

# 空間オキュパンシーと交通密度の計測誤差に 関する確率論的考察

## A PROBABILISTIC ASPECT ON SPACE OCCUPANCY AND MEASUREMENT ERROR OF TRAFFIC DENSITY

奥 谷 巖\*

By Iwao OKUTANI

### 1. ま え が き

交通制御を行う際に用いられる交通情報として最も一般的なものは交通量であるが、よく知られているように、これは交通状態に対して 2 価関数的性質を有しており、交通渋滞領域においてはその値は交通流の実態をまったく表わさないというふつごうがあった。

このことから、渋滞領域にある交通に対しても適確な監視制御を施すためには、交通量に加えて何らかの補助的交通情報が必要であることがわかるわけである。

このための交通情報としては、速度、空間オキュパンシーおよび交通密度が挙げられるが、このうち最初の速度は地点情報であるのに対し、空間オキュパンシーと交通密度は空間情報であり、したがってある道路区間の交通状態を表わすには最も直接的な交通情報である。現在、これら 2 つの交通情報は、経費的側面あるいは計測技術的側面に問題があって、部分的にしか用いられていないが、今後そうした問題が解決されてゆくならば、交通制御を実行する上で大いに有用な情報となる可能性があるものである。

以上のような観点から、本稿では空間オキュパンシーと交通密度について若干の基礎的考察を行うものとするが、まず空間オキュパンシーについては、現在まであまりその特性に関する理論的研究がなされていないことを考え、おもにその確率分布に関して考察を行い、あわせて適正な計測区間長の決定法についても述べる。

交通密度については、その利用可能性が計測技術とその精度の問題にかかっていることを考え、特に計測誤差の性質に焦点を絞って分析を行うことにし、計測誤差を規準とした交通密度の計測区間長の決定方法についてもふれる。

交通密度の最も正確な計測方法は航空写真による方法

\* 正会員 工博 信州大学助教授 工学部土木工学科

であるが、これは交通管制を実施する場合の事前調査などに対してのみ有効な方法であって、交通状態の変化を時々刻々と監視して制御するためのいわゆるオンライン情報を提供するためには、交通密度計測対象区間の上下流端で交通量を計るという方法によらざるをえなく、したがってそこに計測誤差発生の問題がでてくるということである。

### 2. 空間オキュパンシー

#### (1) 確率密度関数<sup>1)</sup>

空間オキュパンシーというのは、道路の一定区間内に存在する自動車の車長の総和の当該道路区間長に占める割合であり、いわば交通密度の概念に自動車の寸法要因が加わったものである。その意味では、交通密度よりもより合理的に交通状態を表わす交通情報であるともいえる。

さて、われわれは空間オキュパンシーの確率密度関数を理論的に導出することを考えるものとするが、ここでは、対象区間の上下流端に車体がまたがっているような自動車は存在しないと仮定した場合、すなわち空間オキュパンシーとして計測される自動車の車体はすべて完全に対象区間内に入りきっていると仮定した場合について考える。

いま、長さ  $L$  の 1 車線道路区間に  $n$  台の自動車が存在するとき、空間オキュパンシー  $X$  は次式によって表わされる。

$$X = \sum_{i=1}^n l_i / L \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $l_i$  は  $n$  台の自動車に適当に番号を付けるものとしたとき、第  $i$  番目の自動車の車長を表わしている。当然のことながら  $l_i$  と  $L$  の大小関係は  $l_i \leq L$  である。

