

弾性媒体中にある円柱を伝わる曲げ波の  
伝播速度についてPROPAGATION OF FLEXURAL STRESS WAVES OF  
A CYLINDER EMBEDDED IN A ELASTIC MEDIUM松 岡 健 一\*・能 町 純 雄\*\*  
By Ken-ichi MATSUOKA and Sumio NOMACHI

## 1. ま え が き

弾性体を伝播する弾性波に関する研究は古くから数多く行われており Ewing<sup>1)</sup>の著書にも詳しく述べられている。特に棒を伝わる弾性波の問題では Pochhammer と Chree の研究が良く知られており、さらに Bancroft<sup>2)</sup>、Hudson<sup>3)</sup>ら多くの人によって研究されている。Bancroft は Pochhammer の理論を軸対称問題に適用して解析を行い、Hudson は曲げ波にも応用している。このほか円柱に関する研究については Abramson・Plass および Ripperger<sup>4)</sup>の論文にも述べられている。この問題に対する実験研究に関しても Kolsky, Ripperger および Abramson らの実験が文献 4)にも紹介されており理論解析とかなり良く合致している。また Mindlin と Mc-Niven<sup>5)</sup>が軸対称問題に対して、Pao と Mindlin は曲げ波に対して漸近展開式も用いて種々検討を加えている。

一方無限体中の円孔を伝わる弾性波の位相速度の分散は Biot<sup>7)</sup>によって研究されているが Biot は軸対称波に対して、円孔が空の場合と液体で満たされている場合に対する解析を行っている。

さらに著者らは Hankel 変換を用い円柱および円孔を有する無限弾性体の波動伝播式を導き、基礎杭のように弾性体中にある円柱を伝わる弾性波の位相速度の分散曲線を軸対称のものについて求め発表した<sup>8)</sup>。本論ではこれを曲げ波に適用し弾性体と円柱の弾性係数比、ポアソン比等を変化させて位相速度と群速度の分散曲線を求め検討した。またこの問題を 1 次元化し弾性支承上のはりとした場合の位相速度の分散曲線も求め、3 次元解析

の結果と比較検討した。

## 2. 基礎方程式およびその解法

円柱座標における運動つり合い式は、座標軸を  $r, \theta, z$  とし、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  をそれぞれ  $r, \theta, z$  方向の直応力度、 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$  をせん断応力度とすると物体力を無視し、慣性項を考慮して

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \dots (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots (3)$$

となる。ただし  $\rho$  は弾性体の密度、 $t$  は時間、 $u, v, w$  はそれぞれ  $r, \theta, z$  方向の変位である。

ここで波動の進行方向を  $z$  方向とし、各変位および応力成分を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}_m \cos m\theta e^{i\rho\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ v &= \bar{v}_m \sin m\theta e^{i\rho\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ w &= \bar{w}_m \cos m\theta e^{i\rho\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \sigma_r &= \bar{\sigma}_{rm} \cos m\theta e^{i\rho\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \sigma_\theta &= \bar{\sigma}_{\theta m} \cos m\theta e^{i\rho\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \sigma_z &= \bar{\sigma}_{zm} \cos m\theta e^{i\rho\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \tau_{r\theta} &= \bar{\tau}_{r\theta m} \sin m\theta e^{i\rho\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \tau_{\theta z} &= \bar{\tau}_{\theta z m} \sin m\theta e^{i\rho\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \tau_{zr} &= \bar{\tau}_{zr m} \cos m\theta e^{i\rho\left(t - \frac{z}{V}\right)} \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

ただし、 $m=0, 1, \dots$  で波動の円周方向の性質を示し、 $m=0$  であれば軸対称、 $m=1$  であれば曲げ波となる。

\* 正会員 工修 室蘭工業大学助教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

また  $p$  は角速度,  $V$  は  $z$  方向の波動の伝播速度であり, 変位と応力の関係は弾性波動を対象とし Hooke の法則が成り立つものとする.

式 (1)~(3) を式 (a) を考慮して解析するが, まず式 (1), (2) を辺々加え, 式 (a) を代入し

$$\tilde{u}_m = \tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}, \quad \tilde{v}_m = \tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr} \dots\dots\dots (b)$$

とおき  $R_1(\xi r)$  を核として積分変換を行う. 次に式 (1), (2) を辺々減じ式 (a), (b) を代入し  $R_2(\xi r)$  を核として同様積分変換を行う. さらに式 (3) に式 (a), (b) を代入し  $R_3(\xi r)$  を核として積分変換を行う. 以上の積分変換ではいずれの場合も Hooke の法則を考慮して応力を変位で表わし積分変換を完成させれば,  $\tilde{A}_{mr}, \tilde{B}_{mr}, \tilde{w}_m$  をそれぞれ  $R_1(\xi r), R_2(\xi r), R_3(\xi r)$  で積分変換してえられる像関数の 3 元連立方程式がえられる. ここでは弾性体中の円柱の波動伝播の解析を目的としているので, 円孔を有する無限弾性体および円柱の解を必要とするがそれぞれの場合で核関数および積分範囲が異なる. すなわち

a) 円孔を有する無限弾性体の場合

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^\infty \tilde{A}_{mr} r H_{m+1}(\xi r) dr \\ \int_a^\infty \tilde{B}_{mr} r H_{m-1}(\xi r) dr \\ \int_a^\infty \tilde{w}_{mr} H_m(\xi r) dr \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} H_{m+1}[A_{mr}] \\ H_{m-1}[\tilde{B}_{mr}] \\ H_m[\tilde{w}_m] \end{array} \right\} = -a H_{m+1}(\xi a) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{1}{N_\mu^2 + \xi^2} \\ \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{1}{N_\mu^2 + \xi^2} \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{N^2}{2\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu^2 + \xi^2} - \frac{N_\alpha^2}{N^2} \cdot \frac{1}{N_\alpha^2 + \xi^2} \right\} \\ - \frac{N^2}{2\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu^2 + \xi^2} - \frac{N_\alpha^2}{N^2} \cdot \frac{1}{N_\alpha^2 + \xi^2} \right\} \\ i \frac{N}{\rho p^2} \left\{ \frac{\xi}{N_\alpha^2 + \xi^2} - \frac{\xi}{N_\mu^2 + \xi^2} \right\} \\ - \frac{m-1}{a} \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{N_\mu^2}{N^2} \cdot \frac{1}{N_\mu^2 + \xi^2} - \frac{N_\alpha^2}{N^2} \cdot \frac{1}{N_\alpha^2 + \xi^2} \right\} \\ \frac{m+1}{a} \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \left( 2 - \frac{N_\mu^2}{N^2} \right) \frac{1}{N_\mu^2 + \xi^2} - \frac{N_\alpha^2}{N^2} \cdot \frac{1}{N_\alpha^2 + \xi^2} \right\} \\ - i \frac{m-1}{a} \frac{2\mu N}{\rho p^2} \left\{ \frac{\xi}{N_\alpha^2 + \xi^2} - \frac{\xi}{N_\mu^2 + \xi^2} \right\} \\ i \frac{\mu N^3}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{N_\alpha^2}{N^2} \right) \frac{1}{N_\mu^2 + \xi^2} - \frac{N_\alpha^2}{N^2} \cdot \frac{1}{N_\alpha^2 + \xi^2} \right\} \\ - i \frac{\mu N^3}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{N_\mu^2}{N^2} \right) \frac{1}{N_\mu^2 + \xi^2} - \frac{N_\alpha^2}{N^2} \cdot \frac{1}{N_\alpha^2 + \xi^2} \right\} \\ \frac{2\mu N^3}{\rho p^2} \left\{ \frac{\xi}{N_\alpha^2 + \xi^2} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{N_\mu^2}{N^2} \right) \frac{\xi}{N_\mu^2 + \xi^2} \right\} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \left( \tilde{r}\theta m \right) \\ \tilde{\sigma}_{rm} \\ \tilde{A}_{mr} \\ \tilde{B}_{mr} \\ \tilde{w}_m \end{array} \right|_{r=a} \dots\dots\dots (4)$$

