

多柱基礎橋脚に対する水の付加質量の 3 次元解析*

THREE DIMENSIONAL ANALYSIS ON ADDED MASS OF WATER TO MULTI-PILES FOUNDATION

小 坪 清 真**・高 西 照 彦***
By Seima KOTSUBO and Teruhiko TAKANISHI

1. ま え が き

著者らは前論¹⁾において、多柱基礎橋脚に対する動水圧及び水の付加質量に関する 2 次元論的考察を行い、著者らが導いた理論解と 2 次元模型による実験値とが、よく一致することを確かめた。

一般に、水中橋脚に対する動水圧及び水の付加質量の深さ方向の分布は一様ではない。単円柱に対する動水圧及び水の付加質量の深さ方向の分布に関しては、すでに理論的、実験的研究がいくつか行われており^{2)~5)}、水中橋脚に対する動水圧及び水の付加質量の問題が詳細に解明されている。しかし、多柱基礎橋脚に対する動水圧及び水の付加質量に関する 3 次元解析はほとんど行われていない。

本論では、多柱基礎橋脚が剛振動をする場合及び弾性振動をする場合のそれぞれについて、まず (i) 単円柱に対する動水圧及び水の付加質量の深さ方向の分布を表わす簡単な近似式を提案し、次に (ii) 多柱基礎橋脚に対する動水圧及び水の付加質量に関する 3 次元理論解を導き、その深さ方向の分布型が単円柱のそれとほとんど相似であると見なしてもよいことを数値計算によって立証し、最後に (iii) 前論¹⁾において求めた多柱基礎橋脚に対する 2 次元動的な動水圧及び水の付加質量の値を用いれば、前述の (i), (ii) の所論から、多柱基礎橋脚に対する 3 次元動的な動水圧及び水の付加質量を簡単な計算式によって、理論的に求めることができることを示した。

2. 多柱基礎橋脚が水中で剛振動をする場合

本章では、多柱基礎橋脚が水中で剛振動をする場合に各橋脚に対する動水圧、および付加質量の深さ方向分布

を理論的に求める方法及びその近似表現式について述べる。

(1) 単円柱に対する動水圧及び水の付加質量の厳密解

単円柱が水中で剛振動をする場合に対する動水圧及び水の付加質量に関する理論解は、円形断面については後藤・土岐²⁾、桜井^{3), 4)}、著者らの一人¹⁾によって、楕円形断面については著者らの一人⁵⁾によってすでに求められている。

本論では以下の議論に必要な結果のみを示す。

図-1 に示すように、水中において単円柱が

$$y_0 = -\frac{K_h g}{\omega^2} i e^{i\omega t} \dots \dots \dots (1)$$

で表わされる剛振動を行うとき、水中の任意点における動水圧は次式に示す動水圧 σ に関する基礎式

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - \frac{\omega_0}{g E_v} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

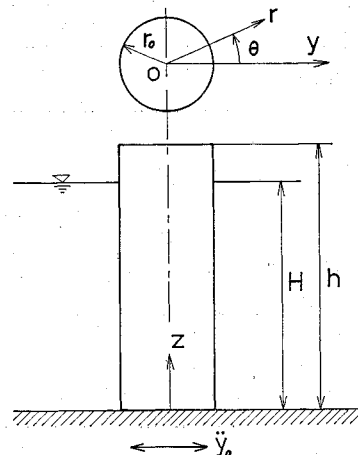


図-1 単円柱の水中剛振動

* 土木学会昭和 50 年度年次学術講演会にて一部発表
** 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科
*** 正会員 九州工業大学助教授 開発土木工学科

を次の境界条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \right)_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \sigma \Big|_{\theta=\pi/2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{\omega_0}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{r=r_0} = K_h \omega_0 \cos \theta \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

の下で解けば得られて次式のように表わされる。

$$\sigma_1^r = K_h r_0 \omega_0 E_1^r \cos \theta \cdot i e^{i\omega t} \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} E_1^r = & \frac{8 \sinh \lambda_0 H \cdot H_1^{(2)}(\eta_0 r) \cdot \cosh \lambda_0 z}{\eta_0 r_0 (\sinh 2 \lambda_0 H + 2 \lambda_0 H) \{H_0^{(2)}(\eta_0 r_0) - H_2^{(2)}(\eta_0 r_0)\}} \\ & + \sum_{m=1}^M \frac{8 \sin \lambda_m H \cdot H_1^{(2)}(\eta_m r) \cdot \cos \lambda_m z}{\eta_m r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) \{H_0^{(2)}(\eta_m r_0) - H_2^{(2)}(\eta_m r_0)\}} \\ & - \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{8 \sin \lambda_m H \cdot K_1(\eta_m' r) \cdot \cos \lambda_m z}{\eta_m' r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) \{K_0(\eta_m' r_0) + K_2(\eta_m' r_0)\}} \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 K_h ：水平震度、 ω ：円柱の剛振動の円振動数、
 g ：重力の加速度、 i ：虚数単位、 ω_0 ：水の単位体積重量、
 r_0 ：円柱の半径、 d ：円柱の直径

$$- \sum_{m=1}^M \frac{8 b_m \sin \lambda_m H \cos \lambda_m z}{\eta_m r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) (A_m^2 + B_m^2)} \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \sqrt{c_0^2 + \lambda_0^2} \\ \eta_m &= \sqrt{c_0^2 - \lambda_m^2}, \quad (m=1, 2, \dots, M) \\ \eta_m' &= \sqrt{\lambda_m^2 - c_0^2}, \quad (m=M+1, M+2, \dots) \\ \lambda_0 &: \coth \lambda_0 H = \delta / \lambda_0 H \text{ の解} \\ \lambda_m &: \cot \lambda_m H = -\delta / \lambda_m H \text{ の解} \\ \delta &: \delta = gH / c^2 C_H^2 \\ c_0 &: c_0 = \omega / c \\ c &: c = \sqrt{g E_v / \omega_0} \\ C_H &: C_H = c_0 H = \omega H / c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_m &= J_0(\eta_m r_0) - J_2(\eta_m r_0) \\ B_m &= Y_0(\eta_m r_0) - Y_2(\eta_m r_0) \\ a_m &= A_m J_1(\eta_m r_0) + B_m Y_1(\eta_m r_0) \\ b_m &= B_m J_1(\eta_m r_0) - A_m Y_1(\eta_m r_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$(m=0, 1, 2, \dots, M)$

また、単円柱の単位長さ当りの付加質量は

$$\omega_{1s}^r = \pi r_0^2 \omega_0 F_{1s}^r \dots\dots\dots (12)$$

式 (9) の F_{1s}^r が単柱に対する水の付加質量係数 (円柱の単位長さ当りの付加質量と円柱の排除水の質量との比) の深さ方向分布を表わす理論式である。

式 (9) 及び式 (10) の右辺第 1 項は表面波の影響を示す項であり、また式 (10) は円柱の振動 $y_0 = (K_h g / \omega^2) \sin \omega t$ と位相が $\pi/2$ だけ異なる減衰項である。

式 (9), (10) の F_{1s}^r, F_{1c}^r を $H=50$ m に対して、いろいろの d/H 及び式 (6) の C_H の値について数値計算をした結果を図-2 (a), (b), (c) に示す。図において実線は式 (9) の F_{1s}^r 、点線は式 (10) の F_{1c}^r である。なお、 $H=20$ m の場合についてもほとんど同様な傾向をもつ図が得られた。

(2) 単円柱に対する動水圧及び水の付加質量係数の近似式

水中で剛振動する単円柱に対する動水圧及び水の付加質量係数の厳密解式 (8), (9) は、その数値計算が煩雑であるところから、種々の近似式が提案されている^{3)~6)}。各著者によって提案された水の付加質量係数の深さ方向分布を表わす近似式を列挙すれば、次の通りである。

(i) 桜井の式³⁾

$$\bar{F}_{1s}^r = \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2 \cdot d/H}, \quad \left(\frac{d}{H} \leq 0.3\right) \dots\dots (13)$$

(ii) 土岐の式⁶⁾

E_v ：水の体積弾性率

M ： $c_0^2 > \lambda_m^2$ を満足する最大の m の値

$H_n^{(2)}$ ： n 次の第 2 種 Hankel 関数

K_n ： n 次の変形 Bessel 関数

したがって、単円柱の単位長さ当りに働らく動水圧は

$$\begin{aligned} p_1^r &= \int_0^{2\pi} \sigma_1^r \Big|_{r=r_0} \cos \theta \, d\theta \\ &= K_h \pi r_0^2 \omega_0 E_1^r (r=r_0) \cdot i e^{i\omega t} \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

となる。式 (7) の実数部を $R_e(p_1^r)$ と書き、

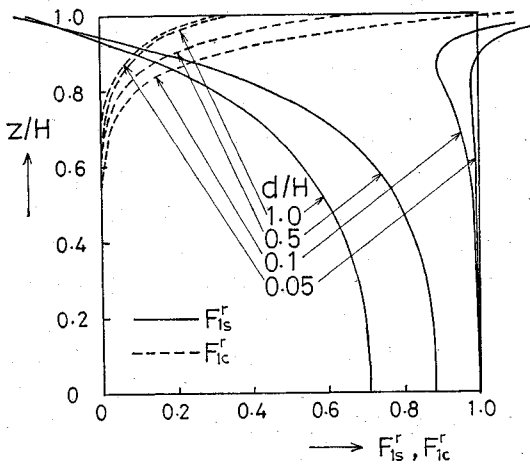
$$R_e(p_1^r) = K_h \pi r_0^2 \omega_0 \{F_{1s}^r \sin \omega t + F_{1c}^r \cos \omega t\} \dots\dots\dots (8)$$