式 (1) で  $x_i=l_i/L$  とおくと、 $X=\sum_{i=1}^n x_i$  となるから  $n$  台の自動車が存在する場合の  $X$  の確率密度関数をいま  $f_n(X)$  とすると、それは  $x_i$  が相互に独立と仮定すれば、その確率密度関数  $g(x)$  の  $n$  重たみ込みによって次のように表わされる。

$$f_n(X)=\alpha \cdot g^{n*}(X) \dots\dots\dots(2)$$

上式で  $g^{n*}(X)$  は  $g(x)$  の  $n$  重たみ込みによって得られる関数であり、また  $\alpha$  は  $X$  の変域が  $[0,1]$  であることに基づく正規化のための定数で、 $\int_0^1 f_n(X) dX = 1$  より、 $\alpha=1/\int_0^1 g^{n*}(X) dX$  のように表わされる。したがって、式 (2) は

$$f_n(X)=g^{n*}(X)/\int_0^1 g^{n*}(X) dX \dots\dots\dots(3)$$

となる。

ところで  $g(x)$  であるが、これは車長を一般に  $l$  としたとき、それを区間長  $L$  で除した値の分布であるから、いま  $l$  の確率密度関数を  $h(l)$  とすると

$$g(x)=L \cdot h(Lx) \dots\dots\dots(4)$$

のように表わされることになる。

以上より、対象道路区間に  $n$  台の自動車が存在する場合の空間オキュパンシーの確率密度関数は、車長分布を表わす確率密度関数が与えられれば決定されることがわかった。

さて、上の議論では自動車台数  $n$  を固定して考えたが、実際にはこれも確率変数である。したがって、いま  $L$  内に  $n$  台の自動車が存在する確率を  $P_n(L)$  とすると、自動車台数が  $n$  台であり、かつ空間オキュパンシーが  $X$  である同時確率密度関数は  $P_n(L) \cdot f_n(X)$  となる。これを  $n$  について加え合わせたものを考えることにより、はじめてわれわれは対象道路区間内の自動車台数の変化も考慮した空間オキュパンシーの分布を規定することができるようになるのである。

ところで、対象道路区間内に自動車がまったく存在しない場合についてはどのように処理すべきであろうか。この場合は、明らかに空間オキュパンシーの値は 0 であり、またこの事象の出現確率は  $P_0(L)$  である。したがって、われわれはこの  $P_0(L)$  によって空間オキュパンシー 0 の確率密度を規定すればよいことになるが、それはデルタ関数を用いることによって容易に行われ、 $P_0(L) \cdot \delta(X)$  と表わされる (ただし、 $\delta(X)$ : デルタ関数)。

以上から、対象道路区間内の自動車台数の確率変動を考慮した空間オキュパンシー  $X$  の確率密度関数を  $f(X)$  とすると、結局

$$f(X)=P_0(L) \cdot \delta(X) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(L) \cdot f_n(X) \dots\dots\dots(5)$$

となる。

なお、計測区間の上下流端に車体がまたがっている自動車が存在することも考慮した確率密度関数については、参考文献 1) に詳述されているが、一般に  $l \ll L$  であるから実際には式 (5) の確率密度関数とほとんど差異はないと考えてよいであろう。

(2) 平均値と分散

空間オキュパンシーの平均値と分散は、式 (5) を用いることにより容易に計算される。すなわち、いま平均値を  $\bar{O}_s$  とすると

$$\bar{O}_s = \int_0^1 X \cdot f(X) dX = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(L) \cdot \int_0^1 X \cdot f_n(X) dX \dots\dots\dots(6)$$

によって与えられるから、具体的な車長分布の確率密度関数  $h(l)$  が与えられれば、まず式 (4) から  $g(x)$  が決まり、それを利用して式 (3) から  $f_n(X)$  が決まるので、 $\bar{O}_s$  を計算することができる。しかしながら、 $h(l)$  を具体的に与えない場合においても、 $L$  内の存在台数に事実上の上限があり、その範囲内における現実的な  $n$  を考えれば