となる. 円柱の場合の式は式 (4) で  $H(\xi r)$  関数を  $J(\xi_i r)$  関数に,  $\xi$  を  $\xi_i$  に置換え右辺の符号を正とすればえられる. また逆変換に必要な初期項は a) の場合  $R_1(\xi r) = r^{-m}$ , b) の場合  $R_2(\xi_i r) = r^m$  として別に求めなければならないが, その結果は式 (4) を使い, a) の場合  $H_{m+1}[\tilde{A}_{mr}]$  の式で  $aH_{m+1}(\xi a)$  を  $a^{-m}$ , b) の場

$$\left. \begin{array}{l} R_1(\xi r) = H_{m+1}(\xi r) = J_{m+1}(\xi_i r) Y_m(\xi a) \\ \quad - J_m(\xi a) Y_{m+1}(\xi r) \\ R_2(\xi r) = H_{m-1}(\xi r) = J_{m-1}(\xi_i r) Y_m(\xi a) \\ \quad - J_m(\xi a) Y_{m-1}(\xi r) \\ R_3(\xi r) = H_m(\xi r) = J_m(\xi r) Y_m(\xi a) \\ \quad - J_m(\xi a) Y_m(\xi r) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (c)$$

であり,  $r$  の積分範囲は  $a < r < \infty$  である.

b) 円柱の場合

$$\left. \begin{array}{l} R_1(\xi r) = J_{m+1}(\xi_i r), \quad R_2(\xi r) = J_{m-1}(\xi_i r), \\ R_3(\xi r) = J_m(\xi_i r) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (d)$$

である. ただし  $\xi_i$  は  $J_m(\xi_i a) = 0$  の根を小さい順に並べたものであり, 積分範囲は  $0 < r < a$  である.

ここで,  $J_m, Y_m$  は第 1 種および第 2 種の Bessel 関数である. また  $a$  は円孔または円柱の半径である.

a), b) の場合について各関数を用いてえられる像関数の 3 元連立方程式を解くことにより各変位の像関数を求めることができる. a) の場合についてのみこの結果を示せば,  $\mu, \lambda$  を Lamé の定数として

合  $H_{m-1}[\tilde{B}_{mr}]$  の式で  $-aH_{m+1}(\xi a)$  を  $a^m$  とし  $\xi=0$  とおけば良い.

各変位の一般式は上のようにえられた像関数をそれぞれ逆変換することで求められる. Hankel 変換の逆変換および逆変換公式 (付録 参照) を用いれば各変位成分は

$$u = (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m\theta \cdot e^{i\rho(t - \frac{z}{V})} \dots\dots\dots (5)$$

$$v = (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m\theta \cdot e^{i\rho(t - \frac{z}{V})} \dots\dots\dots (6)$$

$$w = \tilde{w}_m \cos m\theta \cdot e^{i\rho(t - \frac{z}{V})} \dots\dots\dots (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} = & \frac{1}{N_\mu} \chi_{m\rho}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_m + (m+1) A_m \right. \\ & \left. + (m-1) B_m - i \frac{N}{2} E_m \right\} + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{m\rho}(N_\mu r) - \frac{N_\alpha}{N^2} \chi_{m\rho}(N_\alpha r) \right\} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m + (m+1) A_m - (m-1) B_m - i N E_m \right\} \\ & \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m = & -\frac{1}{N_\mu} \chi_{ms}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_m + (m+1) A_m \right. \\ & \left. + (m-1) B_m + i \frac{N}{2} E_m \right\} + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{ms}(N_\mu r) - \frac{N_\alpha}{N^2} \chi_{ms}(N_\alpha r) \right\} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m + (m+1) A_m - (m-1) B_m - i N E_m \right\} \\ & \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_m = & G_m(N_\mu r) E_m + i \frac{2\mu N}{\rho p^2} \{G_m(N_\alpha r) - G_m(N_\mu r)\} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m + (m+1) A_m - (m-1) B_m - i N E_m \right\} \\ & \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

また  $N = p/V = \pi/l$ ,  $l$  = 半波長,

$$N_\mu^2 = N^2 - \rho p^2/\mu, \quad N_\alpha^2 = N^2 - \rho p^2/(2\mu + \lambda)$$

式 (8)~(10) 中の関数は円柱と弾性媒体で別な形をとり

a) 円孔を有する無限弾性体の場合

$$\left. \begin{aligned} G_m(Nr) &= \frac{K_m(Nr)}{K_m(Na)} \\ \chi_{m\rho}(Nr) &= -\frac{K_{m+1}(Nr)}{K_m(Na)} \\ \chi_{ms}(Nr) &= -\frac{K_{m-1}(Nr)}{K_m(Na)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (e)$$

b) 円柱の場合

$$\left. \begin{aligned} G_m(Nr) &= \frac{I_m(Nr)}{I_m(Na)} \\ \chi_{m\rho}(Nr) &= \frac{I_{m+1}(Nr)}{I_m(Na)} \\ \chi_{ms}(Nr) &= \frac{I_{m-1}(Nr)}{I_m(Na)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (f)$$

である (付録参照). ここで  $I_m, K_m$  は変形第 1 種および第 2 種の Bessel 関数である. また式 (8)~(10) 中の係数は積分定数で  $r=a$  における変位および応力で与えられ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m &= \bar{\epsilon}_{r\theta m}|_{r=a}, \quad \beta_m = \bar{\sigma}_{rm}|_{r=a}, \\ A_m &= (\bar{u}_m + \bar{v}_m)|_{r=a/2a}, \\ B_m &= (\bar{u}_m - \bar{v}_m)|_{r=a/2a}, \quad E_m = \bar{w}_m|_{r=a} \end{aligned} \right\} \dots\dots (g)$$