とおけば

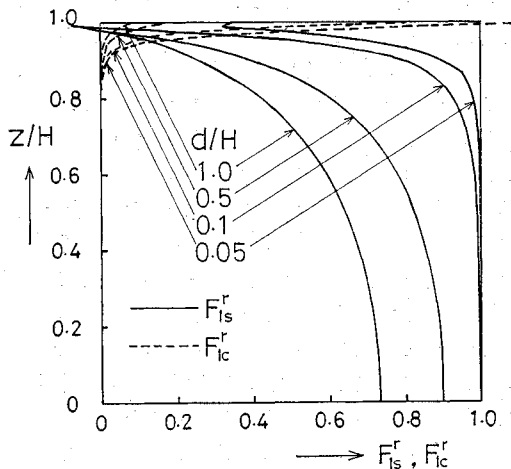
$$\begin{aligned} F_{1s}^r = & -\frac{8 a_0 \sinh \lambda_0 H \cosh \lambda_0 z}{\eta_0 r_0 (\sinh 2 \lambda_0 H + 2 \lambda_0 H) (A_0^2 + B_0^2)} \\ & - \sum_{m=1}^M \frac{8 a_m \sin \lambda_m H \cos \lambda_m z}{\eta_m r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) (A_m^2 + B_m^2)} \\ & + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_m H}{(\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H)} \\ & \quad \cdot \frac{K_1(\eta_m' r_0) \cdot \cos \lambda_m z}{\{\eta_m' r_0 K_0(\eta_m' r_0) + K_1(\eta_m' r_0)\}} \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

$$F_{1c}^r = -\frac{8 b_0 \sinh \lambda_0 H \cosh \lambda_0 z}{\eta_0 r_0 (\sinh 2 \lambda_0 H + 2 \lambda_0 H) (A_0^2 + B_0^2)}$$

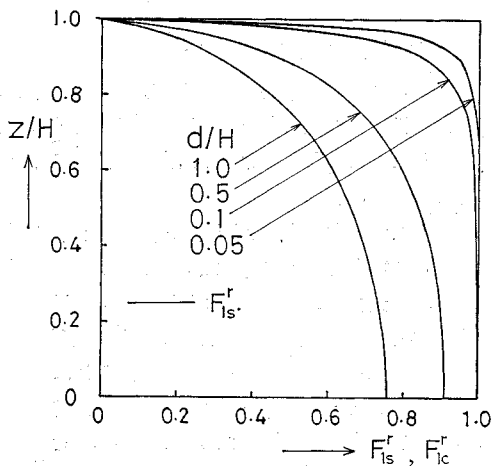
$$\bar{F}_{1s}^r = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{d}{H}\right) \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/3}, \quad \left(\frac{d}{H} \leq 2\right) \quad \dots\dots\dots(14)$$



(a) $H=50\text{m}, C_H=0.05$



(b) $H=50\text{m}, C_H=0.1$



(c) $H=50\text{m}, C_H=0.5$

図-2 単円柱に対する水の付加質量係数の厳密解

(iii) 小坪の式⁵⁾

$$\bar{F}_{1s}^r = c \left(1 - \frac{z}{H}\right)^\beta, \quad \left(\frac{d}{H} \leq 2\right) \quad \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 $d(=2r_0)$ は円柱の直径である。なお、式(15)における c, β はそれぞれ d/H の値に応じて定まる定数であり、それらの値は図表⁵⁾から求められる。

以上の各近似式はいろいろの d/H の値に対して、一様により精度で水の付加質量分布を近似しているとはいえない。本論において著者らは水の圧縮性及び表面波の影響(ただし、その影響があまり大きくない範囲で)を考慮した単円柱に対する水の付加質量係数を求める近似式を新たに次式のように表わした。

$$\bar{F}_{1s}^r = c_F \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\beta_F \left(1 + \frac{z}{H}\right)}, \quad \left(\frac{d}{H} \leq 1\right) \quad \dots\dots\dots(16)$$

上式において、 c_F, β_F はそれぞれ H 及び式(6)の C_H をパラメーターとして、 d/H の値に応じて定まる定数であり、 c_F, β_F の値は図-3によって求めることができる。多柱基礎橋脚を対象とした場合、 $d/H \leq 1$ の範囲を考えれば十分であるから、図にはその範囲内における c_F, β_F を示した。

近似式としては、できるだけ簡単な関数型であって、しかも広い範囲のパラメーターの変化に対しても近似のよい式が望まれるのは勿論であるが、式(16)は、現在一般に普及している関数機能を備えた小型電卓を用いれば、一連の操作で容易にその値を求めることができる。

各著者によって提案された近似式を用いて計算した単円柱に対する水の付加質量係数を厳密解式(9)を用いて

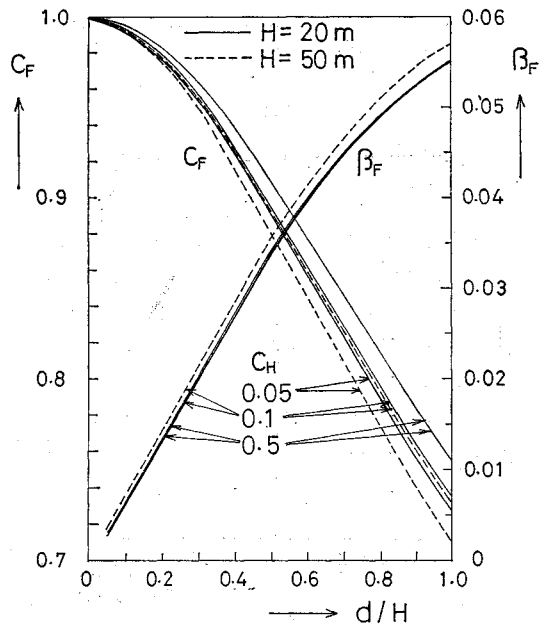


図-3 c_F 及び β_F

計算したそれと比較した。その一例を図示すれば 図-4 (a), (b), (c) の通りである。図から著者らの提案した式

は d/H の広い範囲にわたって厳密解によく近似していることがわかる。

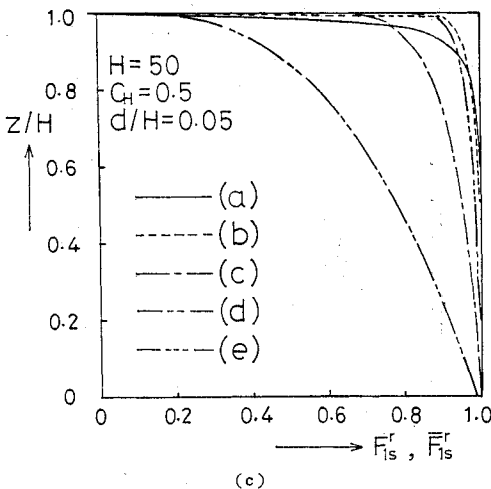
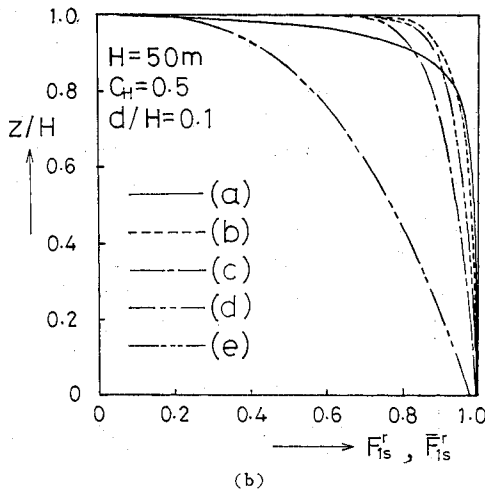
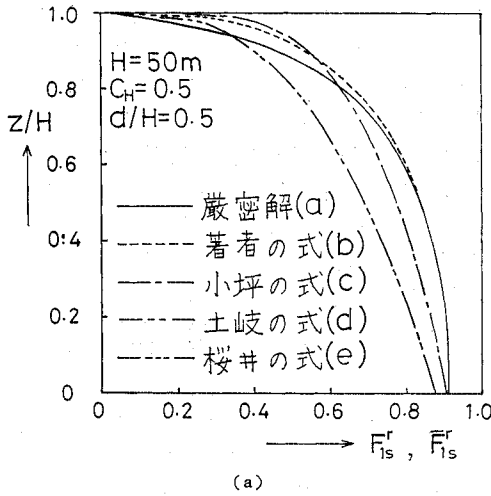


図-4 単円柱に対する水の付加質量係数の近似式

(3) 多柱基礎橋脚に対する動水圧及び水の付加質量

頭部を連結された半径 r_0 (直径 d)、中心点間距離 l の 2本の円柱が、水中で柱並び方向に剛振動する場合に対する動水圧及び水の付加質量は、前論¹⁾の所論と同じように考えればこれを理論的に求めることができる。すなわち、 i, j 両円柱が水中で剛振動する場合、各柱に対する動水圧を求めるには、(i) 頭部を連結された i, j 両円柱が水中で剛振動する場合の動水圧の第1次近似式は、単円柱が水中で剛振動する場合の動水圧を表わす式(4)の σ_1 を用いて、これを i, j 両円柱について重ね合わせることによって $\sigma_2 = \sigma_{i1} + \sigma_{j1}$ と表わすことができる。(ii) いま得られた σ_2 から各円柱の柱表面での水分子の変位速度を求めると、それはたとえば i 柱については、 j 柱の運動による影響を受けて、柱表面上各点での水分子の変位速度は、円柱自身の柱表面上の各点での変位速度に等しくならなければならないという境界条件を満足しない。(iii) そこで i, j 両円柱のおおのについて、適当な動水圧 $\sigma_{ii}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ の補正を行う。ここに $\sigma_{ii}^{(1)}$ は、この $\sigma_{ii}^{(1)}$ によって i 柱の柱表面上の各点における変位速度に関する境界条件が満たされるように選び、 $\sigma_{ij}^{(1)}$ についても j 柱に関して i 柱の場合と同様な方法で $\sigma_{ij}^{(1)}$ を選ぶ。(iv) このようにして得られた $\sigma_2 = \sigma_{i1} + \sigma_{j1} + \sigma_{ii}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(1)}$ を用いて、再び各円柱の柱表面上における水分子の変位速度を求める。しかし一般には、たとえば i 柱については、 j 柱の $\sigma_{ij}^{(1)}$ のためにその柱表面上の各点での変位速度に関する境界条件が完全には満足されない (i) の場合に比べるとその差は小さくはなっているが。(v) したがって、以下前述の (ii) ~ (iv) の操作を何度も繰り返して動水圧の補正を行い

$$\sigma_2 = \sigma_{i1} + \sigma_{j1} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \sigma_{ii}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(n)} \}$$

