46) のようにして $\theta_{[\alpha]}$ を定めるものとした。以下でそれについて考察する。

Fig. 10 の $\triangle ABC$ の面積は, $\{\hat{T}\}_{[\alpha]}$ での補ポテンシャル・エネルギーと適合条件を満たすときの最小値 $F(\hat{T}^*)$ との差の第一近似であり, 式 (43) の $R_{[\alpha]}$ の定義より $R_{[\alpha]}^2/2$ に等しい。式 (46) で $\theta_{[\alpha]}$ を与えれば, $\theta_{R[\alpha]}/R_{[\alpha]} < 1$ で, $\triangle A'BC' = \triangle E'DG' = \dots$ となるように E 点, J 点, ... が決まり, 式 (41) は補ポテンシャル・エネルギーの修正量の第一近似が $[\alpha]$ に関して等しく $\theta_{[\alpha]}^2 R_{[\alpha]}^2/2 = \theta^2 R_{[\alpha]}^2/2$ となる修正式となる。

4. (2) で述べたように θ の値は $\theta_{R[\alpha]} < R_{max}$ となるように選ばば収束するのであるが, 実際には R_{max} の値は未知である。そこで, 本報告では, 最初に θ の値 ($0 < \theta \leq 1$) を適当に決め, 繰り返しの過程で式 (45) を満たさないことが生ずるごとにそれを満たすよう改めて θ を小さくすることをを行った。この場合, θ は $R_{max}/R_{[\alpha]}$ 程度の有限値より小さくなることはなく, 任意の初期値に

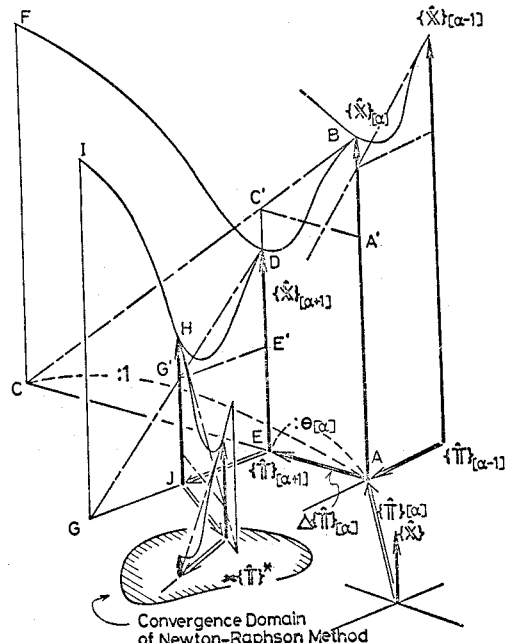


Fig. 10 Convergence Model of $\{\hat{x}\}$

対して収束する。最終的な $\theta R_{[0]}$ は Newton-Raphson 法の収束半径程度の値となり、収束が進んで $R_{[0]} < \theta R_{[0]}$ となれば Newton-Raphson 法による繰り返し計算に継続される。Fig. 7 は計算例 2 の以上の方法による収束過程を表わしたものである。

本報告では、不適合状態をスカラー量として定量化するために補ポテンシャル・エネルギー $F(\hat{T})$ を用いているが、 $F(\hat{T})$ に代えて不適合量 $\{\hat{x}\}$ のノルムを用いて展開することも可能である。しかし、そうした場合にはノルムの物理的意味の不明確さに加えて次のような矛盾とも思える点が生じる。第一は、適合力の大きい箇所と適合力の小さい箇所のそれが同等に評価されることである。このことは、不適合量が適合力の変化に還元されることを考えれば不合理である。次に、3. (2) の最初で述べた適合力を考える箇所の選択には任意性があるが、 $F(\hat{T})$ がその任意性によらない量であるのに対して、 $\{\hat{x}\}$ のノルムはその任意性に影響され、適合力の箇所が異なれば同じ不適合状態であってもノルムの値は異なる。数値計算の上では、 $F(\hat{T})$ を用いた展開の方が、 $\|\hat{x}\|$ を用いた場合よりも、最終的な θ の値が大きいたことが確認された。