である. 各応力成分は式 (5)~(10) から

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \left\{ 2\mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \tilde{A}_{mr} + \frac{\partial}{\partial r} \tilde{B}_{mr} \right) + \lambda \Delta \right\} \\ & \cdot \cos m\theta e^{i\rho(t - \frac{z}{V})} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \left\{ 2\mu \left( \frac{m+1}{r} \tilde{A}_{mr} - \frac{m-1}{r} \tilde{B}_{mr} \right) + \lambda \Delta \right\} \\ & \cdot \cos m\theta e^{i\rho(t - \frac{z}{V})} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\sigma_z = \{-2\mu i N \tilde{w}_m + \lambda \Delta\} \cos m\theta e^{i\rho(t - \frac{z}{V})} \dots (13)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = & \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \tilde{A}_{mr} - \frac{\partial}{\partial r} \tilde{B}_{mr} - \frac{m+1}{r} \tilde{A}_{mr} \right. \\ & \left. - \frac{m-1}{r} \tilde{B}_{mr} \right\} \sin m\theta e^{i\rho(t - \frac{z}{V})} \dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} = & \mu \left\{ -\frac{m}{r} \tilde{w} - iN(\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \right\} \\ & \cdot \sin m\theta e^{i\rho(t - \frac{z}{V})} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zr} = & \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \tilde{w}_m - iN(\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \right\} \\ & \cdot \cos m\theta e^{i\rho(t - \frac{z}{V})} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

と表わされる. ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} A_{mr} = & \left\{ G_m(N_\mu r) - \frac{m+1}{N_\mu r} \chi_{m\rho}(N_\mu r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_m + (m+1) A_m + (m-1) B_m - i \frac{N}{2} E_m \right\} \\ & + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ G_m(N_\mu r) - \frac{N_\alpha^2}{N^2} G_m(N_\alpha r) - \frac{m+1}{N_\mu r} \chi_{m\rho}(N_\mu r) + \frac{N_\alpha}{N^2} \cdot \frac{m+1}{r} \chi_{m\rho}(N_\alpha r) \right\} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m + (m+1) A_m - (m-1) B_m - i N E_m \right\} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} B_{mr} = & -\left\{ G_m(N_\mu r) + \frac{m-1}{N_\mu r} \chi_{ms}(N_\mu r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_m + (m+1) A_m + (m-1) B_m + i \frac{N}{2} E_m \right\} \\ & + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ G_m(N_\mu r) - \frac{N_\alpha^2}{N^2} G_m(N_\alpha r) + \frac{m-1}{N_\mu r} \chi_{ms}(N_\mu r) - \frac{N_\alpha}{N^2} \cdot \frac{m-1}{r} \chi_{ms}(N_\alpha r) \right\} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m + (m+1) A_m - (m-1) B_m - i N E_m \right\} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} G_m(N_\alpha r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m + (m+1) A_m - (m-1) B_m - i N E_m \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \bar{w}_m = \left\{ N_{\mu} \chi_{km\rho}(N_{\mu}r) + \frac{m}{r} G_m(N_{\mu}r) \right\} E_m + i \frac{2\mu N}{\rho k p^2} \left\{ N_{\alpha} \chi_{km\rho}(N_{\alpha}r) + \frac{m}{r} G_m(N_{\alpha}r) - N_{\mu} \chi_{km\rho}(N_{\mu}r) - \frac{m}{r} G_m(N_{\mu}r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m + (m+1)A_m - (m-1)B_m - iNE_m \right\} \dots (20)$$

である。以上により変位および応力を求めることができる。

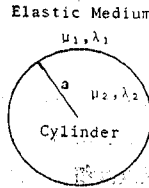


図-1 弾性体柱の円柱

3. 固有値方程式

いま弾性媒体を表わすすべての量を添字 1, 円柱を表わすすべての量を添

字 2 で示すと、弾性媒体中の円柱を伝わる弾性波の速度は 2. で求めた円孔を有する無限弾性体および円柱の一般式を用いて、これらを組合せて弾性媒体と円柱の境界の境界条件を満足するように導かれた境界条件式からなる固有値方程式の固有値問題として与えられる。このとき満足しなければならない条件はまず式 (g) の第 3, 第 4 項から、弾性媒体 ( $k=1$ ) および円柱 ( $k=2$ ) に対して

$$aA_{km} = \frac{1}{N_{\mu k}} \chi_{km\rho}(N_{\mu k}a) \left\{ \frac{1}{2\mu_k} \alpha_{km} + (m+1)A_{km} + (m-1)B_{km} - i \frac{N}{2} E_{km} \right\} + \frac{\mu_k N^2}{\rho k p^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu k}} \chi_{km\rho}(N_{\mu k}a) - \frac{N_{\alpha k}}{N^2} \chi_{km\rho}(N_{\alpha k}a) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu_k} \beta_{km} + (m+1)A_{km} - (m-1)B_{km} - iNE_{km} \right\} \dots (21)$$

$$aB_{km} = -\frac{1}{N_{\mu k}} \chi_{kms}(N_{\mu k}a) \left\{ \frac{1}{2\mu_k} \alpha_{km} + (m+1)A_{km} + (m-1)B_{km} + i \frac{N}{2} E_{km} \right\} + \frac{\mu_k N^2}{\rho k p^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu k}} \chi_{kms}(N_{\mu k}a) - \frac{N_{\alpha k}}{N^2} \chi_{kms}(N_{\alpha k}a) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu_k} \beta_{km} + (m+1)A_{km} - (m-1)B_{km} - iNE_{km} \right\} \dots (22)$$

を満足しなければならない。式 (21), (22) の関数は  $k=1$  のとき式 (e) で与えられ、 $k=2$  のとき式 (f) で与えられる。上の 4 式は接触面の状態に関係なく成立しなければならないが、他の条件は接触面の変位が連続な場合とせん断応力が存在しない場合で異なる。

a) 接触面の変位が連続な場合

この場合は弾性媒体と円柱との接触面で変位および応力  $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}$  が等しいものとする。したがって境界条件は

- i)  $u_1|_{r=a} = u_2|_{r=a}, v_1|_{r=a} = v_2|_{r=a}, w_1|_{r=a} = w_2|_{r=a},$  ..... (23)
- $\therefore A_{1m} = A_{2m} = A_m, B_{1m} = B_{2m} = B_m,$  ..... (23)'
- $E_{1m} = E_{2m} = E_m,$  ..... (23)''
- ii)  $\sigma_{r1}|_{r=a} = \sigma_{r2}|_{r=a}, \tau_{r\theta 1}|_{r=a} = \tau_{r\theta 2}|_{r=a},$  ..... (24)
- $\therefore \alpha_{1m} = \alpha_{2m} = \alpha_m, \beta_{1m} = \beta_{2m} = \beta_m,$  ..... (24)'
- iii)  $\tau_{rz1}|_{r=a} = \tau_{rz2}|_{r=a}$  ..... (25)

