土木学会論文報告集
第259号・1977年3月

線路容量のネットワーク表現

NETWORK REPRESENTATION OF THE RAILROAD TRACK CAPACITY

山 田 孜*
By Atsushi YAMADA

1. 序

鉄道における線路増設の必要性の検討には，物理的な線路容量の計算が不可欠であり，古くから研究が行われている．しかし，最近の研究は，山岸輝雄[3]から始まるといってもよいであろう．現在，国鉄本社の線増課では，鉄道経営全体の問題の一環として線路容量の問題を取り扱っているようであるが，その詳細は外部には公表されていない．われわれ，外部研究者としては，一般的な方法論をたとえば最適とは何かという問題と関連して論じたり[8]，純粋に物理的な方法を論じたりしている．しかし物理的な方法で実際上用いられているものは，1日=1440分を最小時間間隔で割って得る最大列車本数が専らで，これに経験的な利用率を掛けて利用している．また，サービスを問題にする方法としては，待時間と輸送量のバランスを取る方法が提案されているが，線路容量を乗客の乗車時間の総和で置き換えることにはいささか無理があり，コンピューターによる計算も面倒であり実用化されていないとのことである．

以前筆者は，ダイヤ設定のランダム性（これは種々の要求やダイヤ設定の技術者の熟練度に起因する）を考慮したマクロ的な容量を提案したが[4]，ここでは基本的な容量の計算にネットワーク表現を用いるミクロ的な方法を与え，ネックになる中間待避駅の新設や，既存の待避駅における増線の容量に及ぼす影響を手軽に見付けることを可能にするキメの細かい方法を提案する．しかし，ここで与えるのはネットワーク表現というアイディアだけであって，実際問題への適用にあたっては，後出の変数 x および関数 $\varphi(x)$ をどのように決めるか，また保守間合をどこで取るか，安全性や列車遅れの回復に対する弾力性をどこに繰り込むか，低速列車の待時間をどの程度まででおさえるかなどを考慮しなければならないことは，本方法運用上の当然の問題である．

なお参考文献 2) は，ロンドンの地下鉄の容量を増加することによって，ピーク時において乗客がどれだけ時間を得するかを論じているが，ダイヤのランダム性について文献 7) を引用している．なお，文献 5)，7) は，4) におけるダイヤ設定のランダム性の考えにより平面交差における列車支障時間の計算を行ったものであるが，これも一種の線路容量（一点における局所的線路容量）とみなされる．本文の考えは文献 6) で初めて発表したが概要のみなので，理解しにくく，詳細を論じたのは今回がはじめてである．

線路容量の定義が必ずしも一定しないのは，それに関連して，われわれにとって最適とは何かいう問題が一定しないことに起因している．最適の問題には，関係する人々の目的が入ってくるので，問題の客観化が困難になる．そのような考察は，ほかで取り扱ったので[8]，ここでは，完全に物理的な条件のみを考察したい．しかし，物理的な条件は，政策的な条件と完全には分離することができない．われわれは，ある政策条件を前提とし，それを仮定した上で物理的な考察を行うことにする．

たとえば，複線区間の一方向線において「一日最大何本列車を走らせることができるか」という問題は，それ自身では，まだ条件不足であり，一定の意味をもたない．もしも，すべての列車に対し，速度，停車駅などの条件が同一であるとするならば，平行ダイヤを考えることになり，この問題は最小列車間隔をいかに決定するかという問題に帰着する．しかし，一般には列車の種類は同一とは限らない．多種類の列車を走らせなければならない線区の容量を物理的に決定するためには，たとえば次のような政策条件を設定しなければならない．

（1） それらの種類の列車本数の比率を一定にする．

（2） 優先列車のダイヤから組み込んでいく．

以前，われわれは (1)，(2) の条件の下に線路容量の確率論的取り扱いを行った[4]．それは，考えうる種々の線

* 正会員 中央大学助教授 理工学部

区の**ダイヤに無関係な容量**を比較する目的で行われた．いいかえれば相当ぜいたくな要求をみたすダイヤもあるし，いわゆる過密ダイヤもあるであろうが，それらを平均したようなダイヤの下にその線区容量を算出する式を与えた．

本文では，いま問題となる特別な線区における政策的に要求された時間帯に優先列車のダイヤが組み込まれているとき，下級の列車をどれだけ入れることができるか迅速に計算する方法を与える．それは待避線数の増減の及ぼす影響を速やかに見るにも役立つであろう．

2．用語と仮定

（1） 複線区間の一方向線を考え，始発駅，終着駅を含めた待避駅間隔の個数をd個とする．待避駅は，始発駅から順に駅 0，駅 1，駅 2，…，駅dとよぶことにする．

（2） 速度の定義は停車時間をも含めた平均運行速度のことである（図―1 の点線と実線を比較されたい）．

（3） 優先高速列車を第1種，第2種，…，第$(n-1)$種とする．低速列車を第n種とする．ν番目の待避駅間では，それぞれの種類の列車は一定の速度 $v_{1\nu}, v_{2\nu}, \cdots, v_{n\nu}$ をもつものとする．しかも $v_{1\nu} \geqq v_{2\nu} \geqq \cdots \geqq v_{n\nu}$ とする．

（4） 2つの優先列車 A, B が低速列車により分離可能というのは，その二列車の間に低速列車を少なくとも1本待避なしに入れることができることをいう．これを式で表わせば以下のようになる．0 駅を i 種，j 種の優先列車 A, B が引き続いて出発する．この中間時点で第 n 種列車 C が出発するとき，0 駅における列車 A と列車 B との出発間隔が

$$S_{in}+\sum_{\nu=1}^{d}\frac{D_\nu}{v_{n\nu}}+R_{nj}-\sum_{\nu=1}^{d}\frac{D_\nu}{v_{j\nu}}$$