(2) 形状決定問題の繰り返し計算

形状決定の繰り返し計算に関して以下のことが数値計算の結果よりわかった。

被決定量 Y 、変数 X の選択が適確であり、最終状態 ($Y^* = Y(X^*)$) で微係数行列 $[\partial Y / \partial X]_{X=X^*}$ が正則であっても、 X の収束領域が比較的狭く、十分近い初期値を与えなければ収束しない場合も少なくない。この場合、補遺 2 で述べたことより十分予想できることであるが、引張部材力が十分大きいケーブル構造では部材の伸び剛性を実際の値よりも極端に小さく与えることにより収束域は広がる。

所要値として座標と部材力等を同時に考える場合には Y の成分の次元が不統一となり、式 (57) などに含まれるノルム $\|\Delta Y_{[0]}\|$ の機能が曖昧となる。これに対しては、 Y の成分を力の次元と長さの次元に分離し、それぞれの小ベクトルに対してノルムを考えて処理するのが適当と思われる。

計算例 3 では、最初に伸び剛性 $EA = 20 \text{ t}$ に対する同じ条件の形状決定を行い、求められた部材長を実際の伸び剛性の部材長に力学的に等価であるように変換して、それを新しい初期値として計算を続けた。Fig. 9 の $\beta = 13$ での不連続はこのことを表わす。また、係数 $\varphi_{T[\beta]}$ に関しては

$$\varphi_{X[\beta]} = \min(\varphi_{\partial X_{[0]}} / \vartheta_{X[\beta]}, 1)$$

$$\varphi_{T[\beta]} = \min(\varphi_{\partial T_{[0]}} / \vartheta_{T[\beta]}, 1)$$

として 2 つの $\varphi_{X[\beta]}$ 、 $\varphi_{T[\beta]}$ を考え、修正式を

$$X_{[\beta+1]} = X_{[\beta]} + [\partial Y / \partial X]_{[\beta]}^{-1} \begin{Bmatrix} \varphi_{X[\beta]} \Delta Y_{X[\beta]} \\ \varphi_{T[\beta]} \Delta Y_{T[\beta]} \end{Bmatrix}$$

とした。ここに、 ΔY_X 、 ΔY_T は ΔY の長さの次元、力の次元の小ベクトルであり、 ϑ_X 、 ϑ_T はそれぞれのノルムを表わす。

7. ま と め

変位法による構造解析では、構造全体の連続系は節点変位を自由度とする離散系に置換されるが、その際に、要素内の変位は節点変位で有効に近似表現されねばならない。いわゆる剛性を有する一般の構造要素では、要素の大きさが十分小さくなれば要素内の変位は節点変位によって支配的に規定され、要素上に働く外力等の影響は微小項となる。しかし、ケーブルのような不定形部材においては、本報告の最初で述べたように本来の初期形状、初期剛性は考えられず、大きい引張部材力が作用している場合を除いて部材両端の節点変位で部材上の変位を有効に表現することは難しい。変位法によるケーブル構造解析の適用範囲が引張部材力の大きい構造に限られるのはこのためであろう。

実際のケーブルの伸び能力程度では、任意の外力に対して常に引張部材力が十分大きくあるようなケーブル構造は比較的少ない。計算例 3 のように弛緩部材は簡単に生じうる。このような部材に対しては部材上に新たな節点を考えることにより変位法を適用することができるが、繰り返し計算の対象となる基本の未知量の数が外力条件に依存するということは本質的な欠点と考えられる。

本報告で考えている応力法によるケーブル構造解析は理論上厳密であり、つり合い状態に関するすべての未知量は構造に固有の数の適合力に還元され、任意外力条件下のケーブル構造一般に一貫して適用することができる