式 (25) は式 (16) から

$$\sum_{k=1}^2 \tau_{rz k}|_{r=a} (-1)^k = \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left[ i \frac{mN}{a} \cdot \frac{1}{N_{\mu k}} \alpha_m + i \frac{\mu_k N^2}{\rho k p^2} \left\{ 2 \frac{N_{\alpha k}}{N} \left( \chi_{km\rho}(N_{\alpha k}a) + \frac{m}{N_{\alpha k}a} \right) - \left( \frac{N}{N_{\mu k}} + \frac{N_{\mu k}}{N} \right) \left( \chi_{km\rho}(N_{\mu k}a) + \frac{m}{N_{\mu k}a} \right) \right\} \beta_m + 2\mu_k(m+1)A_m - 2\mu_k(m-1)B_m - 2\mu_k iNE_m \right] + i \frac{mN}{a} \cdot \frac{2\mu_k}{N_{\mu k}^2} \{ (m+1)A_m + (m-1)B_m \} + \mu_k \left( \frac{N^2}{N_{\mu k}} + N_{\mu k} \right) \cdot \left( \chi_{m\rho}(N_{\mu k}a) + \frac{m}{N_{\mu k}a} \right) E_m = 0 \dots (25)'$$

以上式 (21)~(25)' の境界条件式をマトリックスで表示すれば

$$a_5 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \\ A_m \\ B_m \\ E_m \end{bmatrix} = 0 \dots (26)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{kp} &= \frac{\mu_k N^2}{\rho k p^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu k}} \chi_{km\rho}(N_{\mu k}a) - \frac{N_{\alpha k}}{N^2} \chi_{km\rho}(N_{\alpha k}a) \right\} \\ \Omega_{sk} &= \frac{\mu_k N^2}{\rho k p^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu k}} \chi_{kms}(N_{\mu k}a) - \frac{N_{\alpha k}}{N^2} \chi_{kms}(N_{\alpha k}a) \right\} \\ \zeta_k &= \frac{\mu_k N^2}{\rho k p^2} \left\{ 2 \frac{N_{\alpha k}}{N} \left( \chi_{km\rho}(N_{\alpha k}a) + \frac{m}{N_{\alpha k}a} \right) - \left( \frac{N}{N_{\mu k}} + \frac{N_{\mu k}}{N} \right) \left( \chi_{km\rho}(N_{\mu k}a) + \frac{m}{N_{\mu k}a} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (h)$$

$$X_{pk} = \frac{1}{N_{\mu_k}} \chi_{kmp}(N_{\mu_k}a), \quad X_{sk} = \frac{1}{N_{\mu_k}} \chi_{kms}(N_{\mu_k}a)$$

とすれば、マトリックスの各要素は

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2\mu_1} X_{p12}, \quad a_{12} = \frac{1}{2\mu_1} \varrho_{p1}, \\ a_{13} &= (m+1)(\varrho_{p1} + X_{p1}) - a, \\ a_{14} &= -(m-1)(\varrho_{p1} - X_{p1}), \\ a_{15} &= -iN(\varrho_{p1} - X_{p1}/2), \quad a_{21} = -\frac{1}{2\mu_1} X_{s1}, \\ a_{22} &= \frac{1}{2\mu_1} \varrho_{s1}, \quad a_{23} = (m+1)(\varrho_{s1} - X_{s1}), \\ a_{24} &= -(m-1)(\varrho_{s1} + X_{s1}) - a, \\ a_{25} &= -iN(\varrho_{s1} - X_{s1}/2), \quad a_{31} = \frac{1}{2\mu_2} X_{p2}, \\ a_{32} &= \frac{1}{2\mu_2} \varrho_{p2}, \quad a_{33} = (m+1)(\varrho_{p2} + X_{p2}) - a, \\ a_{34} &= -(m-1)(\varrho_{p2} - X_{p2}), \\ a_{35} &= -iN(\varrho_{p2} - X_{p2}/2), \quad a_{41} = -\frac{1}{2\mu_2} X_{s2}, \\ a_{42} &= \frac{1}{2\mu_2} \varrho_{s2}, \quad a_{43} = (m+1)(\varrho_{s2} - X_{s2}), \\ a_{44} &= -(m-1)(\varrho_{s2} + X_{s2}) - a, \\ a_{45} &= -iN(\varrho_{s2} - X_{s2}/2), \\ a_{51} &= \frac{mN}{a} \left( \frac{1}{N_{\mu_1^2}} - \frac{1}{N_{\mu_2^2}} \right), \quad a_{52} = \zeta_1 - \zeta_2, \\ a_{53} &= (m+1) \left\{ 2\mu_1\zeta_1 - 2\mu_2\zeta_2 + \frac{mN}{a} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \frac{2\mu_1}{N_{\mu_1^2}} - \frac{2\mu_2}{N_{\mu_2^2}} \right) \right\}, \\ a_{54} &= -(m-1) \left\{ 2\mu_1\zeta_1 - 2\mu_2\zeta_2 - \frac{mN}{a} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \frac{2\mu_1}{N_{\mu_1^2}} - \frac{2\mu_2}{N_{\mu_2^2}} \right) \right\}, \\ a_{55} &= -iN \left\{ 2\mu_1\zeta_1 - 2\mu_2\zeta_2 + \frac{\mu_1}{N} (N^2 + N_{\mu_1^2}) \right. \\ &\quad \cdot \left( X_{p1} + \frac{m}{N_{\mu_1^2}a} \right) - \frac{\mu_2}{N} (N^2 + N_{\mu_2^2}) \\ &\quad \left. \cdot \left( X_{p2} + \frac{m}{N_{\mu_2^2}a} \right) \right\} \end{aligned}$$