以上離れていれば，列車 A, B は分離できる．ここに D_ν は駅 $(\nu-1)$ と駅 ν との距離であり，S_{in} は i 種列車の出発後に n 種列車の出発できるまでの最小時間間隔．R_{nj} は j 種列車の到着前に n 種列車が到着できる最小時間間隔．

同様に，d駅における列車Aと列車Bとの到着間隔が

$$R_{nj}+\sum_{\nu=1}^{d}\frac{D_\nu}{v_{n\nu}}+S_{in}-\sum_{\nu=1}^{d}\frac{D_\nu}{v_{i\nu}}$$

以上離れていれば，列車 A, B は分離できる．

（5） 影響時間帯を定義する．簡単のため，問題の線区は駅 0 と駅 2 の間であるとし（$d=2$），高速列車と低速列車の 2 種類の場合（$n=2$）で説明する．

図―1 のように横軸を時間軸とし，$\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ で高速列車のダイヤ（時間―位置空間内での軌跡）を表わす．以下では列車のダイヤ $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ というかわり，列車 $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ といういい方をする．もしも，$\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ のすぐ近くに他の高速列車がいないならば（すなわち，$\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ が，その他の高速列車と分離されているならば），そのダイヤを時間帯 ▱ $B_0B_2C_2C_0$ に描き入れることのできるような1つの低速列車は，列車 $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ を待避し，しかも列車 $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ のみを待避することになる．時間帯 ▱ $B_0B_2C_2C_0$ のことを列車 $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ の**影響時間帯**とよぶことにする．時間帯 ▱ $B_0B_2C_2C_0$ における待避列車の容量は，次のようにして容易に計算できる．図―1 において $\overline{B_2A_2}$ は低速列車の最小到着時間間隔であり，$\overline{A_0C_0}$ は低速列車の最小出発間隔である．駅1において考えられた最小到着間隔と最小出発間隔とは，それぞれ $\overline{E_1A_1}$ および $\overline{A_1F_1}$ である．低速列車のダイヤを描き込める部分は，▱ $B_0B_1E_1E_0$ および ▱ $F_1F_2C_2C_1$ であり，そこに描き込める列車の最大数は $\overline{B_1E_1}$ および $\overline{F_1C_1}$ の長さのうち小さい方に影響される．

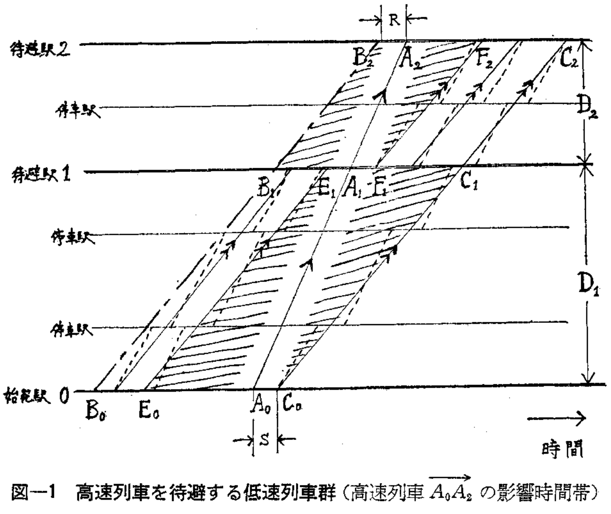
$$\overline{B_1E_1}=\frac{D_2}{v_{22}}-\frac{D_2}{v_{12}}=D_2\left(\frac{1}{v_{22}}-\frac{1}{v_{12}}\right)$$

$$\overline{F_1C_1}=\frac{D_1}{v_{21}}-\frac{D_1}{v_{11}}=D_1\left(\frac{1}{v_{21}}-\frac{1}{v_{11}}\right)$$

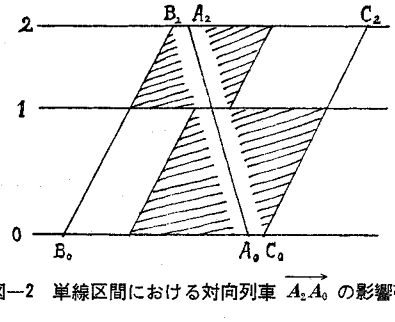
注意 単線区間の場合は，対向列車の速度を $v_{1\nu}$ とするとき

$$D_\nu\left(\frac{1}{v_{2\nu}}+\frac{1}{v_{1\nu}}\right)$$

を考えればよい．速度に正，負を考えれば，その



図―1 高速列車を待避する低速列車群（高速列車 $\overrightarrow{A_0A_2}$ の影響時間帯）



図―2 単線区間における対向列車 $\overrightarrow{A_2A_0}$ の影響帯

ままの式

$$D_\nu\left(\frac{1}{v_{2\nu}}-\frac{1}{v_{1\nu}}\right)\quad\left(\text{ただし}\ \frac{1}{v_{2\nu}}>\frac{1}{v_{1\nu}}\right)$$

が通用して，対向列車および優等列車を同時に取り扱うことができる．

（6） ▱ $B_0B_2C_2C_0$ に描き込むことのできる低速列車の最大本数は，

$$\begin{aligned}x&=\min(\overline{B_1E_1},\ \overline{F_1C_1})\\&=\min\left[D_1\left(\frac{1}{v_{21}}-\frac{1}{v_{11}}\right),\ D_2\left(\frac{1}{v_{22}}-\frac{1}{v_{12}}\right)\right]\end{aligned}$$

の定数倍，または一般に増加関数を φ として

$$\varphi\left(\min\left[D_1\left(\frac{1}{v_{21}}-\frac{1}{v_{11}}\right),\ D_2\left(\frac{1}{v_{22}}-\frac{1}{v_{12}}\right)\right]\right)$$