8. おわりに

本研究は文部省科学研究費の補助を受けて行ったものである。研究を遂行するにあたって東京大学工学部土木工学科 西野文雄助教授に終始かわらぬ有益な助言をいただいたことに厚く感謝の意を表する次第である。

補遺 1. 接続マトリックスの反傾関係

式 (23)、(26) で表わされる接続マトリックスの反傾関係 (Contragredience) を説明する。Fig. 3 (b) のような適合条件を満たしていないつり合い状態に仮想変位

を考える。各部材の始端から任意点 (s 点) までの仮想変位 $\delta \mathbf{x}_M^m(s)$, $m=1, \dots, M$ と支持節点の仮想変位 $\delta \bar{\mathbf{u}}^i (= \delta(\mathbf{u} + \mathbf{x}^*)^i)$, $i=1, \dots, N_f$ を考えることによりケーブル構造の一般的な仮想変位を表わすことができ、それらに対する仮想仕事式は

$$\sum_{m=1}^M \left(\int_0^l [T \delta \epsilon - \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{x}] ds - \sum_j \mathbf{P}_{(j)}^M \cdot d\mathbf{x}_{(j)}^M \right)^m - \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_j^j \cdot \delta \mathbf{x}_j^j - \sum_{i=1}^{N_c} \hat{\mathbf{T}}_i \cdot \delta \hat{\mathbf{x}}_i - \sum_{k=1}^{N_f} (-\mathbf{R}^k) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}^k = 0 \dots \dots \dots (A.4)$$

と与えられる。別に各部材に対する仮想仕事の式は、

$$\left(\int_0^l [T \delta \epsilon - \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{x}] ds - \sum_j \mathbf{P}_{(j)}^M \cdot \delta \mathbf{x}_{(j)}^M \right)^m - \mathbf{T}_l^m \cdot \delta \mathbf{x}_l^m + \mathbf{T}_0^m \cdot \delta \mathbf{x}_0^m = 0, m=1, \dots, M \dots \dots \dots (A.2)$$

と表わすことができる。式 (A.2) を式 (A.1) に代入して、 $\mathbf{T}_l^m = \mathbf{T}_0^m - \bar{\mathbf{P}}_M^m$, $\mathbf{x}_l^m = \mathbf{x}_0^m + \mathbf{x}_M^m$ を考慮して展開すれば、

$$([\mathbf{S}_P] \{\hat{\mathbf{T}}\} + [\mathbf{S}_{PM}] \{\bar{\mathbf{P}}_M\} + [\mathbf{S}_{PJ}] \{\mathbf{P}_j\})^t \{\delta \mathbf{x}_M\} + ([\mathbf{S}_P^*] \{\hat{\mathbf{T}}\} + [\mathbf{S}_{PM}^*] \{\bar{\mathbf{P}}_M\} + [\mathbf{S}_{PJ}^*] \{\mathbf{P}_j\})^t \{\delta \bar{\mathbf{u}}\} - \{\hat{\mathbf{T}}\}^t ([\mathbf{S}_X] \{\delta \mathbf{x}_M\} + [\mathbf{S}_X^*] \{\delta \bar{\mathbf{u}}\}) - \{\mathbf{P}_j\}^t ([\mathbf{S}_{Xj}] \{\delta \mathbf{x}_M\} + [\mathbf{S}_{Xj}^*] \{\delta \bar{\mathbf{u}}\}) - \{\bar{\mathbf{P}}_M\}^t ([\mathbf{S}_{XM}] \{\delta \mathbf{x}_M\} + [\mathbf{S}_{XM}^*] \{\delta \bar{\mathbf{u}}\}) - \{\bar{\mathbf{P}}_M\}^t \{\delta \mathbf{x}_M\} = 0 \dots \dots \dots (A.3)$$

という恒等式を得ることができ、 $\{\hat{\mathbf{T}}\}$, $\{\bar{\mathbf{P}}_M\}$, $\{\mathbf{P}_j\}$ と $\{\delta \mathbf{x}_M\}$, $\{\delta \bar{\mathbf{u}}\}$ の各組を考えることにより式 (23), (26) の反傾関係がいえる。