したがってこの場合の固有値方程式は

$$\det \mathbf{a}_5 = 0 \quad \dots \dots \dots (27)$$

となり、 $N$  を与えてこれを満足する固有値  $p$  を求めることにより弾性波の速度  $V = p/N$  が求められる。

**b) 接触面にせん断応力が存在しない場合**

この場合接触面にせん断応力は存在しないが、半径方向の直応力  $\sigma_r$  は存在し、これと半径方向の変位  $u$  は接触面で連続であるものとする。したがってこのときの境界条件は

$$i) \quad u_1|_{r=a} = u_2|_{r=a} \quad \dots \dots \dots (28)$$

$$\therefore A_{1m} + B_{1m} = A_{2m} + B_{2m} \quad \dots \dots \dots (28)'$$

$$ii) \quad \sigma_{r1}|_{r=a} = \sigma_{r2}|_{r=a} \quad \dots \dots \dots (29)$$

$$\therefore \beta_{1m} = \beta_{2m} = \beta_m \quad \dots \dots \dots (29)'$$

$$iii) \quad \tau_{r\theta 1}|_{r=a} = \tau_{r\theta 2}|_{r=a} = 0 \quad \dots \dots \dots (30)$$

$$\therefore \alpha_{1m} = \alpha_{2m} = 0 \quad \dots \dots \dots (30)'$$

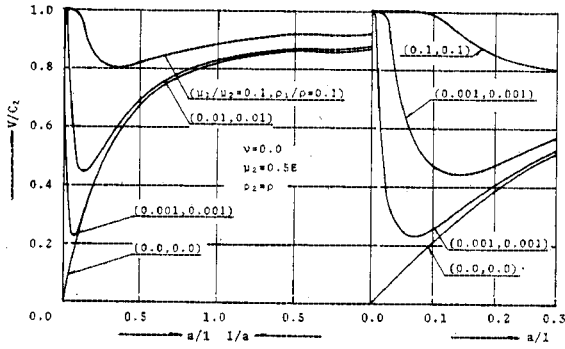
$$iv) \quad \tau_{r21}|_{r=a} = 0 \quad \dots \dots (31), \quad \tau_{r22}|_{r=a} = 0 \quad \dots \dots (32)$$

となる、式 (31), (32) は式 (25)' で  $k=1, 2$  をそれぞれ単独の場合に相当する。このときの未知定数は  $A_{1m}, B_{1m}, E_{1m}, A_{2m}, B_{2m}, E_{2m}, \beta_m$  である。境界条件式 (21), (22) の4式と (28)', (31), (32) をマトリックスで表示すると

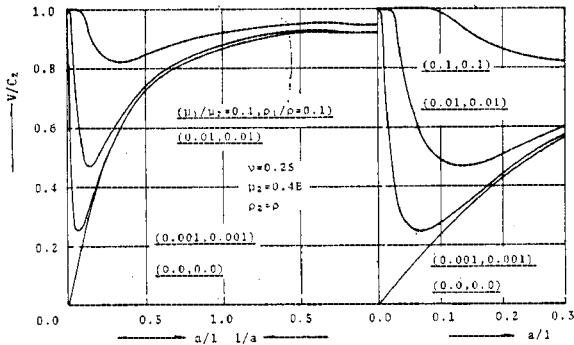
$$\mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1m} \\ B_{1m} \\ E_{1m} \\ \beta_m \\ A_{2m} \\ B_{2m} \\ E_{2m} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (33)$$

となるがマトリックスの各要素は式 (h) を用いて

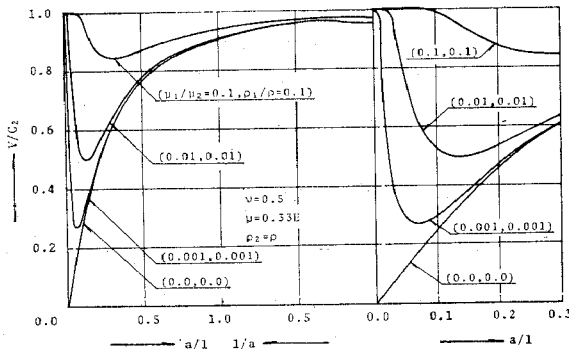
$$\begin{aligned} a_{11} &= (m+1)(\varrho_{p1} + X_{p1}) - a, \\ a_{12} &= -(m-1)(\varrho_{p1} - X_{p1}), \\ a_{13} &= -iN(\varrho_{p1} - X_{p1}/2), \quad a_{14} = \varrho_{p1}/2 \mu_1, \\ a_{21} &= (m+1)(\varrho_{s1} - X_{s1}), \\ a_{22} &= -(m-1)(\varrho_{s1} + X_{s1}) - a, \\ a_{23} &= -iN(\varrho_{s1} - X_{s1}/2), \quad a_{24} = \varrho_{s1}/2 \mu_1, \\ a_{31} &= 2\mu_1(m+1) \left( \zeta_1 + \frac{mN}{N_{\mu_1^2}a} \right), \\ a_{32} &= -2\mu_1(m-1) \left( \zeta_1 - \frac{mN}{N_{\mu_1^2}a} \right), \\ a_{33} &= 2\mu_1 \left\{ \zeta_1 + \frac{N}{2} (N^2 + N_{\mu_1^2}) \left( X_{p1} + \frac{m}{N_{\mu_1^2}a} \right) \right\}, \\ a_{34} &= \zeta_1, \quad a_{41} = a_{42} = -a_{45} = -a_{46} = 1, 0, \\ a_{54} &= \varrho_{p2}/2 \mu_2, \quad a_{55} = (m+1)(\varrho_{p2} + X_{p2}) - a, \\ a_{56} &= -(m-1)(\varrho_{p2} - X_{p2}), \\ a_{57} &= -iN(\varrho_{p2} - X_{p2}/2), \quad a_{64} = \varrho_{s2}/2 \mu_2, \\ a_{65} &= (m+1)(\varrho_{s2} - X_{s2}), \\ a_{66} &= -(m-1)(\varrho_{s2} + X_{s2}) - a, \\ a_{67} &= -iN(\varrho_{s2} - X_{s2}/2), \quad a_{74} = \zeta_2, \\ a_{75} &= 2\mu_2(m+1) \left( \zeta_2 + \frac{mN}{N_{\mu_2^2}a} \right), \\ a_{76} &= -2\mu_2(m-1) \left( \zeta_2 - \frac{mN}{N_{\mu_2^2}a} \right), \\ a_{77} &= 2\mu_2 \left\{ \zeta_2 + \frac{N}{2} (N^2 + N_{\mu_2^2}) \left( X_{p2} + \frac{m}{N_{\mu_2^2}a} \right) \right\} \\ a_{15} &= a_{16} = a_{17} = a_{25} = a_{26} = a_{27} = a_{35} = a_{36} = a_{37} \\ &= a_{43} = a_{44} = a_{47} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{61} = a_{62} \\ &= a_{63} = a_{71} = a_{72} = a_{73} = 0 \end{aligned}$$



(a)



(b)



(c)

図-2 境界面で変位が連続な場合 (Case-I) の位相速度分散曲線

この場合の固有値方程式は

$$\det \alpha_7 = 0 \dots\dots\dots (34)$$

となる。

4. 数値計算

3. で求めた固有値方程式を解き固有値  $p$  を求め位相速度の分散曲線を得ることができるが、ここでは曲げ波動を対象としてポアソン比、弾性係数を種々に変化させて数値計算を行った結果を示す。この場合波動の円周方