で与えられることになる．ここにいう定数および増加関数については，本文では詳しく考察しないが，最も簡単な場合についていえば，最小列車間隔[1)~5)]を ε とすると $1/\varepsilon$ を定数とすることである．しかし，x が ε で割り切れないときは切り上げを行う．すなわち，最も簡単な φ の形は

$$\varphi(x)=]x/\varepsilon[$$

である．ここに，$]x[$ は x の小数部分切り上げを表わすのに用いる記号とする．x の整数部分を表わすガウスの記号 $[x]$ は，x の小数部分切り捨てである．したがって，x が整数のときは $]x[=x=[x]$．x が整数でないときは $]x[=[x]+1$ である．

注意 最小列車間隔については，種々の研究があるが[1),2)]，一般には列車の運行距離が長いほど，遅れが重なってくるので余裕も大きくとらねばならない．たとえば，古くから

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\kappa\sqrt{x}$$

ε：一閉塞区間の運転時分

x：平行列車の運行距離

κ：定　数

という経験的な式があるが[3)]，定数 κ の新しい理論的解釈としては，単位距離の所要時間の分布が，独立で形のよい（たとえば正規分布の半分の）同一分布に従う場合，κ はその標準偏差（たとえば正規分布の標準偏差）に比例すると考えられる．その場合‘進み’の方は，停止信号その他の時間調整により，人為的にカットされることを考えている．単位距離の所要時間を確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で表わすとき，これらが，同一の標準偏差をもつとする．距離 n における所要時間は $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$．形のよい分布においては距離 n における遅れは $\sqrt{VS_n}$ に比例すると考えられるので，κ は $\sigma=\sqrt{VX_i}$ に比例すると考えられる．

仮定 I 任意の待避列車は待避せずに進めるだけ先の待避駅まで進まなければならない．

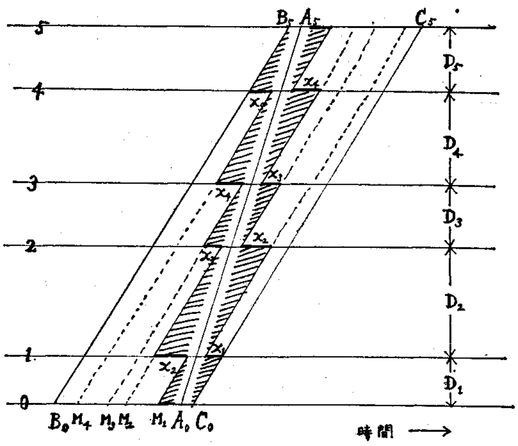
考えを固定するために，最初仮定 I のある場合を取り扱い，次に仮定 I のない場合を取り扱う．

3．仮定 I のある場合

まず，一つの高速列車の影響時間帯の容量の算定式を与える．図―3 で，$\overline{M_2M_1}$ に入るべき低速列車の本数は，2．(6) の議論と同様にして

$$\varphi_1=\varphi_1\left(\min(D_1,\ D_2)\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right)\right)$$

ただし，簡単のため，問題の線区を通じて，列車は一定の速度をもつと仮定する．



図―3 高速列車 $\overrightarrow{A_0A_5}$ の影響時間帯（$d=5$）

同様に $\overline{M_3M_2}$ にて 0 駅を出発させることのできる低速列車の最大数は

$$\varphi_2=\varphi_2\left(\min(D_2,\ D_3)\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right)\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

となり，▱ $B_0B_5C_5C_0$ 内に入るべき低速列車の本数は，これらを加えあわせて

$$\sum_{\nu=1}^{d-1}\varphi_\nu=\sum_{\nu=1}^{d-1}\varphi_\nu\left(\min(D_\nu,\ D_{\nu+1})\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right)\right)\cdots(1)$$

となる．中間待避駅に制限がない場合は，最も簡単な場合，

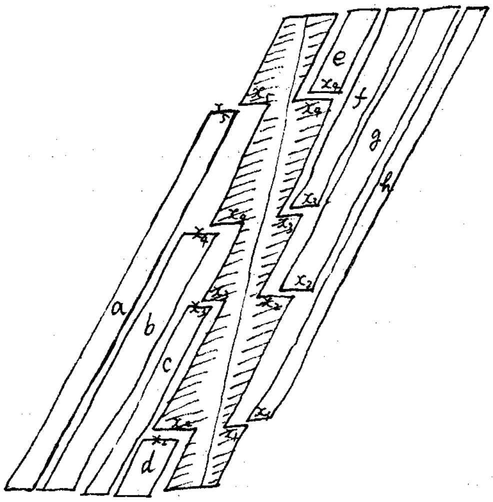
$$\varphi_\nu(t)=]t/\varepsilon_2[\quad(\nu=1,2,\cdots,d-1)\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる．ここに ε_2 は低速列車が平行して運転しうる最小時間間隔であり，中間待避駅の待避線数を α_ν とするときは最も簡単な場合

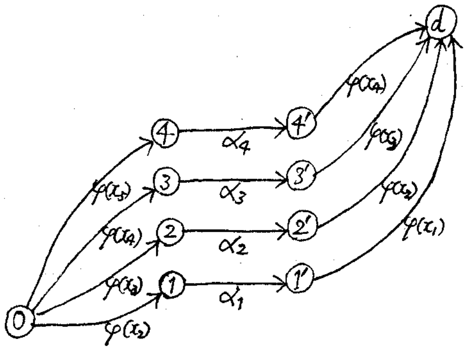
$$\varphi_\nu(t)=\min(]t/\varepsilon_2[,\ \alpha_\nu)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