補遺 2. 適合力 $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ と不適合量 $\{\hat{\mathbf{x}}\}$ の対応

[単一ケーブル] (3×3) の対称行列 $[A(s)]$ の 2 次形式を展開すると

$$\delta^2 I(s) = \delta \mathbf{T}^t(s) [A(s)] \delta \mathbf{T}(s) = \delta T_\alpha \delta T_\alpha / \alpha + \{(\delta T_2 T_3 - \delta T_2 T_2)^2 + (\delta T_3 T_1 - \delta T_1 T_3)^2 + (\delta T_1 T_2 - \delta T_2 T_1)^2\} / (T_\alpha T_\alpha)^{3/2} \dots \dots \dots (A.4)$$

となり、断面力 $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ で任意の $\delta \mathbf{T}$, ($\delta \mathbf{T} \neq \mathbf{0}$)、に対して $\delta^2 I > 0$ であるから $[A(s)]$ は正値である。したがって、 $\left[\int_0^s A(s) ds \right]$ も区間 $[0, s]$ で $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ であれば正値対称となる。

伸びを考えない場合 ($1/\alpha=0$) には

$$\delta T_\alpha T_\beta - \delta T_\beta T_\alpha = 0, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (A.5)$$

を満足する $\delta \mathbf{T}$ で $\delta^2 I = 0$ となり $[A(s)]$ は正値でなく、区間 $[0, l]$ で (A.5) が成立する $\delta \mathbf{T}$ が存在すれ

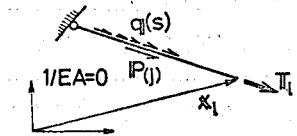


Fig. A-1 Singular Condition of Matrix $\left[\int_0^l A ds \right]$

ば、式 (29) の \mathbf{T}_l と $\mathbf{x}(l)$ には一対一の対応がない。これは、Fig. A-1 のように作用外力が一定方向でケーブルの形状が直線である場合に相等する。

ここで、伸び剛性を考える場合でも実際のケーブルでは、引張力/伸び剛性の比は十分小さく、式 (A.4) の第 1 項は第 2 項に比べて十分小さいといえる。したがって、形状が直線に近い実際のケーブルでは $\left[\int_0^l A(s) ds \right]$ は特異マトリックスに近い。

ケーブルの一点 ($s=\tau$) で断面力 $\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{0}$ であれば、式 (A.5) を満たさない $\delta \mathbf{T} (\neq \mathbf{0})$ に対して

$$\lim_{s \rightarrow \tau} \delta^2 I(s) = \infty$$

となり、マトリックス $\left[\int_0^l A(s) ds \right]$ の中に ∞ の成分が生じる。

[ケーブル構造] 式 (31) の対称行列 $[U_X^P]$ の 2 次形式は、

$$\delta^2 I = \{\delta \hat{\mathbf{T}}\}^t [U_X^P] \{\delta \hat{\mathbf{T}}\} = \sum_{m=1}^M \left(\delta \mathbf{T}^m \left[\int_0^l A(s) ds \right]^m \delta \mathbf{T}^m \right) + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_f} \delta \mathbf{R}^{it} [\partial u^i / \partial \mathbf{R}^j] \delta \mathbf{R}^j \dots \dots (A.6)$$

と書くことができる。ここに、 $\delta \mathbf{T}^m$, $\delta \mathbf{R}^i$ は $\{\delta \mathbf{T}\} = [\mathbf{S}_P] \{\delta \hat{\mathbf{T}}\}$, $\{\delta \mathbf{R}\} = [\mathbf{S}_P^*] \{\delta \hat{\mathbf{T}}\}$ の成分ベクトルを表わす。