を求めれば、これは一定値に収束して、この σ_2 を用いて求めた各円柱の柱表面上の各点における水分子の変位速度は、それぞれ各円柱自身の表面上の各点での変位速度に等しくなる。

このような考え方に従えば、 i, j 両円柱が水中で剛振動する場合の動水圧の厳密解を求めることができるが、(iii) で述べた通りに補正を行おうとすれば、円柱表面上の各点で境界条件を満足するように適当な補正動水圧 $\sigma_{ii}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(n)}$ を求めることが必要であり、それは非常に煩雑である。したがって本論では、この境界条件を少しゆるめて、各円柱の中心位置だけにおいて σ_2 を用いて求めた水分子の変位速度と円柱の変位速度とを等しくするという条件に置きかえて、2本柱が水中で剛振動する

ときの動水圧 σ_z を求めた。このようにすれば、2本以上の円柱に対してもその動水圧の理論式を比較的容易に求めることができる。しかし、各柱の中心点間距離 l と各円柱の直径 d との比 l/d が小さいときには、このような方法で求めた動水圧には多少の誤差が伴うが、 $l/d > 1.5$ のときにはその誤差は無視できるほど小さいことを前論¹⁾の2次元動水圧の場合についてすでに確かめてい

る。一般に多柱基礎橋脚においては $l/d \leq 1.5$ とすることは少ないので、上述の近似は十分実用的であるといえよう。

以上述べた考え方に従って、2本柱が水中で柱並び方向に剛振動する場合の動水圧及び水の付加質量係数を求めた。結果のみを示せば次の通りである。

円柱1本の単位長さ当りに働く動水圧 p_{12}^r は

$$p_{12}^r = K_H \pi r_0^2 \omega_0 E_{12}^r \dots \dots \dots (17)$$

$$E_{12}^r = - \frac{8 \sinh \lambda_0 H \cosh \lambda_0 z}{\eta_0 r_0 (\sinh 2 \lambda_0 H + 2 \lambda_0 H) (A_0^2 + B_0^2)} \{a_0 + c_0 J_1(\eta_0 r_0), b_0 + d_0 J_1(\eta_0 r_0)\} \{E + B_0\}^{-1} \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix} \\ - \sum_{m=1}^M \frac{8 \sin \lambda_m H \cos \lambda_m z}{\eta_m r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) (A_m^2 + B_m^2)} \{a_m + c_m J_1(\eta_m r_0), b_m + d_m J_1(\eta_m r_0)\} \cdot \{E + B_m\}^{-1} \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix} \\ + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{1+R_m} \cdot \frac{4 \sin \lambda_m H \cdot K_1(\eta_m' r_0) \cos \lambda_m z}{(\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) \{\eta_m' r_0 K_0(\eta_m' r_0) + K_1(\eta_m' r_0)\}} \sin \omega t \\ - \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{R_m}{1+R_m} \cdot \frac{8 \sin \lambda_m h \cdot I_1(\eta_m' r_0) \cos \lambda_m z}{\eta_m' r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H)} \sin \omega t \dots \dots \dots (18)$$

ここに、 E は 2×2 の単位行列、

$$B_m = \frac{1}{A_m^2 + B_m^2} \begin{bmatrix} c_m & d_m \\ -d_m & c_m \end{bmatrix} \\ c_m = A_{m1} A_m + B_{m1} B_m, \quad d_m = A_{m1} B_m - B_{m1} A_m \\ A_{m1} = J_0(\eta_m l) - J_2(\eta_m l), \quad B_{m1} = Y_0(\eta_m l) - Y_2(\eta_m l) \quad (m=0, 1, 2, \dots, M) \\ R_m = \frac{r_0 \{\eta_m' l K_0(\eta_m' l) + K_1(\eta_m' l)\}}{l \{\eta_m' r_0 K_0(\eta_m' r_0) + K_1(\eta_m' r_0)\}} \dots \dots \dots (19)$$

また、水の付加質量係数 F_{12s}^r は、式 (18) の E_{12}^r を

$$E_{12}^r = F_{12s}^r \sin \omega t + F_{12c}^r \cos \omega t \dots \dots \dots (20)$$

と書いて

$$F_{12s}^r = E_{12}^r \text{ の } \sin \omega t \text{ の係数} \dots \dots \dots (21)$$

によって求められる。

いろいろの $H, C_H, d/H$ について、両円柱の中心点間距離 l と円柱径 d との比 l/d を種々変えて、式 (21)

の F_{12s}^r を計算した。単円柱と2本柱とに対する水の付加質量係数を、それぞれ $z=0$ のときの値 $F_{1s}^r|_{z=0}$ 及

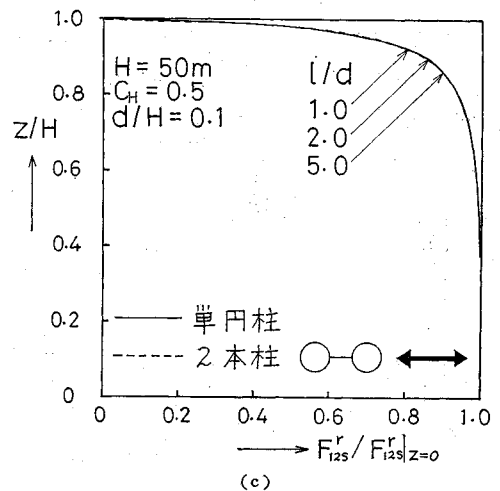
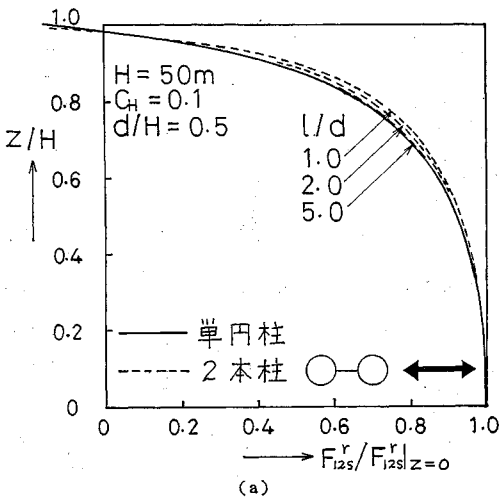
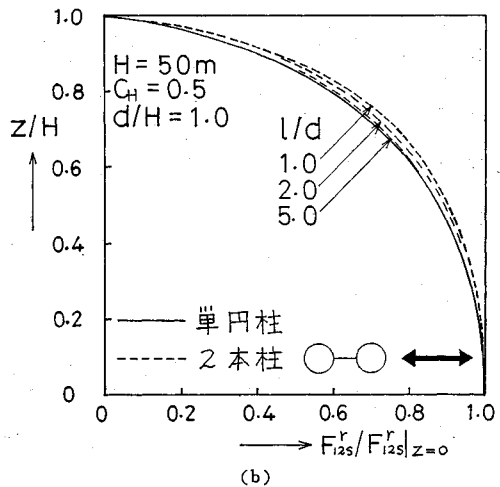


図-5 単円柱及び2本柱に対する水の付加質量係数の理論解

び $F_{12s}^r|_{z=0}$ で割って規準化して表わした。結果の一例を図示すれば 図-5(a), (b), (c) の通りである。図-5には柱並び方向振動の場合に対する結果を示したが、柱並び直角方向振動の場合についても同様な結果を得る。また、 $H=20\text{ m}$ の場合についても 図-5 とほとんど同様な傾向を示す。

図-5 から次のようなことがいえる。(i) 同一の $H, C_H, d/H$ の値については、いろいろの l/d に対する各 $F_{12s}^r/F_{12s}^r|_{z=0}$ 曲線間における差はきわめて小さい。さらに d/H の値が小さいほどその差は小さくなる。(ii) 同一の $H, C_H, d/H$ の値については、単円柱の $F_{1s}^r/F_{1s}^r|_{z=0}$ 曲線といろいろの l/d に対する $F_{12s}^r/F_{12s}^r|_{z=0}$ 曲線とはその差がきわめて小さい。

(4) 多柱基礎橋脚に対する動水圧及び水の付加質量の近似式

深さ方向の変化は一様であるとして、2次元解析によ

って求めた多柱基礎橋脚に対する水の付加質量係数を $F_{mns}^{(2)}$ とすれば、前述の (2), (3) の結果を考慮して、多柱基礎橋脚に対する橋脚1本の単位長さ当りの動水圧及び水の付加質量係数は、次に示すような近似式を用いてこれを求めることができる。

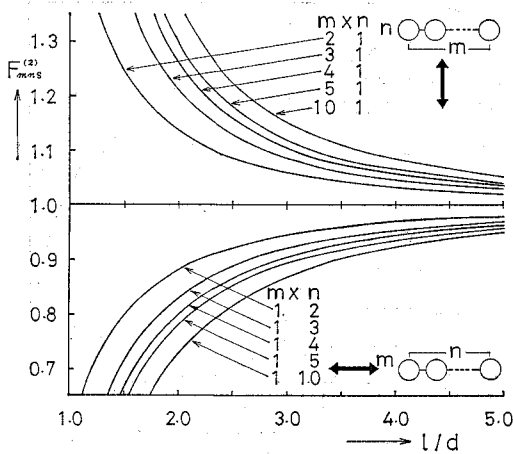
$$\bar{P}_{mns}^r = K_h \pi r_0^2 \omega_0 \bar{F}_{mns}^r \sin \omega t \dots \dots \dots (22)$$

$$\bar{F}_{mns}^r = F_{mns}^{(2)} C_F (1-z/H)^{\beta_F (1+z/H)^3} \dots \dots \dots (23)$$