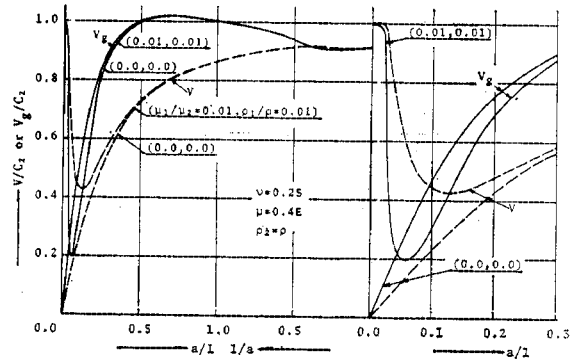


図-3 群速度分散曲線 (Case-I)

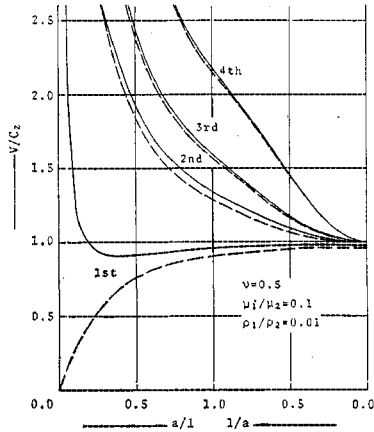
向の性質を示す係数  $m=1$  とする。計算に用いた数値は弾性媒体および円柱のポアソン比  $\nu_1=\nu_2=0, 0.25, 0.5$  に対して  $\mu_1/\mu_2=0, 0.001, 0.01, 0.1$  とし  $\rho_1\mu_2/\rho_2\mu_1=0.1$  または  $1.0$  である。また  $c_2=\sqrt{\mu_2/\rho_2}$  (円柱のせん断波の速度)。

a) 境界面で変位が連続な場合 (Case-I)

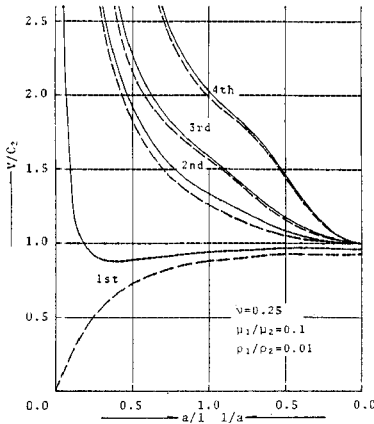
図-2 には上の条件で  $\rho_1\mu_2/\rho_2\mu_1=1.0$  の場合の分散曲線を示した。図は縦軸に位相速度と円柱のせん断波の速度との比、横軸に  $a/l$  および  $l/a$  をとり全体として  $l$  について零から無限大までの値を示すようにしている。また同じ図の右側には  $a/l$  の小さい範囲を拡大して示した。

図から明らかなように  $\mu_1/\mu_2$  が小さなものほど円柱を伝わる曲げ波動の分散曲線に近くなる。 $a/l=0$  では円柱の位相速度は零となるが弾性媒体中の場合は零とならず  $l$  のある値で極小となった後急激に増加し弾性体のせん断波の速度に一致する。 $\mu_1/\mu_2$  が小さなものほど円柱の分散曲線に近くなるためこの極小値は  $\mu_1/\mu_2$  が小さくなるほど小さく極小値を示す  $a/l$  の値も小さくなっている。また  $l$  が小さくなるほど円柱の分散曲線に近づき、 $l=0$  では円柱の位相速度は Rayleigh 波の速度になるがこの場合には Rayleigh 波の速度より僅かに大きな値を示し  $\mu_1/\mu_2$  によって異なった値となる。これらの傾向はポアソン比に関係なく同じであるが  $\mu_1/\mu_2 \neq 0$  の場合の極小値はポアソン比の大きなものは大きく Rayleigh 波の速度そのものがポアソン比の大きなものは大きいため全体としても位相速度は大きくなっている。

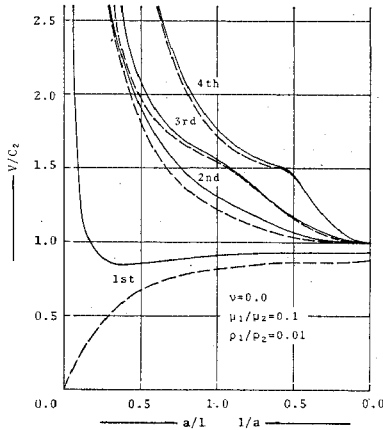
ポアソン比  $0.25$  のものに対して  $\mu_1/\mu_2=0, 0.01, \rho_1\mu_2/\rho_2\mu_1=1.0$  の場合の群速度の分散曲線を同じ条件の位相速度の分散曲線とともに図-3 に示した。図中実線が群速度 ( $V_g$ )、破線が位相速度 ( $V$ ) である。円柱のみの場合は  $l/a > 0.45$  では位相速度より群速度が大きな値を示している。 $\mu_1/\mu_2=0.01$  の場合にはほぼ  $l/a > 0.45$  と  $a/l > 0.15$  ではやはり群速度が大きい。他の範囲では位相速度の方が大きくなっている。また  $\mu_1/\mu_2=0$



(a)



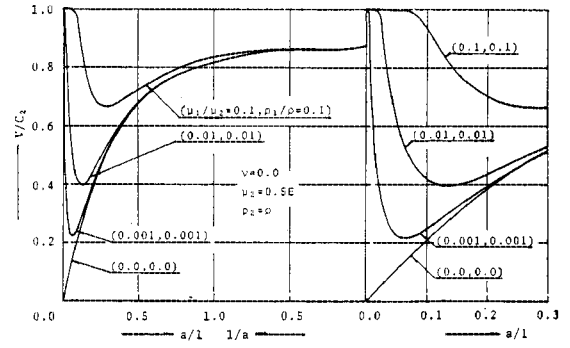
(b)



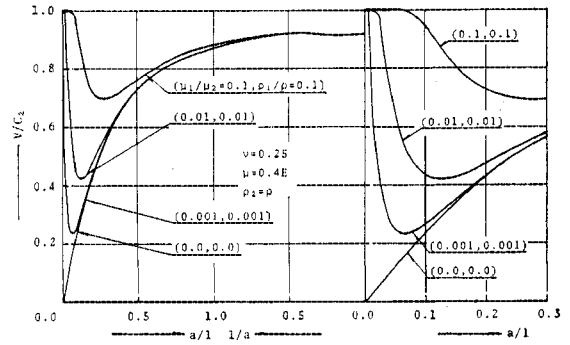
(c)

図-4 高次の位相速度分散曲線 (Case-II)