$[\mathbf{S}_P]$ の階数は $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ の次数と同じであるから、 $\{\delta \hat{\mathbf{T}}\} \neq \{\mathbf{0}\}$ で $\{\delta \mathbf{T}\} \neq \{\mathbf{0}\}$ である。また、 $[\mathbf{Q}^*]$ は一般に正値対称であり式 (A.6) の第 2 項は支持節点の変位を考えない場合も含めて非負である。したがって、任意の $\{\delta \hat{\mathbf{T}}\} (\neq \{\mathbf{0}\})$ に対して単一ケーブルの場合と同じ条件のもとに $\delta^2 I > 0$ であり、 $[U_X^P]$ は正値対称といえる。

補遺 3. 形状決定に関する繰返し計算の収束性

考える領域でベクトル変数 \mathbf{X} とベクトル値関数 $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ には一対一の対応があものとする。この時、 \mathbf{X}_I と \mathbf{X}_1 に対して \mathbf{X}_2 を

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + [\partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{X}_1 (\mathbf{Y}(\mathbf{X}_I) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}_1)) \dots \dots \dots (A.7)$$

として定めるものとする、 $\|\mathbf{X}_I - \mathbf{X}_1\| < R_X$ であれば

$$\|Y_I - Y_2\| < \|Y_I - Y_1\| \dots\dots\dots (A \cdot 8)$$

となるような R_X の存在が出来る。逆に

$$\|Y_I - Y_1\| < R_Y \dots\dots\dots (A \cdot 9)$$

であれば式 (A・8) が成立する R_Y も存在する。ここで、式 (57) の φ の値を

$$\varphi \| \Delta Y_{[\beta]} \| < R_Y$$

となるように決めれば、式 (56) の修正量のノルムは

$$\varphi_{[\beta]} \| \Delta Y_{[\beta]} \| < R_Y \dots\dots\dots (A \cdot 10)$$

となる。式 (A・10) を式 (A・9) に対応させれば、 Y_1 、 Y_I には $Y_{[\beta]}$ 、 $Y^* - (1 - \varphi_{[\beta]}) \Delta Y_{[\beta]}$ が対応し、 Y_2 には $Y_{[\beta+1]} = Y(X_{[\beta+1]})$ が対応する。したがって、式 (A・8) と同等の

$$\| \Delta Y_{[\beta+1]} - (1 - \varphi_{[\beta]}) \Delta Y_{[\beta]} \| < \varphi_{[\beta]} \| \Delta Y_{[\beta]} \|$$

の関係が出来る。この式を $\| \Delta Y_{[\beta+1]} \|$ に関して展開すれば

$$\| \Delta Y_{[\beta+1]} \| < \| \Delta Y_{[\beta]} \| \dots\dots\dots (A \cdot 11)$$