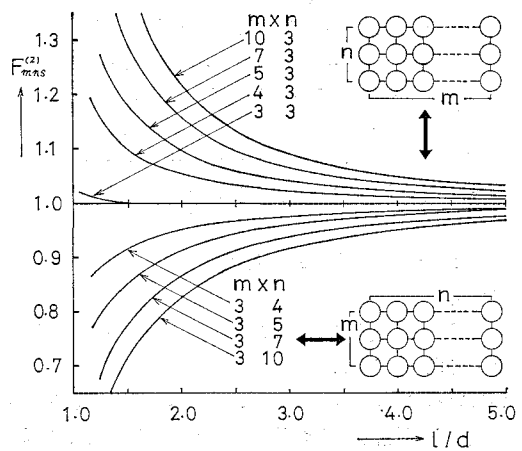
ここに、下つき添字 m, n は m が振動方向に直角な方向の柱本数、 n が振動方向の柱本数を示す。したがって全柱数は $m \times n$ 本となる。

$F_{mns}^{(2)}$ については、すでに前論¹⁾において種々の柱配置を有する円柱群に対して、その値を理論的に求めてこれを実験値と比較し、両者がよく一致することを確かめた。本節では参考のため、種々の柱配置をもつ円柱群に対する $F_{mns}^{(2)}$ の理論解を図-6(a), (b), (c), (d) に示した。

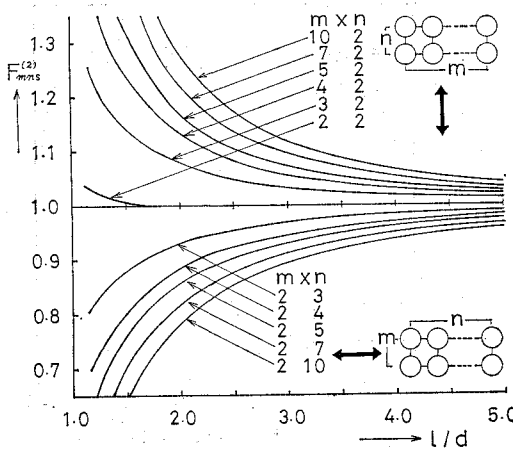
さて、以上述べた議論にしたがって多柱基礎橋脚に対する水の付加質量係数を求めるには次のようにすればよ



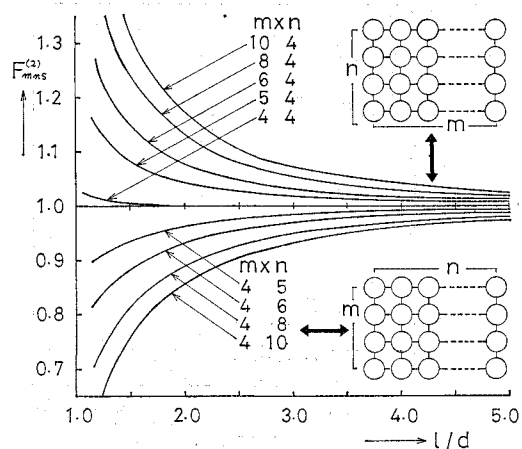
(a) $m \times 1, 1 \times n$ 本柱



(c) $m \times 3, 3 \times n$ 本柱



(b) $m \times 2, 2 \times n$ 本柱



(d) $m \times 4, 4 \times n$ 本柱

図-6 $F_{mns}^{(2)}$ 曲線

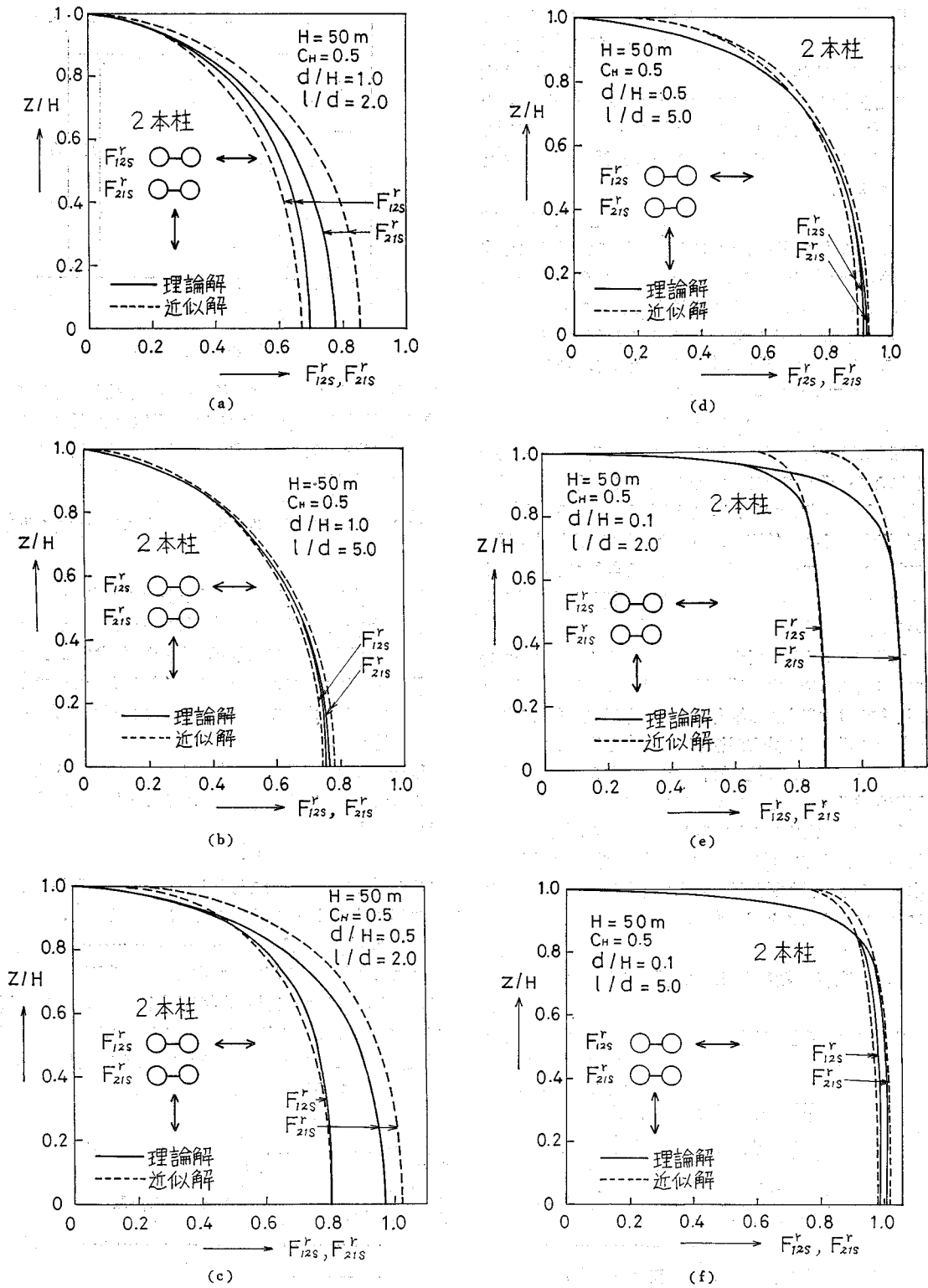


図-7 2本柱に対する水の付加質量係数

い。すなわち、まず (i) 水深、橋脚の直径、橋脚に対する円振動数が与えられれば $H, C_H, d/H$ が定まるから、図-3 を用いて c_F, β_F を求める。(ii) 橋脚の本数と各橋脚の配置が与えられれば、図-6 から $F_{mns}^{(2)}$ を求めることができる。(iii) いま求めた $c_F, \beta_F, E_{mns}^{(2)}$ を用いれば、式 (23) から任意の水深 z における橋脚1本の単位長さ当りの水の付加質量係数 \bar{F}_{mns}^r を得ることができる。

式 (23) の有用性を示すために、一例として頭部を連結された2本柱が柱並び方向及び柱並び直角方向に水中で剛振動するとき、 $H=50\text{ m}$ 、 $C_H=0.5$ 、 $d/H=1.0$ 、 0.5 、 0.1 、 $l/d=2.0$ 、 5.0 の各場合について、それぞれ式 (21) による理論式と式 (23) による近似式を用いて F_{12s}^r 、 F_{21s}^r 及び \bar{F}_{12s}^r 、 \bar{F}_{21s}^r を求めて、それらを図示すれば 図-7 (a)~(f) の通りである。同図から、著者らが提案した近似式を用いて求めた2本柱に対する動水圧及び水の付加質量係数は、理論式を用いて求めたそれによく一致しているといえる。さらに、他の $H, C_H, d/H, l/d$ の値についても、表面波及び水の圧縮性の影響が比較的小さい範囲においては (実際の多柱基礎橋脚に対しては、これらの影響はほとんど無視できるほど小さい) 近似解 (23) は式 (21) の理論解とよく一致している。

本論では2本柱に対する動水圧を求める方法について、著者らの考え方の妥当性を数値計算によって示したが、柱が2本以上ある場合についても単柱と多柱の場合の両者の動水圧の分布が相似形であると見なしてよいことから考えれば、多柱の場合についても2本柱の場合と同様な結果を得ることは明らかである。

$F_{mns}^{(2)}$ を求めることは容易であるから、式 (23) を用いれば、水中で剛振動をする多柱基礎橋脚に対する動水圧及び水の付加質量係数の深さ方向分布を簡単な計算によって求めることができる。