$$\int_0^1 g^{n*}(X) dX = 1 \dots\dots\dots(7)$$

が成立すると考えられるので、このことを前提とすると、式 (3) から  $f_n(X)=g^{n*}(X)$  となり

$$\int_0^1 X \cdot f_n(X) dX = n\bar{l}/L$$

なる関係式が成立するから、これを式 (6) に代入して計算すると、結局

$$\bar{O}_s = \bar{n} \cdot \bar{l} / L \dots\dots\dots(8)$$

となる。ここに、 $\bar{l}$  は平均車長を、 $\bar{n}$  は計測区間内の平均自動車台数を意味するものとする。

ところで、区間  $L$  の平均交通密度を  $\bar{k}$  とすると、 $\bar{k} = \bar{n}/L$  であるから、式 (8) は

$$\bar{O}_s = \bar{k} \cdot \bar{l} \dots\dots\dots(9)$$

と書くこともできる。

次に、分散であるが、それをいま  $\sigma_o^2$  とすると、

$$\sigma_o^2 = \int_0^1 X^2 f(X) dX - \bar{O}_s^2 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(L) \cdot \int_0^1 X^2 f_n(X) dX - \bar{O}_s^2 \dots\dots\dots(10)$$

となる。式 (7) が成立すると仮定し、 $x(=l/L)$  の  $n$  個の和の分散が、車長  $l$  の分散を  $\sigma_l^2$  としたとき  $n \cdot \sigma_l^2 / L^2$  となることを考慮すると

$$\int_0^1 X^2 f_n(X) dX = n \cdot \sigma_l^2 / L^2 + (n \cdot \bar{l} / L)^2 \dots\dots(11)$$

なる関係が成立するから、式 (11) を式 (10) の第 1 項に代入し、式 (8) を第 2 項に代入して整理すると

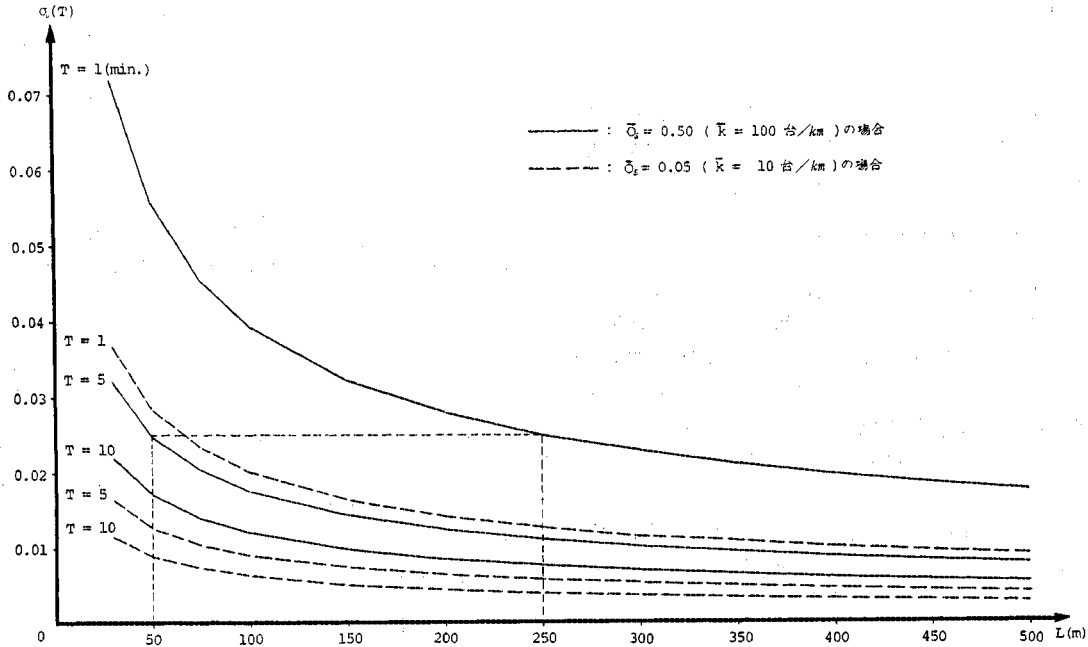


図-1 空間オキュパンシーの標準偏差と計測区間長の関係

$$\sigma_0^2 = \bar{n} \cdot a_l^2 / L^2 + \bar{l}^2 \cdot \sigma^2 / L^2 \dots\dots\dots (12)$$