となる．ただし，待避線が上下線共通使用の場合は，α_i は対向待避列車の有無によって変化する．

図―3 の影響時間帯中の低速列車の最大本数は，式 (1) の $\sum\varphi_\nu$ で与えられたが，これをグラフにすると図―5 のようになる．そのために図―3 の影響時間帯を図―4 のように切り離す．影をほどこした時間帯は低速



図―4　図―3 の影響時間帯の分割



図―5　図―3 の影響時間帯の容量（仮定 I のある場合）

列車を受け入れない部分である（実は，駅 1, 2, 3, 4 の部分でこの部分を左から右へ通過することがきる．したがって，待避線の部分を面積のない時間帯とみなすと低速列車の通過できる部分をすべて，時間帯の言葉で言い表わすことができることになる）．駅 0 を出発する低速列車は，4 つの白い時間帯 a, b, c, d のいずれかを通るが，仮定 I により時間帯 a を通るものは駅 4 まで待避せずに進まねばならない．同様に時間帯 b を通るものは駅 3 まで進む．c, d についても同様．次に駅 1 で待避していた列車は，列車 $\overrightarrow{A_0A_5}$ の通過後，ただちに出発して時間帯 h を通り駅 5 へ向かう．したがって，駅 2 で待避をおえた列車は時間帯 g を通って駅 5 へ向かわねばならない．f, e についても同様．したがって，時間帯 d と駅 1 の待避線と時間帯 h が接続する．また，時間帯 c，駅 2 の待避線，時間帯 g の順で接続する。したがって，グラフに表わせば，図―5 のようになる．

したがって，図―3 の時間帯の容量（低速列車）は図―5 のグラフ表現で，

（最大フロー）＝（最小カットの容量）

の定理を用いて求められる．ただし，

$$x_\nu = D_\nu\left(\frac{1}{v_{2\nu}} - \frac{1}{v_{1\nu}}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

である．この場合，明らかに求むる容量は，

$$\begin{aligned} &\min(\varphi_1(x_1), \alpha_1, \varphi_1(x_2)) \\ &+\min(\varphi_2(x_2), \alpha_2, \varphi_2(x_3)) \\ &+\min(\varphi_3(x_3), \alpha_3, \varphi_3(x_4)) \\ &+\min(\varphi_4(x_4), \alpha_4, \varphi_4(x_5)) \end{aligned}$$

である．$\varphi_\nu(t) = \min(]t/\varepsilon[, \alpha_\nu)$ の場合，それは

$$\sum\varphi_\nu(\min(x_\nu, x_{\nu+1})) = \sum\varphi_\nu$$

となる．

$$\begin{aligned} \because\ &\min(\varphi_\nu(x_\nu), \alpha_\nu, \varphi_\nu(x_{\nu+1})) \\ &= \min(]x_\nu/\varepsilon[,]x_{\nu+1}/\varepsilon[, \alpha_\nu) \\ &= \min(]\min(x_\nu, x_{\nu+1})/\varepsilon[, \alpha_\nu) \end{aligned}$$

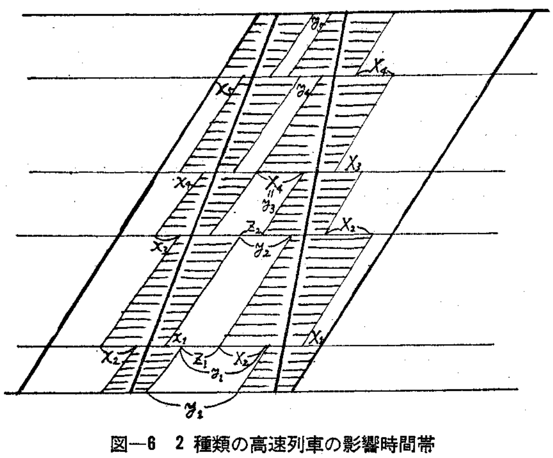
以下では，グラフにいちいち $\varphi(x)$ を書き込むのは煩雑になるので，$\varphi(x)$, $\varphi(y)$ などのかわりに単に x, y などと書くことにするが，それは $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ などを意味している．

3 種類以上の列車の場合

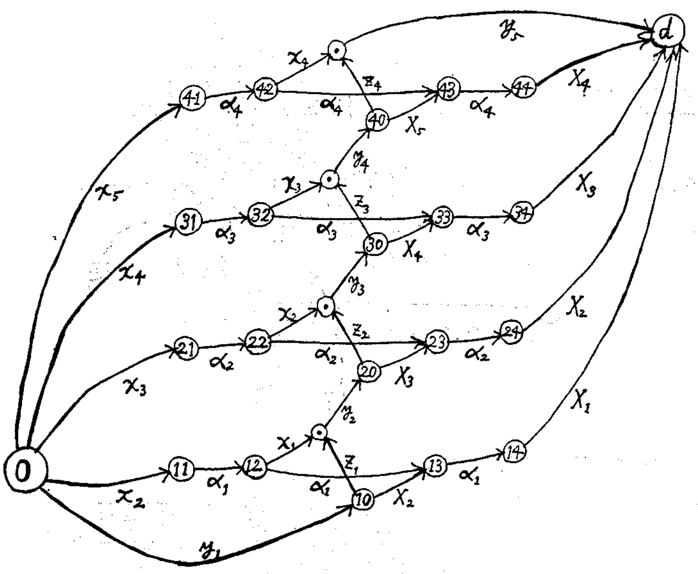
図―6 のように速度の異なる 2 本の高速列車の影響時間帯の容量となると，式は複雑になるが，図―7 のようにグラフ表現すれば，見透しがよく有効である．