3. 多柱基礎橋脚が水中で弾性振動をする場合

本章では、多柱基礎橋脚が基盤から正弦波入力を受け

$$\begin{aligned}
 p_1^e = & \frac{\omega_0}{g} \frac{8\pi r_0^2 \lambda_0 h \omega^2 \cdot H_1^{(2)}(\eta_0 r_0) \cdot \cosh \lambda_0 z}{\eta_0 r_0 (\sinh 2\lambda_0 H + 2\lambda_0 H) \{H_0^{(2)}(\eta_0 r_0) - H_2^{(2)}(\eta_0 r_0)\}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^H Y(z) \cosh \lambda_0 z dz \cdot ie^{i\omega t} \\
 & + \sum_{m=1}^M \frac{\omega_0}{g} \frac{8\pi r_0^2 \lambda_m h \omega^2 \cdot H_1^{(2)}(\eta_m r_0) \cdot \cos \lambda_m z}{\eta_m r_0 (\sin 2\lambda_m H + 2\lambda_m H) \{H_0^{(2)}(\eta_m r_0) - H_2^{(2)}(\eta_m r_0)\}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^H Y(z) \cos \lambda_m z dz \cdot ie^{i\omega t} \\
 & - \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{\omega_0}{g} \frac{8\pi r_0^2 \lambda_m h \omega^2 \cdot K_1(\eta_m' r_0) \cos \lambda_m z}{\eta_m' r_0 (\sin 2\lambda_m H + 2\lambda_m H) \{K_0(\eta_m' r_0) + K_2(\eta_m' r_0)\}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^H Y(z) \cos \lambda_m z dz \cdot ie^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{26}$$

さて、単円柱の水中における変形曲線 $Y(z)$ は円振動数 ω の値によって異なり、 $Y(z)$ を定めるためには水中における単円柱の振動方程式を解くことが必要になる。

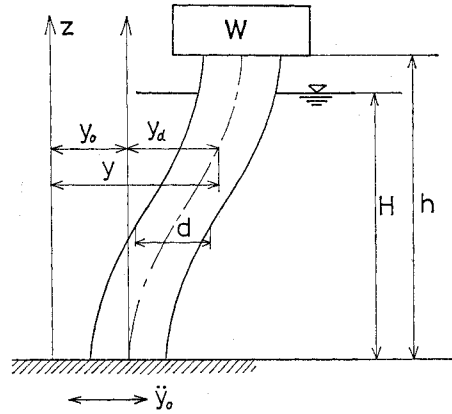


図-8 単円柱の水中弾性振動

て水中で運動する場合に、橋脚の曲げ剛性を考慮して各橋脚の弾性振動成分に対する動水圧及び水の付加質量の深さ方向分布を理論的に求める方法及びその近似表現式について述べる。

(1) 単円柱に対する動水圧及び水の付加質量の厳密解

単円柱が基盤から正弦波入力を受けて水中で運動する場合に対する動水圧及び水の付加質量に関する理論解は、円形断面については後藤・土岐²⁾、桜井⁴⁾によって、楕円形断面については著者らの一人⁵⁾によってすでに求められている。本論ではこれについて必要な事項のみを簡単に述べる。

図-8 に示すように、上載荷重 W をもつ単円柱が、その基盤から式 (1) で表わされるような強制変位を受けて、水中で

$$y_d = -Y(z)ie^{i\omega t} \tag{24}$$

で表わされる弾性振動を行うとき、単円柱の単位長さ当りに働く動水圧 p_1 は次式のように表わされる。

$$p_1 = p_1^e + p_1^r \tag{25}$$

ここに、 $Y(z)$ は単柱の水中における変形曲線である。また、 p_1^r は単円柱の剛振動成分 y_0 による動水圧で、式 (7) によって与えられる。 p_1^e は単円柱の弾性振動成分 y_d による動水圧で、次式のように表わされる。

単円柱の曲げ剛性を EI 、断面積を A 、単位体積重量を w とすれば、単円柱の振動方程式は

$$\frac{wA}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y_0 + y_d) = -EI \frac{\partial^4 y_d}{\partial x^4} + p_1^e + p_1^r \quad (27)$$

と表わされる。いま地震動を式(1)なる正弦振動と仮定すれば、単円柱の弾性振動変位は式(24)で表わされ、 p_1^e 及び p_1^r はそれぞれ式(26)及び式(7)、(5)によって与えられる。ここで、 $Y(x)$ を空気中における単円柱の振動型 ϕ_s を用いて

$$Y(x) = \sum_{s=1}^{\infty} D_s \phi_s(k_s x) \quad (28)$$

のように展開する。ここに、 D_s は各振動型 ϕ_s の寄与分を表わす未定係数、 $k_s h$ は単円柱が空気中で振動するときの固有値である。

さて、式(1)、(24)、(28)、(26)、(7)の各式を式(27)に代入し、固有関数 ϕ_s の直交性を利用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{n_{av}^2}{\omega^2}\right) \psi_\nu D_\nu + \frac{\pi r_0^2 w_0}{wA} \sum_{s=1}^{\infty} D_s (-\varrho_{s\nu}^{(1)} - \varrho_{s\nu}^{(2)} + \varrho_{s\nu}^{(3)}) \\ = -\frac{K_h g}{\omega^2} \left\{ \Pi_\nu + \frac{\pi r_0^2 w_0}{wA} (-\Gamma_\nu^{(1)} - \Gamma_\nu^{(2)} + \Gamma_\nu^{(3)}) \right\} \quad (\nu=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (29)$$

ここに、 n_{av} は単円柱の空気中における第 ν 次の固有円振動数である。さらに、

$$\psi_\nu = \frac{1}{h} \int_0^h \phi_\nu^2(k_\nu z) dz + \frac{W}{wAh} \phi_\nu^2(k_\nu h) \quad (30)$$

$$\Pi_\nu = \frac{1}{h} \int_0^h \phi_\nu(k_\nu z) dz + \frac{W}{wAh} \phi_\nu(k_\nu h) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \varrho_{s\nu}^{(1)} = \frac{8 \lambda_0 h H_1^{(2)}(\eta_0 r_0)}{\eta_0 r_0 (\sinh 2 \lambda_0 H + 2 \lambda_0 H) \{H_0^{(2)}(\eta_0 r_0) - H_2^{(2)}(\eta_0 r_0)\}} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^H \phi_s(k_s z) \cosh \lambda_0 z dz \right\} \\ \cdot \left\{ \frac{1}{h} \int_0^H \phi_\nu(k_\nu z) \cosh \lambda_0 z dz \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho_{s\nu}^{(2)} = \sum_{m=1}^M \frac{8 \lambda_m h H_1^{(2)}(\eta_m r_0)}{\eta_m r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) \{H_0^{(2)}(\eta_m r_0) - H_2^{(2)}(\eta_m r_0)\}} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^H \phi_s(k_s z) \cos \lambda_m z dz \right\} \\ \cdot \left\{ \frac{1}{h} \int_0^H \phi_\nu(k_\nu z) \cos \lambda_m z dz \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho_{s\nu}^{(3)} = \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{8 \lambda_m h K_1(\eta_m' r_0)}{\eta_m' r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) \{K_0(\eta_m' r_0) + K_2(\eta_m' r_0)\}} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^H \phi_s(k_s z) \cos \lambda_m z dz \right\} \\ \cdot \left\{ \frac{1}{h} \int_0^H \phi_\nu(k_\nu z) \cos \lambda_m z dz \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

$$\Gamma_\nu^{(1)} = \frac{8 \sinh \lambda_0 H \cdot H_1^{(2)}(\eta_0 r_0)}{\eta_0 r_0 (\sinh 2 \lambda_0 H + 2 \lambda_0 H) \{H_0^{(2)}(\eta_0 r_0) - H_2^{(2)}(\eta_0 r_0)\}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^H \phi_\nu(k_\nu z) \cosh \lambda_0 z dz \quad (35)$$

$$\Gamma_\nu^{(2)} = \sum_{m=1}^M \frac{8 \sin \lambda_m H \cdot H_1^{(2)}(\eta_m r_0)}{\eta_m r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) \{H_0^{(2)}(\eta_m r_0) - H_2^{(2)}(\eta_m r_0)\}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^H \phi_\nu(k_\nu z) \cos \lambda_m z dz \quad (36)$$

$$\Gamma_\nu^{(3)} = \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{8 \sin \lambda_m H \cdot K_1(\eta_m' r_0)}{\eta_m' r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) \{K_0(\eta_m' r_0) + K_2(\eta_m' r_0)\}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^H \phi_\nu(k_\nu z) \cos \lambda_m z dz \quad (37)$$

式(29)は未定係数 $D_s (\nu=1, 2, \dots)$ に関する連立方程式であるから、これより D_ν を定めれば、正弦波地動を受けた単円柱の水中における弾性変形は式(28)から求めることができる。弾性自由振動の場合には、式(29)の右辺を0とおいた同次方程式において、 D_ν の係数行列式=0とした式が振動数方程式となり、これより水中における単円柱の固有円振動数 $\omega = n_{w\nu}$ を求めることができる。 $n_{w\nu}$ が得られれば、この値を上述の同次方程式(式(29)の右辺を0と置いた式)に代入して、 D_ν に関する連立方程式を解いて $D_s (\nu=1, 2, \dots)$ の大きさの比を計算することができる。したがって、この D_s を用いれば式(28)より単円柱の水中弾性振動の振動型を求めることができる。実際の計算においては無限個の D_ν に関する連立方程式を取扱うことはできないから、必要な

精度に応じて適当な個数の ν までで切切って計算を行えばよい。なお、固有振動数を求める計算においては、 D_ν の係数は ω が定まって初めて確定するので、求める固有振動数に関する繰り返し計算が必要である。

以上の結果から、水中における単円柱がその基盤において正弦波地動を受けた場合に対する単円柱の単位長さ当りの動水圧及び水の付加質量係数(単円柱の加速度と同位相の項)は、剛振動成分については

$$p_1^r = K_h \pi r_0^2 w_0 F_{1s}^r \sin \omega t \quad (38)$$

弾性振動成分については

$$p_1^e = \pi r_0^2 w_0 (\omega^2/g) Y(x) F_{1s}^e \sin \omega t \quad (39)$$

となる。ここに、 F_{1s}^r は式(9)で表わされる。 F_{1s}^e は式(26)を参照して次式のように得られる。

$$\begin{aligned}
 F_{1s}^e = & -\frac{a_0}{Y(z)} \frac{4\lambda_0 h \cosh \lambda_0 z}{(\sinh 2\lambda_0 H + 2\lambda_0 H)(A_0^2 + B_0^2)} \cdot \frac{1}{h} \int_0^H Y(z) \cosh \lambda_0 z dz \\
 & - \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{Y(z)} \frac{4\lambda_m h \cos \lambda_m z}{(\sin 2\lambda_m H + 2\lambda_m H)(A_m^2 + B_m^2)} \cdot \frac{1}{h} \int_0^H Y(z) \cos \lambda_m z dz \\
 & + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{Y(z)} \frac{4\lambda_m h \cdot K_1(\eta_m' r_0) \cos \lambda_m z}{(\sin 2\lambda_m H + 2\lambda_m H) \{ \eta_m' r_0 K_0(\eta_m' r_0) + K_1(\eta_m' r_0) \}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^H Y(z) \cos \lambda_m z dz
 \end{aligned} \tag{40}$$