となる。ここに、 $\sigma^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(L) - \bar{n}^2$  であり、計測区間内の自動車台数の分散を表わすものとするが、これを  $L^2$  で除したものは交通密度の分散に等しいから、いまそれを  $\sigma_k^2$  とし、また  $\bar{k} = \bar{n}/L$  なる関係を代入すると、式 (12) は

$$\sigma_0^2 = \bar{k} \cdot \sigma_l^2 / L + \bar{l}^2 \cdot \sigma_k^2 \dots\dots\dots (13)$$

と書くこともできる。

式 (13) において、 $\sigma_k^2 = 0$  すなわち計測区間内の自動車台数が一定とすると、 $\sigma_0^2$  は第1項の車長の分散にかかわるもののみとなり、また逆に車長が一定の場合には  $\sigma_l^2 = 0$  から、 $\sigma_0^2$  は  $\sigma_k^2$  のみによって規定されるようになって、いずれも常識に合致する。

ところで、空間オキュパンシーは交通密度と同じく瞬時情報であるが、実際には時間的に平均した値が使われる。このことを前提とすると、空間オキュパンシーの分散は次のように与えられることになる。すなわち、いま計測時間間隔を  $\tau$ 、平均する時間長さを  $T$  とし、このときの分散を  $\sigma_0^2(T)$  とすると

$$\sigma_0^2(T) = \sigma_0^2 / (T/\tau) \dots\dots\dots (14)$$

となる。ただし、 $(T/\tau)$  は整数であるとする。

式 (14) から求められる空間オキュパンシーの標準偏差  $\sigma_0^2(T)$  の  $L$  に対する変化をみるべく、実際に計算してみると図-1 のようになる。ただし、この計算において、まず名神高速道路の観測データから、 $\bar{l} = 5\text{m}$ 、 $\sigma_l = 1\text{m}$  とした<sup>2)</sup>。また  $\tau$  は交通密度計測のための航空写真の撮影時間間隔などを参考<sup>3)</sup> に 10 秒を考えた。さら

に交通密度の分散であるが、これについては観測データがほとんどないので、次のような理論式を便宜的に採用することとした<sup>4)</sup>。すなわち

$$\sigma_k^2 = \bar{k} \cdot \{1 - (\bar{k}/k_{\max})\} / L \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $k_{\max}$  は最大交通密度であり、ここでは 150 台/km とした。式 (15) は  $l_0 = 1/k_{\max}$  とおいたとき、 $L$  なる対象区間を長さ  $l_0$  の小区間に分割し、その1つの小区間に1台の自動車が存在する確率が  $\bar{k} \cdot l_0$  で与えられることに着目して、2項分布の式を適用して導かれたものである。

図-1 において、 $\bar{O}_0 = 0.5$  の場合、 $T = 1$  分で  $L = 250\text{m}$  のときの  $\sigma_0(T)$  の値と、 $T = 5$  分で  $L = 50\text{m}$  のときの  $\sigma_0(T)$  の値が一致していることが示されているが、これは  $\sigma_k^2$  として式 (15) を採用していることから一般に  $T_1$  という平均時間で、 $L_1$  という計測区間長に対する分散と、 $T_2$  という平均時間で、 $L_2$  という計測区間長に対する分散を等しいとしたとき

$$L_1 \cdot T_1 = L_2 \cdot T_2$$

なる関係式が成立することに基づいている。

この結論は、 $\sigma_k^2$  として式 (15) のような具体的な形を規定しなくても、 $\sigma_u^2$  を単位長さの道路区間に存在する自動車台数の分散としたとき、各単位長さ区間の存在台数を独立とすれば、 $\sigma^2 = L \cdot \sigma_u^2$  が成立することから、 $\sigma_k^2 = \sigma^2 / L^2 = \sigma_u^2 / L$  となるので、この関係を式 (13) に代入した  $\sigma_0^2$  の式を用いても得られる。このことは、本結論の一般性を示唆するものであり、したがって  $L$  と  $T$  のうち一方を小さくせざるをえない場合には、他方