図―6 において記号は時間の長さをあらわすと同時に時間-位置の 2 次元空間における点集合をも表わしているものとする（ただし，2 本の高速列車（の軌跡）に挟まれた X_2, X_4 は長さのみを表わしているものとし，集合としては X_2', X_4' と表わすことにする）．換言すれば，図―6 の記号 y_1 は駅 0 における特定の時間区間を表わしているものと考える．また記号 x_2 は駅 1 における特定の時間区間を表わしているものとするなどである．以下，それらを集合 y_1，集合 x_1 などと述べる．

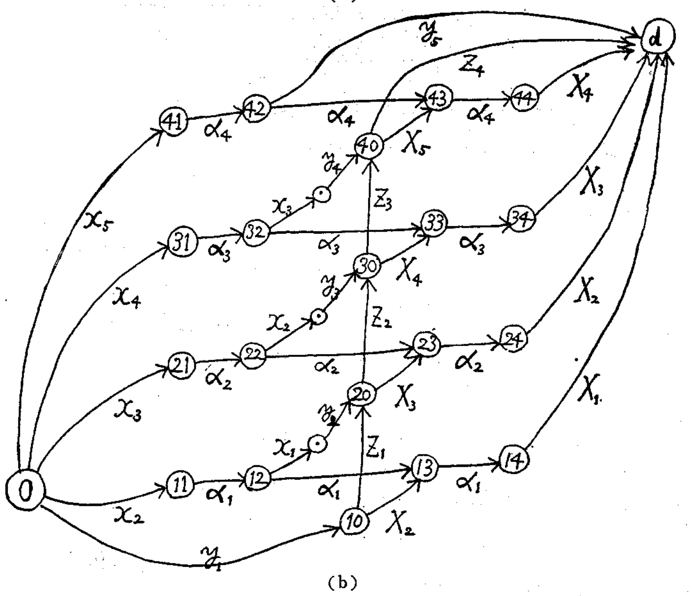
図―3 の場合と同様に，図―6 の集合 x_2 に到達しうる低速列車の本数は，その長さ x_2 に依存した上界 $\varphi(x_2)$ でおさえられる．図―6 の影響時間帯を表わす平行四辺形の底辺で表わされた集合（時間区間）に対応するのが，



図―6　2 種類の高速列車の影響時間帯



(a)



(b)

図—7　図—6 の影響時間帯の容量（仮定 I のある場合）

図—7(a) のグラフにおける点 ⓪ であり，集合 x_2, x_3, x_4, x_5 に対応するのが，⑪,㉑,㉛,㊶ である．これらの間を矢線で結べば，その矢線の容量は，$\varphi(x_2)$, $\varphi(x_3)$, $\varphi(x_4)$, $\varphi(x_5)$ である．これを前述の省略法 x_2, x_3, x_4, x_5 として書き入れてある．

同様に，集合 y_1 に対応するのが点 ⑩ であり ⓪ と ⑩ とを結ぶ矢線は容量 y_1 を持っている（詳しくは $\varphi(y_1)$）．次に集合 x_2 に到達した列車は第 2 種の高速列車を待避しなければならないので，待避線容量 α_1 をもって集合 x_1 に到達する（実際の一次元空間上では，列車は静止しているが，ここでは，時間をも考慮した 2 次元空間で考えているので，2 次元空間で考えた集合 x_2 から集合 x_1 へと列車は移動するわけである）．集合 x_1 に対応する 図—7(a) の点が ⑫ である．

集合 y_2 を表わす点を ⑳ とするとき，⑫, ⑩ からのみ ⑳ に矢線がつながることは明らかであろう．その場合 ⑩ からは詳しくは集合 z_1 からのみ集合 y_2 へ移動できるので集合 $x_1 \cup z_1$ に対応する点 ⊙ を挿入したわけである．集合 X_2 は点 ⑬ で表わされ，2 本の高速列車を待避する列車を許すので，⑫,⑬ が容量 α_1 の矢線で結ばれている．あとは同様にして，図—7(a) のグラフができる．

図—7(a) は 図—7(b) のようにもかける．図—7(a) の ⊙→⑳ を流れる流れは容量 y_2 以下であるが，$z_1>0$ ならば $y_2>z_1$ であり，$y_2=x_1+z_1$，また $z_1=0$ ならば $y_2 \leqq x_1$ があることに注意すれば，⑫ および ⑩ から ⑳ に至る流れの最大限界は (a), (b) とも同じになる．㉚, ㊵ についても同様である．

4. 仮定 I のない場合

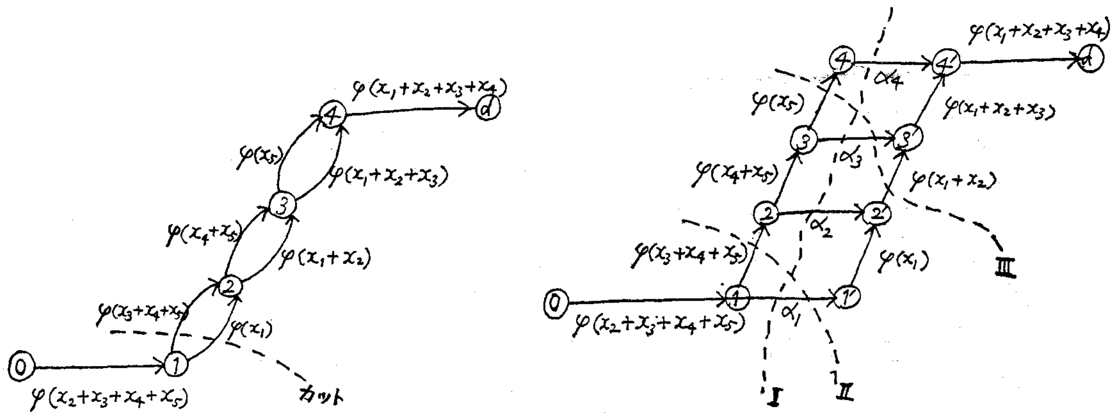
最初，待避制限のない場合を考えて，前節と比較してみよう．図—3 に与えられた（$d=5$ の場合）影響時間帯中の待避（低速）列車の容量は，図—8(a) のグラフにおける 0, d 間の最大フローに等しい．ただし