ここに、 a_m, A_m, B_m などは式(11)で定義した通りである。

数値計算にあたっては、長大橋梁の基礎として採用される程度の寸法を有する多柱基礎橋脚を対象とした。この程度の規模の多柱基礎橋脚に対しては、(i)水の圧縮性の影響に関しては、式(6)において $\lambda_m^2 > c_0^2$ としてよい。(ii)表面波の影響に関してはすでに桜井⁴⁾が詳細に論じている通り、また実際に表-1に示すような諸元をもつ多柱基礎橋脚に関して計算した結果によれば、表面波によるエネルギー逸散を等価な減衰定数 h_{eq} で評価するとすれば、 h_{eq} はたかだか0.00001のオーダーとなる。

以上の結果から本論においては固有円振動数及び水の付加質量係数の計算には以後すべて式(29)において $\Omega_{ss}^{(1)} = \Omega_{ss}^{(2)} = 0$ と置き、 $\Omega_{ss}^{(3)}$ の項のみを採用した。

数値計算は円柱長 $h=53$ m、水深 $H=50$ mの場合と $h=H=20$ mの場合とについて、表-1(a), (b)に示すような諸元に対して柱径を種々変えて、それぞれ単円柱の固有円振動数並びに水の付加質量係数を計算した。なおこのとき、上記のすべての場合について $\pi r_0^2 \omega_0 / wA = 0.5$ とした。また、計算に用いた単円柱の空気中における振動型 ϕ_s としては、下端固定、上端回転拘束の条件を満足する断面一様なはりの振動型を採用した(多柱基礎橋脚においてその下端が堅固な基礎に根入れされて

おり、頭部の回転変位が小さいと考えられる場合には各橋脚の変形はほぼこの条件を満たすであろう)。 ϕ_s を具体的に表示すれば

$$\begin{aligned}
 \phi_s(k_s z) = & \frac{1}{2(1 - \cos k_s h \cosh k_s h)} \\
 & \times \{ (\cos k_s h - \cosh k_s h) (\cos k_s z - \cosh k_s z) \\
 & + (\sin k_s h + \sinh k_s h) (\sin k_s z - \sinh k_s z) \} \\
 & \dots\dots\dots \tag{41}
 \end{aligned}$$

さらに本論では、以下のすべての数値計算において、固有円振動数の計算には振動型 ϕ_s として第2次までの振動型を、水の付加質量係数の計算には第1次の振動型のみをそれぞれ採用した。したがって、単円柱の水中における弾性振動の固有円振動数及び水の付加質量係数を求める式は以下に示すように簡単化される。

振動数方程式は

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(1 - \frac{n_{a1}^2}{\omega^2} \right) \psi_1 + \frac{\pi r_0^2 \omega_0}{wA} \Omega_{11}^{(3)} \right\} \\
 & \cdot \left\{ \left(1 - \frac{n_{a2}^2}{\omega^2} \right) \psi_2 + \frac{\pi r_0^2 \omega_0}{wA} \Omega_{22}^{(3)} \right\} \\
 & - \left(\frac{\pi r_0^2 \omega_0}{wA} \right)^2 \Omega_{12}^{(3)} \Omega_{21}^{(3)} = 0 \dots\dots\dots \tag{42}
 \end{aligned}$$

となり、上式を ω について解けば固有円振動数 n_{w1}, n_{w2} が得られる。ここに、

$$\begin{aligned}
 \psi_i = & \frac{1}{h} \int_0^h \phi_i^2(k_i z) dz + \frac{W}{wAh} \phi_i^2(k_i h), \\
 & (i=1, 2) \dots\dots\dots \tag{43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{ij}^{(3)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\lambda_m h K_1(\eta_m' r_0)}{(\sin 2\lambda_m H + 2\lambda_m H) \{ \eta_m' r_0 K_0(\eta_m' r_0) + K_1(\eta_m' r_0) \}} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^H \phi_i(k_i z) \cos \lambda_m z dz \right\} \\
 & \cdot \left\{ \frac{1}{h} \int_0^H \phi_j(k_j z) \cos \lambda_m z dz \right\}, \quad (i=1, 2, j=1, 2) \dots\dots\dots \tag{44}
 \end{aligned}$$

したがって、 $\Omega_{12}^{(3)} = \Omega_{21}^{(3)}$ である。水の付加質量係数は

$$F_{1s}^e = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\phi_1(k_1 z)} \frac{4\lambda_m h K_1(\eta_m' r_0) \cos \lambda_m z}{(\sin 2\lambda_m H + 2\lambda_m H) \{ \eta_m' r_0 K_0(\eta_m' r_0) + K_1(\eta_m' r_0) \}} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^H \phi_1(k_1 z) \cos \lambda_m z dz \right\} \dots\dots \tag{45}$$

表-1 単円柱の諸元と空気中及び水中における第1次固有円振動数

		(a) $h=53$ m, $H=50$ m, $\pi r_0^2 \omega_0 / wA = 0.5$ の場合						(b) $h=H=20$ m, $\pi r_0^2 \omega_0 / wA = 0.5$ の場合		
No.		1	2	3	4	5	6	1	2	3
d/h		0.1	0.189	0.2	0.3	0.4	0.5	0.1	0.2	0.3
r_0 (m)		2.65	5.0	5.3	7.95	10.6	13.25	1.0	2.0	3.0
$EI g / wA$ (m^4/s^2)		2.23×10^7	7.93×10^7	8.91×10^7	2.00×10^8	3.56×10^8	5.57×10^8	3.19×10^8	1.28×10^7	2.87×10^7
$\frac{W}{wAh} = 1.0$	n_{a1} (rad/s)	4.963412	9.364939	9.926824	14.89024	19.85365	24.81706	13.19154	26.38308	39.57470
	n_{w1} (rad/s)	4.743171	8.989909	9.534894	14.36828	19.22677	24.10085	12.48508	25.13315	37.89972
$\frac{W}{wAh} = 0.5$	n_{a1} (rad/s)	6.215686	—	12.43137	18.64706	24.86274	31.07843	16.51981	33.03962	49.55953
	n_{w1} (rad/s)	5.789940	—	11.67665	17.63784	23.64396	29.67564	15.17804	30.65685	46.34884

によって得られる。

第2次の振動型 $\phi_2(k_2 z)$ が水中における単円柱の第1次の振動型に及ぼす影響を調べるために、表-1 (a) のNo. 2の場合についてそれぞれ第1次まで及び第2次までの振動型を採用して、水中における単円柱の固有円振動数並びに振動型の係数の比 D_2/D_1 を計算した結果、(i) 第1次の振動型のみを採用した場合： $n_{w1}=8.991007$ rad/s, (ii) 第2次の振動型までを採用した場合： $n_{w1}=8.989909$ rad/s, $D_2/D_1=-0.000743$ となり、第2次の振動型の影響は少ないことがわかる。したがって、本論で対象としているような規模の多柱基礎橋脚については、単円柱の空气中における第1次の振動型 $\phi_1(k_1 z)$ のみを採用して、水の付加質量係数を求めてもそれと十分であるといえよう。このことは、たかだか第1次の固有振動数程度の振動においては、多柱基礎橋脚の水中における振動型に関しては空气中のそれとほとんど変わらないと考えてもよいことを意味している。

表-1 に示した各場合について行った数値計算結果を (i) 空气中及び水中における単円柱の固有円振動数については 表-1 に (ii) 水中における単円柱の弾性振動の固有周期の増大については 図-9 に (iii) 単円柱の空气中における第1次の振動型 $\phi_1(k_1 z)$ 、水の付加質量係数 F_{1s}^e 、動水圧振幅の深さ方向分布 $\phi_1(k_1 z) \cdot F_{1s}^e$ については計算結果の一例を 図-10 (a), (b), (c) (の実線) にそれぞれ示した。ここに図示しなかった他の場合についてもほとんど同様な傾向をもった結果が得られている。