を大きくするという操作をすることにより、制御上要求される安定性をもった空間オキュパンシー情報を得ることができるといえる。

ちなみに、空間オキュパンシーと類似した性質をもつと思われる交通密度の実測結果によっても、同様な関係があることが文献 3) に示されている。

(3) 計測区間長の一決定法<sup>5)</sup>

空間オキュパンシーの計測は長大ループによるのが普通であるが、その長さはコスト的にはできるだけ短い方がよい。しかしながら計測値からより広範囲の空間オキュパンシーを推定しようとする場合には、あまりに短い計測区間長は推定精度の低下につながるおそれもあり、そこにはおのずから適正な計測区間長があると考えられる。

このような観点から、ここでは推定すべき区間長が与えられたとき、推定精度をある一定水準に保ちうる最小の計測区間長はどのように決定すればよいかについて考察してみる。

図-2 は、計測区間長  $L$  と推定区間長  $L_0$  の関係を示したもので、 $L \leqq L_0$  となることは言をまたない。

さて、いま区間  $L$  で計測値  $X$  が得られ、また区間  $(L_0-L)$  における空間オキュパンシーが  $Y$  であり、 $X$  と  $Y$  が相互に独立である場合について考えてみると、このとき区間  $L_0$  の空間オキュパンシー  $Z$  は次のようになる。

$$Z = \{L \cdot X + (L_0 - L) \cdot Y\} / L_0$$

このとき  $Z$  の推定値は  $X$  であるから、いま推定誤差を  $\epsilon$  とすると

$$\epsilon = Z - X = (L_0 - L) \cdot (Y - X) / L_0$$

となる。したがって、 $|\epsilon| > \alpha \cdot Z$  ( $\alpha$ : 定数) となる条件は

$$Y > \frac{(L_0 - L + \alpha \cdot L)}{(L_0 - L) \cdot (1 - \alpha)} \cdot X \dots\dots\dots(16)$$

または

$$Y < \frac{(L_0 - L - \alpha \cdot L)}{(L_0 - L) \cdot (1 + \alpha)} \cdot X \dots\dots\dots(17)$$

と書くことができる。

式 (16) および式 (17) の右辺を簡単のために  $r_1 \cdot X$ ,  $r_2 \cdot X$  と書くこととし、また区間  $(L_0-L)$  の空間オキュパンシーの確率密度関数を  $\hat{f}(Y)$ 、区間  $L$  で  $X$  なる計測値が得られたという条件のもとで、 $|\epsilon| > \alpha \cdot Z$  となる確率を  $\text{Prob}\{|\epsilon| > \alpha \cdot Z | X\}$  とすると

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{|\epsilon| > \alpha \cdot Z | X\} &= \int_0^{r_1 \cdot X} \hat{f}(Y) dY \\ &+ \int_{r_2 \cdot X}^1 \hat{f}(Y) dY \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $r_1$  が非負であるための条件は、式

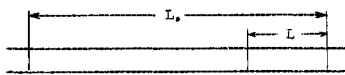


図-2 計測区間と推定区間の関係

(16) より

$$L \leqq L_0 / (1 - \alpha)$$

となるが、 $L \leqq L_0$  なる関係からこの条件は常に満たされる。また、 $r_2$  が非負であるための条件は、式 (17) より

$$L \leqq L_0 / (1 + \alpha)$$

となるから、 $L_0 / (1 + \alpha) < L \leqq L_0$  のときは式 (18) の第 1 項は 0 となる。

上では、区間  $L$  の空間オキュパンシー  $X$  が一定であるという条件のもとにおいて議論を進めてきたが、実際には  $X$  は確率変数である。したがって、このことを考えた場合の推定誤差  $\epsilon$  の絶対値が真値の 100  $\alpha$ % を上回る確率を  $P$  とすると