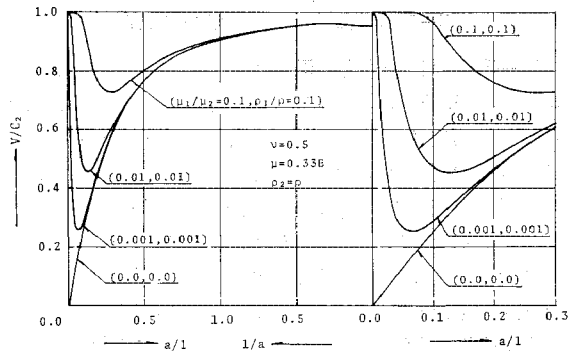
と 0.01 の群速度を比較すると  $al < 0.05$  の範囲以外では  $\mu_1/\mu_2=0$  の場合の群速度が大きくなっている。このことは円柱のみの場合より弾性媒体中にある円柱の方が波長の短い範囲では群速度は遅くなることを示してい



(a)



(b)



(c)

図-5 境界面にせん断応力が存在しない場合 (Case-II) の位相速度分散曲線

る。この傾向は他のポアソン比の場合でも同様であった。

図-4 はポアソン比  $\nu=0, 0.25, 0.5$  に対して  $\mu_1/\mu_2=0.1$  で  $\rho_1\mu_2/\rho_2\mu_1=0.1$  の場合の高次の位相速度の分散曲線である。図中には破線で円柱 ( $\mu_1/\mu_2=0$ ) の値も示した。円柱の場合と比較すると 1 次の分散曲線が最も変化が大きく高次になるに従って差は小さくなり、波長の短いものがその差も小さい。ポアソン比の変化に対しては全体としてポアソン比の大きなものほど速度は大きく特に高次の分散曲線では波長の長い場合に影響が大きい。

b) 境界面にせん断応力が存在しない場合 (Case-II)

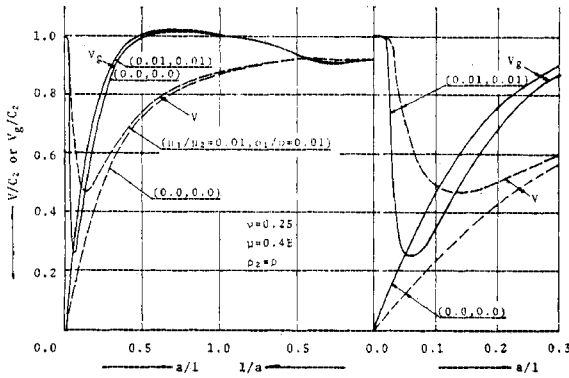


図-8 群速度分散曲線 (Case-II)

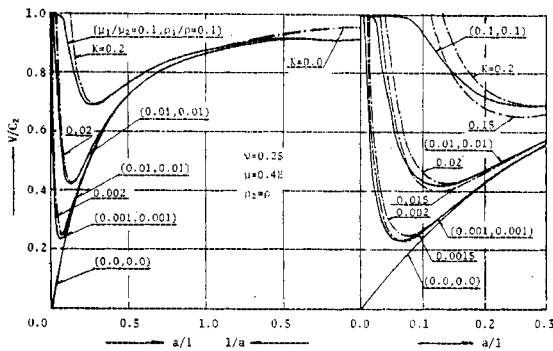


図-7 弾性支承上のはり理論との比較

図-5 に a) の場合と同様  $\nu=0, 0.25, 0.5$  に対して  $\mu_1/\mu_2=0, 0.001, 0.01, 0.1$  で  $\rho_1\mu_2/\rho_2\mu_1=1.0$  の位相速度の分散曲線を示した。図の表示は図-2 と同様である。図の傾向もほぼ図-2 と同様であるが、全体として a) の場合に比較して小さい値を示している。 $\mu_1/\mu_2$  の変化に対してはやはり  $\mu_1/\mu_2$  の小さなものは円柱の分散曲線に近い。波長の長い範囲の挙動は a) の場合と同様極小値を持ち無限大では弾性体のせん断波の速度になる。a) の場合と異なる点は  $l=0$  の場合で、この場合には  $\mu_1/\mu_2$  の値に関係なく Rayleigh 波の速度に収束する。また境界のせん断力の影響は  $\mu_1/\mu_2$  の大きなものほど大きく極小値も  $\mu_1/\mu_2$  の大きなものでは a) の場合に比較してかなり小さく  $\nu=0.25, \mu_1/\mu_2=0.1$  のものでは a) の場合の約 85% である。ポアソン比の変化に対する傾向も a) の場合と同様である。

図-6 に  $\nu=0.25, \mu_1/\mu_2=0, 0.01, \rho_1\mu_2/\rho_2\mu_1=1.0$  の群速度を示した。部分的に多少の相違はあるが全体として図-3 と同じ傾向である。

a) の場合と同様の条件で高次の分散曲線も求めたが 1 次の分散曲線に円柱との差がみられるほかは円柱の場合とほとんど同様であった。

初等理論との比較のためにこの問題を 1 次元化し、弾性支承上のはりとしての位相速度の分散曲線を求めた。

すなわち円柱を Timoshenko ばりとし、弾性媒体をばねと考えた。また平均せん断係数は、はりのみの位相速度の分散曲線と円柱のものが広い範囲で一致するように定めた。この結果を図-7 に示した。図は  $\nu=0.25$  の場合であるが図中の  $K$  は  $K=2ak/Ea$  であり  $k$  はばね定数である。図は実線で 3 次元理論による厳密値を、一点鎖線で弾性支承上のはりとしての値を示した。また波長の全範囲に対しては  $K=2\mu_1/\mu_2$ 、すなわち  $k/E=\mu_1/\mu_2$  のものを、右側の波長の長い範囲に対しては  $k/E=1.5\mu_1/2\mu_2$  の値も示した。弾性支承上のはりの値はどの値も 3 次元理論と完全には一致しないが、 $k/E=\mu_1/\mu_2$  の場合でも波長の中間的な範囲ではかなり良く一致しているのは興味深いことである。このことは弾性媒体中の円柱の位相速度は波長が極端に長い場合または短い場合でなければ、弾性媒体の弾性係数をばね定数として弾性支承上のはりの位相速度を求めればこれとほぼ等しくなることを示している。他のポアソン比の場合もほぼ同様の結果をえた。

## 5. むすび

円柱座標を用い波動の進行方向を軸方向とした場合の円柱および円孔を有する無限弾性体の波動の基本式を、Hankel 変換によって求めこれを組合せて境界条件式からなる固有値方程式を導き主に曲げ波動の位相速度の分散曲線について検討した。数値計算の結果次のことが明らかとなった。

(1) 位相速度は波長無限大では円柱と弾性体との境界面の状態、弾性係数比に無関係に弾性媒体のせん断波の速度に一致する。

(2) 波長零では境界面にせん断応力が存在しないとき弾性係数比に無関係に Rayleigh 波の速度となり、境界面で変位が連続な場合には弾性係数比に応じ僅かに Rayleigh 波の速度より大きくなる。

(3) 境界面で変位が連続な場合の位相速度は全体としてせん断応力が存在しない場合に比較して大きい。

(4) 弾性媒体中の円柱を弾性支承上のはりとして位相速度を求めれば 1 次の分散曲線では弾性支承のばね定数を弾性媒体の弾性係数と等しくすることによりほぼ等しい結果をえることができる。