(2) 単円柱に対する動水圧及び水の付加質量係数の近似式

基盤に正弦波地動を受けて水中で振動する単円柱の弾

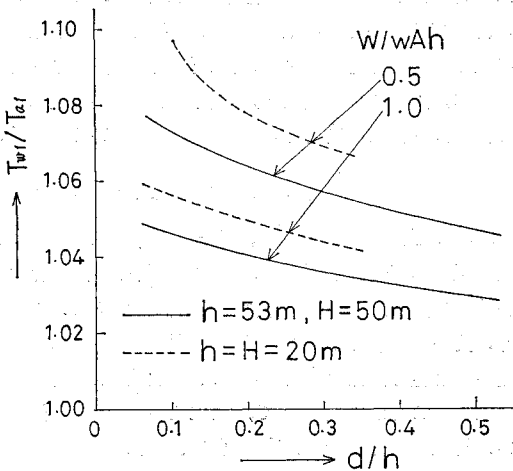


図-9 水中における単円柱の弾性振動の固有周期の増大

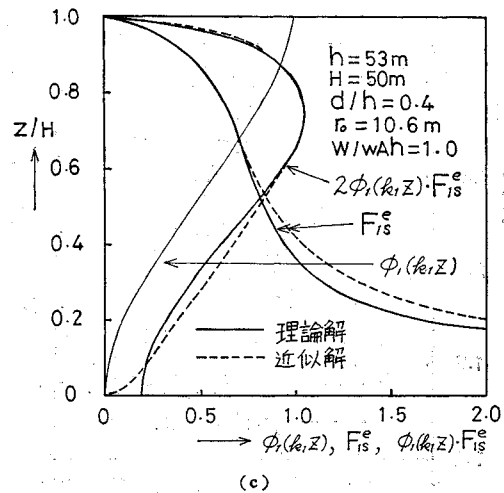
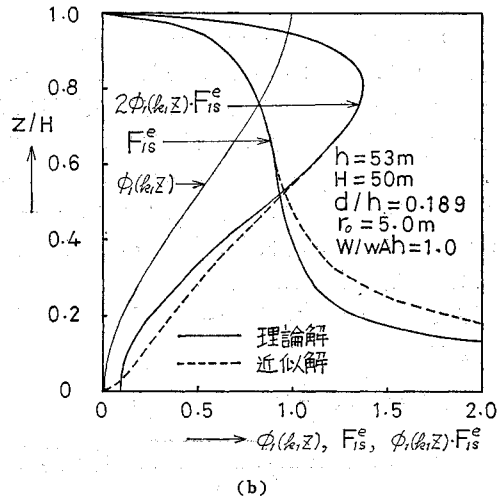
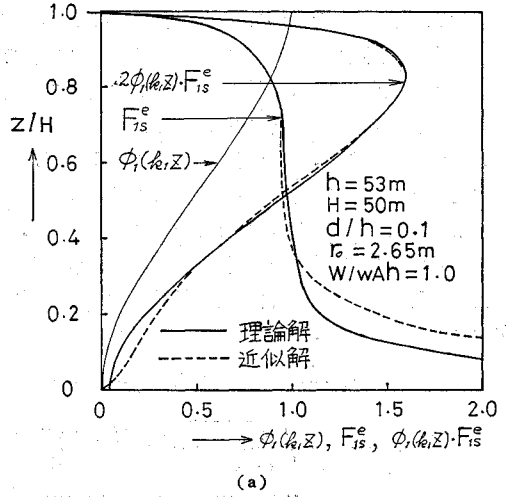


図-10 単円柱の振動型、水の付加質量係数、動水圧振幅

性振動成分に対する動水圧及び水の付加質量係数を、式(26)及び式(40)を用いて厳密に求めることは、前章の剛振動の場合よりもさらにその数値計算は煩雑である。しかし現在までに、単柱の弾性振動に対してはその動水圧及び水の付加質量係数を求める近似式は提案されていないようである。ただ著者らの一人によって、剛振動に対する近似式を弾性振動に対してもそのまま利用してはどうかという指摘がなされているにすぎない⁵⁾。

著者らは水中で弾性振動を行う単円柱に対する単位長さ当りの動水圧及び水の付加質量係数を求める近似式を次のように表わした。

$$\bar{p}_{1s}^e = \pi r_0^2 \omega_0 \frac{\omega^2}{g} Y(z) \bar{F}_{1s}^e \sin \omega t \dots\dots\dots(46)$$

$$\bar{F}_{1s}^e = \frac{Y(h)}{\bar{c}Y(z)} \sqrt{\frac{z}{H} \left(1 - \frac{z}{H}\right)} e^{-\bar{b} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1.2}} \dots\dots\dots(47)$$

水の付加質量は

$$\bar{w}_{1s}^e = \pi r_0^2 \omega_0 \bar{F}_{1s}^e \dots\dots\dots(48)$$

と表わされる。ここに、 $Y(z)$ は単円柱の水中における変形曲線であり、 $Y(h)$ は単円柱の頭部の変位が1になるように変形曲線を規準化するために掛けたものである。 \bar{b} 及び \bar{c} は $h, H, d/h, \pi r_0^2 \omega_0 / wA, W/wAh, EI/gwA$ が与えられれば決定される定数で、表-1に示すような諸元をもつ単円柱に対する \bar{b}, \bar{c} の値は図-11によって求めることができる。

前節で述べたように、 $Y(z) = D_1 \phi_1(k_1 z)$ とした場合には、式(46),(47)は

$$\bar{p}_{1s}^e = \pi r_0^2 \omega_0 \frac{\omega^2}{g} D_1 \phi_1(k_1 z) \cdot \bar{F}_{1s}^e \sin \omega t \dots\dots(49)$$

$$\bar{F}_{1s}^e = \frac{\phi_1(k_1 h)}{\bar{c} \phi_1(k_1 z)} \sqrt{\frac{z}{H} \left(1 - \frac{z}{H}\right)} e^{-\bar{b} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1.2}} \dots\dots\dots(50)$$

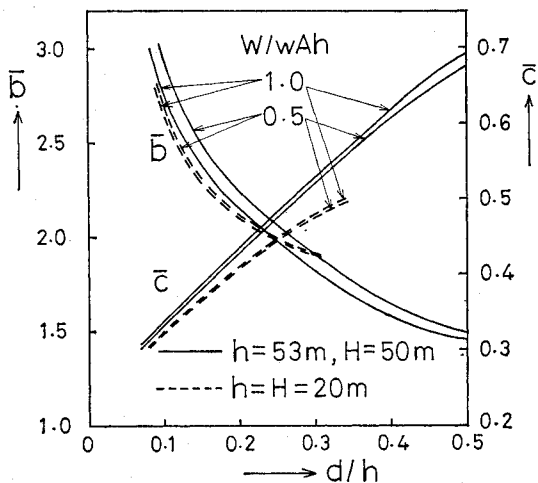


図-11 \bar{b} 及び \bar{c}

となる。

上に示した近似式は、単円柱がたかだか自己の第1次の固有振動数で弾性振動を行う範囲でしか有効ではないが、通常多柱基礎橋脚が地震動を受けた場合、橋脚の第2次振動の成分が大きな割合を占めることはあまりないと考えられるので、実用上橋脚の第1次の固有振動のみを考慮しておけば十分であろう。

式(50)を用いて計算した単円柱に対する水の付加質量係数の値及び動水圧振幅の深さ方向分布を、式(45)を用いて計算した厳密解と比較した結果の一例を図-10に示す(点線が近似解)。両者は z/H が小さいところを除けば比較的良好に一致しているといえる。 z/H が小さいところでは、付加質量係数は大きくなるが、逆にここでは単円柱の弾性振動成分の振幅が非常に小さいので、式(46)を参照すれば、それが動水圧に与える影響は非常に小さくなるのがわかる。

ここで、前章で述べた剛振動に対する動水圧の近似式(16)を、弾性振動に対してもそのまま利用した場合、本節の式(50)を用いた場合とについて、表-1(a)のNo.2を例にとり、水中における単円柱の弾性振動の固有円振動数及び全動水圧を計算すると次のようになる(近似式を用いた計算はいずれも積分の刻み幅を水深の1/20にとり台形法則を用いて数値積分を行った)。

固有円振動数の誤差	式(16) : 0.58%
	式(50) : 0.014%
全動水圧の誤差	式(16) : 28%
	式(50) : 4.7%

以上の結果から、剛振動に対する近似式をそのまま用いた場合には、固有振動数についてはあまり誤差は生じないが(それは z/H の大きいところと小さいところとで、誤差がちょうど互に打消し合っている)、全動水圧についてはかなりの誤差が生ずるといえる。しかし、水の付加質量及びそれが水中における単円柱の固有振動数に及ぼす影響を考える場合、高い近似を必要とするとき以外は、実用的には式(16)で表わされる剛振動に対する付加質量係数の式をそのまま用いてもよいであろう。

(3) 多柱基礎橋脚に対する動水圧及び水の付加質量

2Wの上載荷重をもち、頭部を連結された半径 r_0 (直径 d)、中心点間距離 l の2本の円柱が、基盤から柱並び方向の正弦波地動を受ける場合を考える。このとき、円柱に対する動水圧及び水の付加質量は2.(3)で述べたと全く同様な考え方にしたがえば、これを理論的に求めることができるので、ここではこれ以上述べない。結果のみを示せば、次の通りである。

円柱1本の単位長さ当りに働く動水圧 p_{12}^e 及び水の付加質量係数 F_{12s}^e は

$$p_{12}^e = \pi r_0^2 \omega_0 \frac{\omega^2}{g} Y(z) F_{12s}^e \sin \omega t \dots\dots\dots (51)$$

$$F_{12s}^e = \frac{1}{Y(z)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1+R_m} \cdot \frac{4 \lambda_m H \cdot K_1(\eta_m' r_0) \cos \lambda_m z}{(\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H) \{ \eta_m' r_0 K_0(\eta_m' r_0) + K_1(\eta_m' r_0) \}} \left\{ \frac{1}{H} \int_0^H Y(z) \cos \lambda_m z dz \right\} \\ - \frac{1}{Y(z)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_m}{1+R_m} \frac{8 \lambda_m H \cdot I_1(\eta_m' r_0) \cos \lambda_m z}{\eta_m' r_0 (\sin 2 \lambda_m H + 2 \lambda_m H)} \cdot \left\{ \frac{1}{H} \int_0^H Y(z) \cos \lambda_m z dz \right\} \dots\dots\dots (52)$$

ここに、 R_m は式 (19) で与えられる。

円柱の弾性変形として単円柱の空气中における第1次の振動型のみを採用する場合は、上式において $Y(z)$ の代りに $D_1 \phi_1(k_1 z)$ とおけばよい。以後はそのような場合を取扱う。

表-1 に示すような種々の諸元について、いくつかの l/d に対して式 (52) の F_{12s}^e を計算した。結果の一例を 図-12 に示す。

さらに、それぞれ単円柱と2本柱とに対する水の付加質量係数を計算し、その結果を $z/H=0.5$ における両者

の値が等しく ($F_{1s}^e|_{z/H=0.5} = \alpha_l F_{12s}^e|_{z/H=0.5}$) なるように l/d に応じた定数 α_l を掛けて F_{12s}^e を規準化して示せば 図-13 の通りである。なお、図-12, 13 はいずれも 表-1 (a) の No. 3 の場合についてである。他の場合についてもその結果はそれぞれ 図-12, 13 と全く同じ傾向を示す。柱並び直角方向振動の場合についても同様である。