$$x_i=D_i\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right)$$

図—3 のダイヤから 図—8(a) のグラフが書ける理由．

図—3 の集合 $\overline{B_0M_1}$ を通過する（出発する）低速列車の本数は容量 $\varphi(x_2+x_3+x_4+x_5)$ で上から押さえられる．駅 1 から出発できる列車は，図で，高速列の軌跡 $\overrightarrow{A_0A_5}$ の左側から容量 $\varphi(x_3+x_4+x_5)$ 以内の本数だけ出発でき，右側からは容量 $\varphi(x_1)$ 以内の本数だけ，出発できる．それらの列車はすべて駅 ② に到達する．駅 ② においては $\overrightarrow{A_0A_5}$ の左側からは $\varphi(x_4+x_5)$ まで出発でき，$\overrightarrow{A_0A_5}$ の右側からは $\varphi(x_1+x_2)$ まで出発できる．

なお，当然のことながら，$\overrightarrow{A_0A_5}$ の右側の列車は，次第に増加し，$\overrightarrow{A_0A_5}$ の左側の列車は（駅を経るたびに）次第に減少しているので右側の列車が左側へ流れ込んだとしても，それ以上に左から右へ流れなければならない



(a) (b)

図—8 図—3 の影響時間帯の容量（仮定 I のない場合）

から，このグラフから計算された容量をもつダイヤは実現可能である．

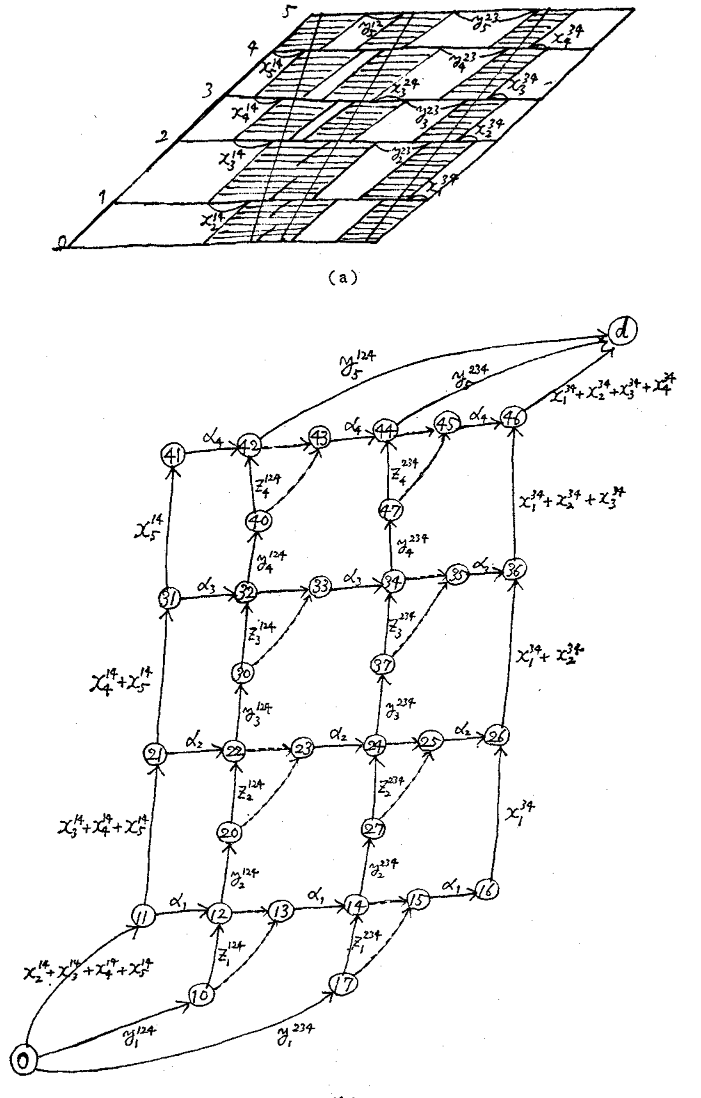
（最大フロー）＝（最小カットの容量）なので，この場合，明らかに次のように 5 つのカットの容量のうち最小のものとして求められる．

$$\min\{\varphi(x_2+x_3+x_4+x_5),\\ \varphi(x_3+x_4+x_5)+\varphi(x_1),\\ \varphi(x_4+x_5)+\varphi(x_1+x_2),\\ \varphi(x_5)+\varphi(x_1+x_2+x_3),\\ \varphi(x_1+x_2+x_3+x_4)\}$$

$\varphi(x)$ が単純な形のときは，D_i の一番大きいところ（**図—3** では D_2 すなわち①,②間）が最小カットを与える．

次に，**図—8** の (b) は待避制限のある場合である．カットの数は (a) では 5 つであったが (b) では 15 に増加している．α_i は駅 i の待避線数であり，最小カットが，（たとえば図の点線で示した I, II, III のうちのいずれかのような）待避線を表わす弧（矢線）を含む（すなわち，少なくとも一つの i に対して ⓘ と ⓘ' とを分離する）カットである限り，α_i を増加させることによって容量を増加させることができる．