$$P = \int_0^1 \text{Prob}\{|\epsilon| > \alpha \cdot Z | X\} \cdot f(X) dX$$

となる。ここに、 $f(X)$  は  $X$  の確率密度関数である。

われわれは、いまこの確率  $P$  があらかじめ与えられた水準  $\beta$  より小さくなるという条件を満たす最小の  $L$  をもって適正な計測区間長とするものとする、結局

$$\begin{aligned} P = \int_0^1 \left\{ \int_0^{\max(0, r_1 \cdot X)} \hat{f}(Y) dY + \int_{r_2 \cdot X}^1 \hat{f}(Y) dY \right\} \\ \cdot f(X) dX \leqq \beta \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

なる不等式を満足する最小の  $L$  をみつければよいことになる。

〔計算例〕

空間オキュパンシーは 5 分間の平均値を用いるものとし、計測時間間隔を 10 秒とすると、結局われわれは各空間オキュパンシーの計測値の 30 個の平均値を問題とすることになる。したがって、中心極限定理からその値は近似的に正規分布をすと仮定できるので、ここでは  $\hat{f}(Y)$ ,  $f(X)$  を正規分布として与えることにし、平均値としては式 (9) を、分散としては式 (14) を採用する。また、 $\bar{l}$ ,  $\sigma_l^2$ ,  $\sigma_k^2$  は 図-1 を得たときと同じ値、同じ関係式を用いる。さらにそのほかの値として、 $\bar{k} = 0.1$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.015$  なる各値を採用する。

計算は、 $L_0$  として 100 m から 1000 m までの 6 つの長さを取り、それらの各値に対して  $L$  を適当な間隔で与えながら、式 (19) の左辺を数値的に積分し、その値が  $\beta$  より小となる条件を満たす最小の  $L$  を、最終的に 5 m の精度で求めるという方法をとった。

計算結果は表-1 に示したとおりであるが、これを見ると、 $L$  が 250 m 前後になると、かなり高い信頼度で相当に長い区間の空間オキュパンシーを予測できること

表-1 各予測区間長に対する計測区間長 (単位: m)

$L_0$	100	200	300	400	500	1000
$L$	75	125	160	185	200	255

がわかるし、また逆に  $L$  が 75 m 以下というような小さい値になってくると、分散が大となって、 $L$  より若干長い程度の区間の予測しか行えないことがうかがえる。

なお、2車線以上の道路で、空間オキュパンシーを全車線にまたがって計測し、その平均値を用いるような場合には、分散が車線数分の1となるので、必要な計測区間長はより短くてすむであろう。

### 3. 交通密度の計測誤差

#### (1) 確率分布

交通密度の計測区間長を  $L$ 、その中の初期自動車台数を  $N_0$  とし、 $\tau$  時間の計測区間上流端からの流入台数を  $N_u$ 、下流端からの流出台数を  $N_d$  とすると、 $\tau$  時間後の区間  $L$  の交通密度  $k$  は

$$k = (N_0 + N_u - N_d) / L \dots\dots\dots (20)$$

として表わされる。したがって、われわれは初期台数  $N_0$  を何らかの方法で計測しておけば、それ以後の任意時点における交通密度は、対象区間の上・下流端で交通量を計測することによって容易に知ることができる。

しかしながら、交通量の計測は通常車両検知器を用いて行うため、検知器上を自動車は期待したとおりに走行しないことや、車両検知信号の処理装置におけるスキャンニング周期のとり方などによって、計測誤差が発生する。したがって、式 (20) を用いて一定時間後の交通密度を計測するとすれば、明らかにその値の中にも誤差が入ってくることになる。

ここでは、まずこの確率分布について考えてみることにする。いま、対象とする計測区間の上流端または下流端を1台の自動車通過したとき、その自動車がカウントされない確率、言い換えれば0台とカウントされる確率を  $p$ 、2台とカウントされる確率を  $q$ 、それ以外の誤差の発生確率は無視できる程度に小さいものとする。そうすると、1台の自動車が正しく1台とカウントされる確率は  $(1-p-q)$  となる。