図-13 から次のようなことがいえる。(i) 同一の $h, H, d/H, \pi r_0^2 \omega_0 / wA, W/wAh, EIg/wA$ の値については、いろいろの l/d に対する各 $\alpha_l F_{12s}^e$ 曲線間における差はきわめて小さい。(ii) 同一の諸元の場合については、単円柱の F_{1s}^e 曲線といろいろの l/d に対する2本柱の $\alpha_l F_{12s}^e$ 曲線とはその差がきわめて小さい。

(4) 多柱基礎橋脚に対する動水圧及び水の付加質量係数の近似式

多柱基礎橋脚が基盤から正弦波地動を受けて水中で振動するとき、その弾性振動成分についても前述の(2),(3)の結果を考慮すれば、前章で述べた剛振動の場合と全く同様な議論が成り立つ。すなわち、2次元解析によって求めた多柱基礎橋脚に対する水の付加質量係数 $F_{mns}^{(2)}$ を用いれば、多柱基礎橋脚に対する橋脚1本の単位長さ当りの動水圧及び水の付加質量係数の深さ方向分布は、次に示すような近似式によってこれを求めることができる。

$$\bar{p}_{mns}^e = \pi r_0^2 \omega_0 \frac{\omega^2}{g} Y(z) \bar{F}_{mns}^e \sin \omega t \dots\dots\dots (53)$$

$$\bar{F}_{mns}^e = \frac{F_{mns}^{(2)} Y(h)}{\bar{c} Y(z)} \sqrt{\frac{z}{H} \left(1 - \frac{z}{H}\right)} e^{-\bar{b} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1.1}} \dots\dots\dots (54)$$

さて、以上述べた議論に従って多柱基礎橋脚の水中弾性振動に対する水の付加質量係数を求めるには、前述の剛振動の場合と同様にすればよい。すなわち、まず(i) 水深、橋脚の直径、長さ、単位長さ当り重量及び曲げ剛性、橋脚1本当りの上載荷重が与えられれば、 $h, H, d/H, \pi r_0^2 \omega_0 / wA, W/wAh, EIg/wA$ が決定されるから、図-11 を用いて \bar{b}, \bar{c} を求める。(ii) 橋脚の本数と各橋脚の配置が与えられれば、図-6 から $F_{mns}^{(2)}$ を求めることができる。(iii) 次に橋脚の水中における変形曲線 $Y(z)$ を推定する。たとえば多柱基礎橋脚において、その頭部の回転変位が無視できるほど小さく、その下端が堅固な地盤にしっかり根入れされているような

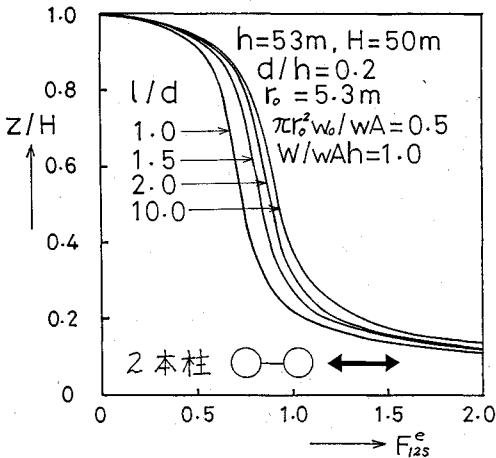


図-12 2本柱に対する水の付加質量係数の理論解

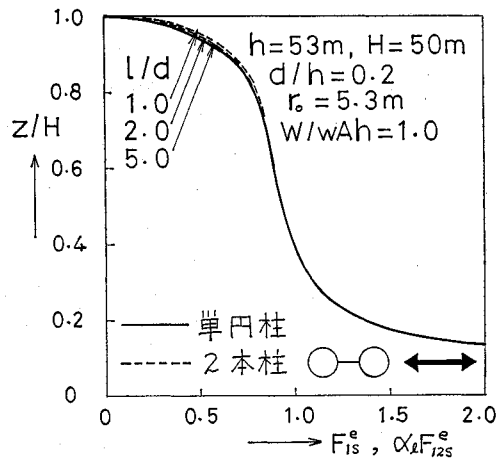
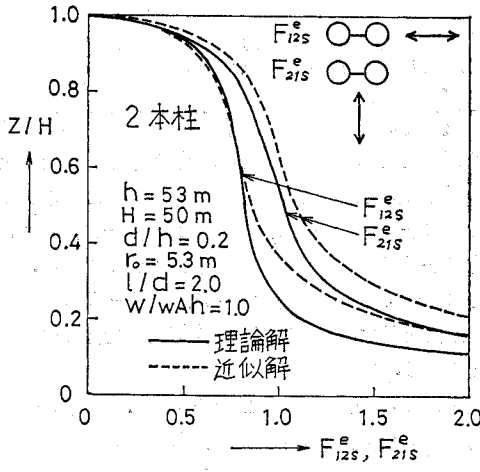
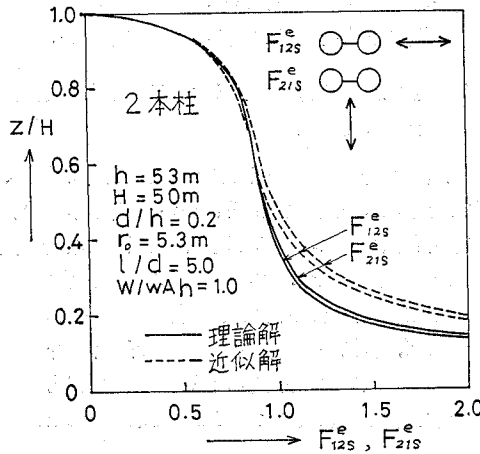


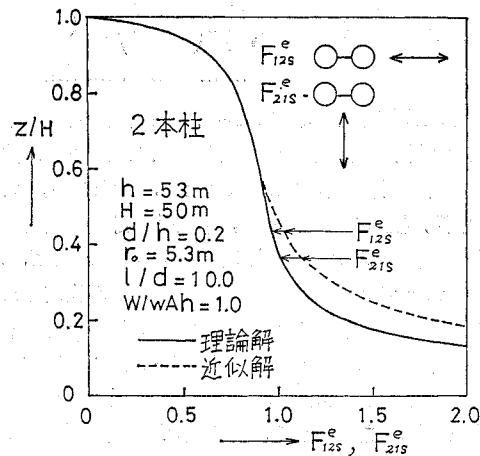
図-13 単円柱及び2本柱に対する水の付加質量係数の理論解



(a)



(b)



(c)

図一四 水中における2本柱の付加質量係数の近似解

場合には、本論におけるように $Y(z) = D_1 \phi_1(k_1 z)$ とすることが許されよう。(iv) いま求めた $\bar{b}, \bar{c}, F_{mns}^{(2)}$ 及び $Y(z)$ を用いれば、式(54)から任意の水深 z における橋脚1本の単位長さ当りの水の付加質量係数 \bar{F}_{mns}^e を得ることができる。

式(54)の有用性を示すために、一例として $2W$ の上載荷重をもち、頭部を連結された2本柱が柱並び方向及び柱並び直角方向に、基盤から正弦波地動を受けて水中で振動するとき、表一に示すような諸元をもつ場合について、それぞれ式(52)で表わされる厳密解と式(54)による近似解とを用いて、いろいろの l/d に対して F_{12s}^e, F_{21s}^e 及び $\bar{F}_{12s}^e, \bar{F}_{21s}^e$ を求めた。すべての場合について得られた結果はほぼ同様な傾向をもっていたので、その一例として表一(a)のNo.3の場合に対する計算結果を図一四(a),(b),(c)に示した。

図一四から理論解と近似解とはいろいろの l/d についてよく一致しているということがいえる。

$F_{mns}^{(2)}$ を求めることは容易であるから、水中における橋脚の変形曲線を適当に推定すれば、式(54)を用いて水中で弾性振動する多柱基礎橋脚に対する動水圧及び水の付加質量係数の深さ方向の分布を簡単な計算によって求めることができる。

4. 結 論

上述の解析より、次のような結果を得ることができた。

(1) 多柱基礎橋脚が水中で剛振動している場合に、その橋脚1本の単位長さ当りに働く動水圧及び水の付加質量係数は、図一三及び図一六を利用すればそれぞれ式(22)及び式(23)によって簡単に求めることができる。

(2) 多柱基礎橋脚がその基盤から正弦波地動を受けて水中で振動している場合に、橋脚1本の単位長さあたりに働く動水圧および水の付加質量係数は、(a)剛振動成分については(1)によってこれを求めることができ、(b)弾性振動成分については、図一六及び図一八を利用し、さらに水中橋脚の変形曲線を適当に推定すれば、それぞれ式(53)及び式(54)によってこれを簡単に求めることができる。

(3) 水中橋脚の変形曲線としては、たかだか橋脚の第1次の固有振動数の範囲内では近似的に橋脚の空気中における変形曲線を採用することが許されよう。

参 考 文 献

- 1) 小坪清真・高西照彦：多柱基礎への水の付加質量について、土木学会論文報告集，No. 248，昭.51.4.
- 2) 後藤尚男・土岐憲三：水中構造物の振動と耐震設計に関する基礎的研究，土木学会論文集，No. 100，昭.38.12.

- 3) 桜井彰雄：水中に立てられた柱状構造物の振動，土木技術，第16巻，第6号，昭.36.6.
- 4) 桜井彰雄：水中構造物の振動，電力中央研究所報告，No. 65051，昭.38.8.
- 5) 小坪清真：だ円形水中橋脚に働く地震力とその弾性振動，土木学会論文集，No. 120，昭.40.8.
- 6) 土岐憲三・手塚昌信：水中橋脚に働く動水圧の近似計算式について，土木学会第20回年次学術講演会，昭.40.5.
- 7) 小坪清真：アーチダムに働く地震時動水圧，土木学会論文集，No. 44，昭.32.4.

(1976.5.13・受付)