一般の場合　高速列車 A, B, C の影響時間帯を考える（**図—9** (a)）．たとえば，A, B, C を第 1 種，第 2 種，第 3 種列車として，この影響時間帯に第 4 種列車を入れるグラフを書く．A の左側の（A より先発する）第 4 種列車は，$x_2{}^{14}+x_3{}^{14}+x_4{}^{14}+x_5{}^{14}$ の幅の時間帯を通って駅 0 より駅 1 に達するが，そこからは，後続高速列車 A を待避せず駅 2 へ進むか，または列車 A を待避するかのいずれかで



(a)

(b)

図—9 3 列車の影響時間帯の容量

ある．すなわち，幅 $x_3^{14}+x_4^{14}+x_5^{14}$ の時間帯を通って駅2に行くか，または容量 α_1 の待避線に入るかのいずれかである．それはグラフの節点⑪の分岐が示している．グラフの節点㉑,㉛,㊶についても同様である．

次に，列車 A, B の間の時点で駅0を出発する低速列車は幅 y_1^{124} の時間帯を通り駅1に達するが，そこで幅 z_1^{124} の時間帯を通って駅2へ進むか，列車 B を待避するため容量 α_1 の待避線に入るかのいずれかである．駅2へ進めるものは，列車Aを待避した列車と合わせて，幅 y_2^{124} の時間帯を通り駅2へと進むことができるし，さらに列車 B を待避することもできる．これが節点⑫のつながり方で示されている．

⑫から⑬への矢線と⑩から⑬への矢線の容量は不要である（∞としてよい）．それらは合わせて⑬→⑭の容量α_1の矢線へつながるので，有限な容量を強いてつけるならば α_1 をつけておけばよい．したがって，これらを点線で示した．$i=2, 3, 4$ に対する i_0, i_2, i_3 の3点の状態は⑩,⑫,⑬の状態と同様である．また i_4, i_5, i_7 も同様である．⑯,㉖,㊱,㊻の状態については説明するまでもなかろう．駅0を示す節点につながる矢線は，駅0から第4種列車がただちに入れる時間帯に対応しているし，駅 d を示す節点 d につながる矢線は，それらに対応する時間帯中の第4種列車はただちに駅 d に達することができることを示している．

高速列車が，一般に i, j, k 種の場合も同様である．またもっと多くの列車の影響時間帯についても，駅の数 d がもっと多くなって同様である．

次に記号の定義式および，ちょっとした変形をあげておく．

$$x_\nu{}^{ij}=D_\nu\left(\frac{1}{v_{j\nu}}-\frac{1}{v_{i\nu}}\right),$$

$$t_\nu{}^{ij}=D_\nu\left(\frac{1}{v_{j\nu}}-\frac{1}{v_{i\nu}}\right)$$

$$=x_\nu{}^{i\rho}-x_\nu{}^{j\rho},\ (i,\ j>\rho)$$

$$y_\nu{}^{ij\rho}=(t_0+t_1{}^{ij}+\cdots+t_{\nu-1}{}^{ij}-x_\nu{}^{j\rho})^+$$

$$=(t_0+t_1{}^{ij}+\cdots+t_\nu{}^{ij}-x_\nu{}^{i\rho})^+,$$

$$z_\nu{}^{ij\rho}=(y_\nu{}^{ij\rho}-x_{\nu+1}{}^{j\rho})^+$$

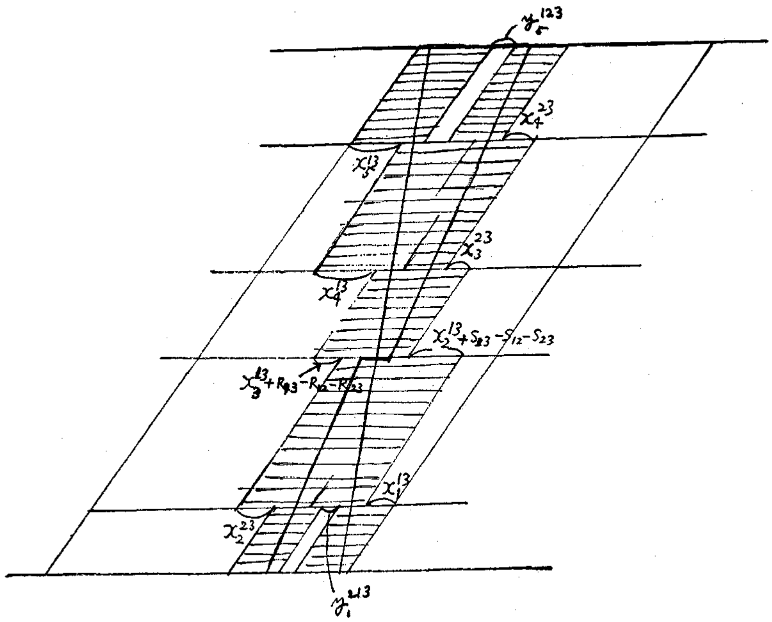
$$=(t_0+t_1{}^{ij}+\cdots+t_\nu{}^{ij}-x_\nu{}^{i\rho}-x_{\nu+1}{}^{j\rho})^+,$$