これらの確率を用いると、一般に  $n$  台の自動車通過したとき、 $\xi$  台のアンダーカウントが発生する確率  $\hat{P}(\xi|n)$ 、および  $\xi$  台のオーバーカウントが発生する確率  $\bar{P}(\xi|n)$  が多項分布の考え方を適用して次のように求められる<sup>9)</sup>。

$$\hat{P}(\xi|n) = \sum_{\lambda=0}^n \frac{n!}{(\xi+\lambda)! \lambda! (n-\xi-2\lambda)!} \dots\dots\dots$$

$$\cdot p^{\xi+\lambda} \cdot q^\lambda \cdot (1-p-q)^{n-\xi-2\lambda} \dots\dots\dots (21)$$

$$\bar{P}(\xi|n) = \sum_{\lambda=0}^n \frac{n!}{\lambda! (\xi+\lambda)! (n-\xi-2\lambda)!} \dots\dots\dots$$

$$\cdot p^\lambda \cdot q^{\xi+\lambda} \cdot (1-p-q)^{n-\xi-2\lambda} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $n^*$  は  $(n-\xi)/2$  をこえない最大の整数とする。

式 (21)、(22) で表わされる  $\hat{P}(\xi|n)$  および  $\bar{P}(\xi|n)$  はいずれも交通量が  $n$  のときの計測誤差発生確率であるので、いまこれらを一括して  $P(\xi|n)$  と書き、アンダーカウントのとき  $\xi$  を負 (ただし、式 (21) の確率計算には  $\xi$  の絶対値を用いるものとする)、オーバーカウントのとき  $\xi$  を正と約束しておくことにする。そうすると、定常状態における交通量  $n$  の確率変動を考慮した  $\xi$  台の誤差発生確率  $P(\xi)$  は

$$P(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \cdot P(\xi|n) \dots\dots\dots (23)$$

のように表わされる。ただし、 $\tau$  は交通量の計測時間である。

次に、交通量の計測誤差と計測区間内の存在台数の計測誤差の関係について考えてみる。まず、計測区間の上流端であるが、ここで  $\xi$  台のアンダーカウントがあれば、それはすなわち当該区間内の存在台数の  $\xi$  台のアンダーカウントを意味するし、また  $\xi$  台のオーバーカウントがあれば、それはそのまま存在台数の  $\xi$  台のオーバーカウントを意味することになることから、上流端の交通量計測誤差に基づく存在台数の計測誤差発生確率は、式 (23) で表わされる  $P(\xi)$  そのものになる。他方、下流端については、 $\xi$  台の交通量のアンダーカウントは、 $\xi$  台の存在台数のオーバーカウントを、 $\xi$  台の交通量のオーバーカウントは、 $\xi$  台の存在台数のアンダーカウントをそれぞれ意味することから、下流端の交通量計測誤差に基づく存在台数の計測誤差発生確率は、 $P(\xi)$  の  $\xi$  の符号を変えたものとなる。

以上から、上下流端における交通量計測誤差を同時に考慮した対象区間内存在台数の計測誤差発生確率  $P_\xi$  は両端の誤差発生を独立とすれば

$$P_\xi = \{P(\eta) * P(\nu)\}_{\eta-\nu=\xi} \dots\dots\dots (24)$$

となる。ここに、式 (24) の右辺は、上流端で  $\eta$  台、下流端で  $\nu$  台の交通量計測誤差があるものとしたとき、 $\eta-\nu=\xi$  となるあらゆる  $\eta$  と  $\nu$  の組み合わせについてそれぞれの発生確率を相互に乘じ、それらを加え合わせたものを意味するものにする (いわゆるたたみ込みの演算である)。