が得られ、正項数列 $\{ \| \Delta Y_{[\beta]} \| \}$ の収束が出来る。

参 考 文 献

- 1) "Cable-Suspended Roof Construction State of the Art", by the Subcommittee on Cable-Suspended Structures of the Task Committee on Metals of the Structural Division, John B. Scalzi, Chmn., J. of Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 97, No. ST 6, pp. 1715~1761 June, 1971.
- 2) Steinman, D.B.: Suspension Bridges, 2nd ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, N.T., 1929.
- 3) Michalos, J. and Birnstiel, C.: Movements of a Cable Due to Changes in Loading, Transactions, ASCE, Vol. 127, Part II, Paper No. 3368, pp. 267~282, 1962.
- 4) Jennings, A.: The Free Cable, The Engineer, December 28, pp. 1111~1112, 1962.
- 5) O'Brien, W.T. and Francis, A.J.: Cable Movements under Two-Dimensional Loads, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 90, No. ST 3, Proc. Paper 3929, pp. 89~123, June, 1964.
- 6) O'Brien, W.T.: General Solution of Suspended Cable Problems, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 93, No. ST 1, Proc. Paper 5085, pp. 1~26, Feb., 1967.
- 7) Francis, A.J.: Single Cables Subjected to Loads, Civil Engineering Transactions, Ins. of C.E., Australia, Vol. CE 7, No. 2, Oct., 1965.
- 8) Thronton, C.H. and Birnstiel, C.: Three-Dimensional Suspension Structures, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 93, No. ST 2, Proc. Paper 5196, pp. 247~270, Apr., 1967.
- 9) Johnson, D. and Brotton, D.M.: A Finite Deflection Analysis for Space Structures, ed. by R.M. Davis, John Wiley and Sons Inc., New York, N.Y., 1967.
- 10) Jonatowski, J.J. and Birnstiel, C.: Inelastic Stiffened Suspension Space Structures, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 96, No. ST 6, Proc. Paper 7364, pp. 1143~1166, June, 1970.
- 11) Buchholdt, H.A.: A Non-linear Deformation Theory Applied to Two Dimensional Prestressed Cable Assemblies, Proceedings, Inst. of C.E., Vol. 42, Paper 7153, pp. 129~142, June, 1969.
- 12) Saafan, S.A.: Theoretical Analysis of Suspension Roofs, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 96, No. ST 2, Proc. Paper 7107, pp. 393~405, Feb., 1970.
- 13) Møllmann, H.: Analysis of Plane Prestressed Cable Structures, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 96, No. ST 10, Proc. Paper 7598, pp. 2059~2081, Oct., 1970.
- 14) Dean, D.L. and Vgarte, C.P.: Analysis of Structural Nets, Publications, IABSE, Vol. 23, 1963.
- 15) Siev, A. and Eidelman, Jr.: Shapes of Suspension Roofs, Proceedings, IASS, Paris, France, July, 1962.
- 16) Avent, R.R.: Nonlinear Field Analysis of Structural Nets, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 95, No. ST 5, Proc. Paper 6556, pp. 889~907, May, 1969.
- 17) Namita, Y., T. Shinke and K. Hironaka: Computer Analysis and Model Experiment of Cable Structures, Preliminary Report of Ninth Congress, IABSE, 1972.
- 18) Siev, S. and J. Eidelmann: Stress Analysis of Prestressed Suspended Roofs, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 90, No. ST 4, Aug. 1964.
- 19) Argyris, J.H. and Scharpf, D.W.: Large Deflection Analysis of Prestressed Networks, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 98, No. ST 3, March, 1972.
- 20) Argyris, J.H. and Angelopoulos, T.: Ein Verfahren für die Formfindung von beliebigen, vorgespannten Netzwerk-Konstruktionen, Preliminary Report of Ninth Congress, IABSE, May, 1972.
- 21) Shleyer, F.K.: The Analysis of Cable Nets, Proceedings, IASS, Paris, France, July, 1962.
- 22) 波田凱夫・中西 宏: 吊構造の形状決定計算に関する一考察, 日本建築学会論文報告集, No. 212, 昭和48年10月.
- 23) Kar, Anilk and Okazaki, Clyde, Y.: Convergence in Highly Nonlinear Cable Net Problems, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 99, No. ST 3, Proc. Paper 9601, pp. 321~334, March, 1973.
- 24) Krishna, P.: Discussion of "Numerical Solution of Nonlinear Structures", by Trevor J. Poskitt, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 94, No. ST 6, Proc. Paper 5966, pp. 1623~1627, June, 1968.
- 25) Hang, E. and Powell, G.H.: Discussion of "Inelastic Analysis of Suspension Roof Structures", by Donald P. Greenberg, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 97, No. ST 4, Proc. Paper 8015, pp. 1360~1363, Apr., 1971.
- 26) Jennings, Alan: Discussion of "Cable Movement under Two-Dimensional Loads", by W. Terrence O'Brien and Arthur J. Francis, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 91, No. ST 1, Proc. Paper 4216, pp. 307~311, Feb., 1965.
- 27) 真柄栄毅・国田二郎・川股重也: 混合法によるケーブルネットの解析, 日本建築学会論文報告集, No. 218, pp. 37~48; No. 220, pp. 35~45.
- 28) 真柄栄毅・川股重也: ワイヤー・ネットにおける形状決定問題, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 843~844 (1972).