ここに，$x^+=\max(x, 0)$ である．

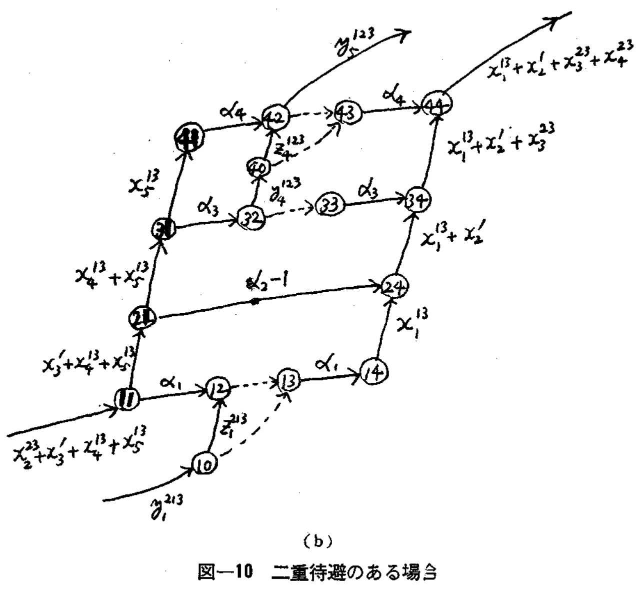
注意 1　⑩⇢⑬に x_2^{24} をつける必要はない．$y_1^{124}>x_2^{24}$ のときは $z_1^{124}>0$ で⑩⇢⑬には $y_1^{124}-z_1^{124}=x_2^{24}$ 以下しか流れない．$y_1^{124}\leqq x_2^{24}$ のときは $z_1^{124}=0$ で⑩⇢⑬には y_1^{124} 以下しか流れない．いずれにしてもそこには x_2^{24} 以下しか流れないことがわかるからである．

注意 2　$y_\nu{}^{ij\rho}>0$ かつ $z_\nu{}^{ij\rho}>0$ ならば $z_\nu{}^{ij\rho}\leqq y_{\nu+1}{}^{ij\rho}$ である．これは図からほとんど明らかであるが，式では次のように証明できる．

上の条件の下に



(a)



(b)

図—10　二重待避のある場合

$$y_\nu^{ij\rho}=t_0+t_1^{ij}+\cdots+t_{\nu-1}^{ij}-x_\nu^{j\rho}$$

であるから，

$$\begin{aligned} z_\nu^{ij\rho}&=y_\nu^{ij\rho}-x_{\nu+1}^{j\rho}\\ &=t_0+t_1^{ij}+\cdots+t_{\nu-1}^{ij}-x_\nu^{j\rho}-x_{\nu+1}^{j\rho}\\ &\leqq t_0+t_1^{ij}+\cdots+t_{\nu-1}^{ij}+t_\nu^{ij}-x_\nu^{j\rho}-x_{\nu+1}^{j\rho}\\ &=y_{\nu+1}^{ij\rho}-x_\nu^{i\rho}\\ &\leqq y_{\nu+1}^{ij\rho} \end{aligned}$$

もちろん，$i, j>\rho$ は仮定している．

注意 3 グラフにおいて直列の矢線は，中間節点②が，これ以上の節点と連結していない場合

$$① \xrightarrow{x} ② \xrightarrow{y} ③$$

は $$① \xrightarrow{\min(x, y)} ③$$

とできる．並列の矢線と連絡していて $x+z\leqq y$ の場合

$$\begin{matrix} ① \xrightarrow{x} & & \\ & ② \xrightarrow{y} ③ & \\ ④ \xrightarrow{z} & & \end{matrix}$$

は $$\begin{matrix} ① \xrightarrow{x} ③ \\ ④ \xrightarrow{z} ③ \end{matrix}$$

とできる．

このような関係により，グラフを簡単化して計算することができる．

また図—10のような二重待避のある場合は，α, x, y, z の値が変わってくるだけである．たとえば図—10(a)は図—10(b)のようにグラフ化できる．この場合駅2で二重待避を行うが，y_2, y_3 は0となり，z_2, z_3 も0である．これらを容量とする矢線はグラフからは除くことができる．また α_2 は α_2-1 となる．駅2において

$$x_3'=x_3^{13}+R_{13}-R_{12}-R_{23}$$
$$x_2'=x_2^{13}+S_{13}-S_{12}-S_{23}$$

である．

5. 結　　語

以上は，高速列車を待避する低速列車が，影響時間帯中に最大何本入るかを求める方法に，グラフ理論における‘最大フロー＝最小カット容量’の定理を応用できることを示したものである．この方法は，列車の種類が多くなっても有効である．

問題の線区を走る全列車の本数の計算は，これを基本として行うことができる．そのとき，政策条件が種々考えられるので，まずこれを定める必要がある（たとえば，続行列車群の取扱い方に関する条件，折り返し運転に関する条件等）．しかし，これらの条件が定められさえすれば，本文の方法により，グラフ化して，あるいは必要ならば部分グラフに分解することによって，簡単に線路容量を計算することができる．その上この方法は，どこの待避線をどれだけ増加させれば，容量がどれだけ増すかということまで，示している．

最後に種々有益なご注意を賜った論文集編集委員会の方々へ謝意を表します．

参　考　文　献

1) 名古屋鉄道管理局運転部：ダイヤ構成上の余裕時分について，昭和31年12月（1956）．
2) Rice, P.: Urban Railway Capacity in Peak Periods, Proc. of 6th Intern. Symp. of Trans. and Traf. Theory, ed. by Bucky, A.H. & A.W. Reed, pp. 663～683 (1973).
3) 山岸輝雄：線路容量の理論と応用，鉄道業務研究資料 1巻5号．鉄道技研（鉄道省）(1942)．
4) 山田　孜：複線区間の線路容量について，中央大学80周年記念論文集，pp. 525～535 (1965)．
5) 山田　孜：鉄道における平面交差の支障時間について，中央大学理工紀要12巻，pp. 152～159 (1969)．
6) 山田　孜：On the Network Representation of the Railroad Traffic Capacity，日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集，5～6 (1969)．
7) Yamada, A.: On the Interference Time Duration at the Railway Intersection, Jul. of Ops. Res. of Japan 13, pp. 111～128 (1971).
8) 山田　孜：鉄道における最適ダイヤおよび最適線路容量について，日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌 Vol. 19, No. 4, pp. 287～294 (1976)．

(1976.1.31・受付)