弾性媒体中に円筒が存在する場合も同様の方法で解析することができ、結果もえているがこれについては別に発表予定である。

なお数値計算は北海道大学大型計算機センターの FA COM-230-75 で行った。



参 考 文 献

- 1) Ewing, W.M., W.S. Jardetzky and F. Press : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, pp. 281~323, 1957.
- 2) Bancroft, D. : The Velocity of Longitudinal Waves in Cylindrical Bars, Physical Review, Vol. 59, pp. 588~593, 1941.
- 3) Hudson, G.E. : Dispersion of Elastic Waves in Solid Circular Cylinders, Physical Review, Vol. 63, pp. 46~51, 1943.
- 4) Abramson, H.N., H.J. Plass and E.A. Ripperger : Stress Wave Propagation in Rods and Beams, Advanced in Applied Mechanics, pp. 111~188, 1958.
- 5) Mindlin, R.D. and H.D. McNiven : Axially Symmetric Waves in Elastic Rods, Jour. of Applied Mechanics, Vol. 27, pp. 145~151, 1960.
- 6) Pao, Y. and R.D. Mindlin : Dispersion of Flexural Waves in a Elastic Circular Cylinder, Jour. of Applied Mechanics, Vol. 27, pp. 513~520, 1960.
- 7) Biot, M.A. : Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bare Canlaining a Fluid, Jour. of Applied Physics, Vol. 23, pp. 997~1005, 1952.
- 8) Matsuoka, K.G. and S.G. Nomachi : On Stress Wave of a Cylinder Embedded in an Elastic Medium, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 399~408, 1976.
- 9) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms, Chap. 2 and 3, McGraw-Hill, 1951.

付録 : Hankel 変換および逆変換公式<sup>9)</sup>

(1) 半無限 Hankel 変換記号および逆変換公式

関数  $f(x)$  が  $a < x < \infty$  で Dirichlet の条件を満足するものとし、これの Hankel 変換を次のようにおく。

$$H_j[f(x)] = \int_a^\infty f(x) x H_j(\xi x) dx \dots\dots (付 \cdot 1)$$

ただし

$$H_j(\xi x) = J_j(\xi x) Y_m(\xi a) - J_m(\xi a) Y_j(\xi x),$$

$$j = m-1, m, m+1$$

である。このとき  $B_m(\xi a) = \{J_m(\xi a)\}^2 + \{Y_m(\xi a)\}^2$  とすれば式 (付・1) の逆変換は

$$f(x) = C_{1j} \frac{2 m a^{2m}}{x^j} \int_a^\infty x^{-m} f(x) dx$$

$$+ \int_0^\infty \frac{1}{B_m(\xi a)} H_j[f(x)] \xi H_j(\xi x) d\xi$$

\dots\dots\dots (付 \cdot 2)

ここで、 $C_{1j} = 1$  ( $j = m+1$ ),  $C_{1j} = 0$  ( $j = m-1, m$ ) で  $J_m, Y_m$  は第1種および第2種の Bessel 関数である。

式 (付・1), (付・2) を用いて種々の逆変換公式がえられるが、ここでは本論に関係のある公式のみを記す。

$$G_m(\alpha x) = \frac{K_m(\alpha x)}{K_m(\alpha a)}$$

$$= - \int_0^\infty \frac{\xi^2 a}{\xi^2 + \alpha^2} \frac{H_{m+1}(\xi a)}{B_m(\xi a)} H_m(\xi x) d\xi$$

\dots\dots\dots (付 \cdot 3)

$$\chi_{mp}(\alpha x) = - \frac{K_{m+1}(\alpha x)}{K_m(\alpha a)} = - \frac{2 m}{\alpha a} \left(\frac{a}{x}\right)^{m+1}$$

$$- \int_0^\infty \frac{\xi \alpha a}{\xi^2 + \alpha^2} \frac{H_{m+1}(\xi a)}{B_m(\xi a)} H_{m+1}(\xi x) d\xi$$

\dots\dots\dots (付 \cdot 4)

$$\chi_{ms}(\alpha x) = - \frac{K_{m-1}(\alpha x)}{K_m(\alpha a)}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\xi \alpha a}{\xi^2 + \alpha^2} \frac{H_{m+1}(\xi a)}{B_m(\xi a)} H_{m-1}(\xi x) d\xi$$

\dots\dots\dots (付 \cdot 5)

ただし  $K_m$  は変形第2種の Bessel 関数である。

(2) 有限 Hankel 変換記号および逆変換公式

関数  $f(x)$  は  $0 < x < a$  で Dirichlet の条件を満足するものとする。このとき Hankel 変換を次のようにおく。

$$J_j[f(x)] = \int_0^a f(x) x J_j(\xi_i x) dx$$

$$j = m-1, m, m+1$$

\dots\dots\dots (付 \cdot 6)

このとき逆変換は

$$f(x) = C_{2j} \frac{2 m}{a^{2m}} x^j \int_0^a x^m f(x) dx$$

$$+ \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^\infty J_j[f(x)] \frac{J_j(\xi_i x)}{\{J_{m+1}(\xi_i a)\}^2}$$

\dots\dots\dots (付 \cdot 7)

ただしここで  $C_{2j} = 1$ , ( $j = m-1$ ),  $C_{2j} = 0$ , ( $j = m, m+1$ ) で  $\xi_i$  は  $J_m(\xi_i a) = 0$  の根を小さい順に並べたものである。このときの逆変換公式も関係のもののみ記せば

$$G_m(\alpha x) = \frac{I_m(\alpha x)}{I_m(\alpha a)}$$

$$= \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^\infty \frac{\xi_i a}{\xi_i^2 + \alpha^2} \cdot \frac{J_m(\xi_i x)}{J_{m+1}(\xi_i a)}$$

\dots\dots\dots (付 \cdot 8)

$$\chi_{mp}(\alpha x) = \frac{I_{m+1}(\alpha x)}{I_m(\alpha a)}$$

$$= \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^\infty \frac{\alpha a}{\xi_i^2 + \alpha^2} \frac{J_{m+1}(\xi_i x)}{J_{m+1}(\xi_i a)}$$

\dots\dots\dots (付 \cdot 9)

$$\chi_{ms}(\alpha x) = \frac{I_{m-1}(\alpha x)}{I_m(\alpha a)} = \frac{2 m}{\alpha a} \left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}$$

$$- \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^\infty \frac{\alpha a}{\xi_i^2 + \alpha^2} \cdot \frac{J_{m-1}(\xi_i x)}{J_{m+1}(\xi_i a)}$$

\dots\dots\dots (付 \cdot 10)

となる。ただし  $I_m$  は変形第1種の Bessel 関数である。