このようにして、われわれは交通密度の計測区間内存在台数の誤差発生確率を導くことができたが、存在台数に  $\xi$  台の誤差があることはすなわち交通密度に  $\xi/L$  の誤差があることを意味するので、 $\xi/L$  の交通密度計測誤差発生確率は、式 (24) で表わされる  $P_\xi$  に等しいわけ

である。

以上は1車線の道路区間についての考察であるが、多車線の場合については次のようになる。すなわち、いま一般に  $m$  車線からなる交通密度の計測区間を考えたとき、それらの車線に適当に番号を付し、第  $j$  番目車線における対象区間内存在台数の計測誤差確率を  $P_{\xi}^j$  とすると、それは式 (24) によって計算できる。そうすると、 $m$  車線全体を考慮した対象区間内存在台数の計測誤差発生確率  ${}^mP_{\xi}$  は

$${}^mP_{\xi} = (P_{\xi_1}^1 * P_{\xi_2}^2 * \dots * P_{\xi_m}^m) \sum_{j=1}^m \xi_j = \xi$$

として、各車線ごとの計測誤差発生確率のたたみ込みによって表わされることになるのである。すなわち、 $\sum_{j=1}^m \xi_j = \xi$  となるあらゆる  $\xi_j$  の組み合わせについて、各車線の計測誤差発生確率を乗じたものを加え合わせればよいということである。このようにして、 ${}^mP_{\xi}$  が求められると、それはそのまま  $\xi/mL$  の交通密度計測誤差発生確率を与えることになる。

(2) 平均値と分散

交通密度の計測区間の上流端における交通量の計測誤差を  $\eta$ 、下流端のそれを  $\nu$  とすると、区間内存在台数の計測誤差  $\xi$  は  $\xi = \eta - \nu$  として表わされることについては先にもふれたが、そうすると  $\xi$  の平均値は  $\eta$  の平均値から  $\nu$  の平均値を差し引いた値となる。ところが上下流端の誤差発生確率  $p, q$  が等しい場合を考えればそれらの確率分布は等しいから、平均値は一致し、したがって  $\xi$  の平均値は明らかに 0 となる。よって、交通密度の計測誤差の平均値も 0 となる。

参考までに、 $\eta$  の平均値  $E(\eta)$  を求めておくと、式 (23) より

$$E(\eta) = \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \eta \cdot P(\eta) = \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \eta \cdot \sum_{n=|\eta|}^{\infty} P_n(\tau) \cdot P(\eta|n) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \cdot \left\{ \sum_{\eta=-n}^n \eta \cdot P(\eta|n) \right\} \dots \dots \dots (25)$$

となるが、式 (25) の  $\{ \}$  の中は自動車  $n$  台通ったときの計測誤差の平均値であるから、1台通ったときの平均値  $(q-p)$  の  $n$  倍として表わされる。なお、1台通ったときの平均値は、 $-1$  の発生確率が  $p$ 、 $0$  の発生確率が  $(1-p-q)$ 、 $+1$  の発生確率が  $q$  であることから容易に導かれる。

さて、上の関係を式 (25) に代入すると、結局

$$E(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (q-p) \cdot P_n(\tau) = \bar{n} \cdot (q-p) \dots (26)$$

となる。ここに、 $\bar{n}$  は  $n$  の平均値である。

したがって、もし交通密度の計測区間上下流端における検知精度が異なる場合には、区間内存在台数の計測誤差の平均値は、 $\bar{n} \cdot \{(q_1 - p_1) - (q_2 - p_2)\}$  となる。ここ

に、 $q_1, p_1$  は上流端の、 $p_2, q_2$  は下流端の交通量計測誤差発生確率を表わすものとする。

次に  $\xi$  の分散であるが、 $\xi = \eta - \nu$  の関係より、 $\eta$  の分散と  $\nu$  の分散の和として表わされることになり、上下流端の誤差発生確率が等しい場合を考えればそれらの分散が相互に等しいことから、結局  $\eta$  の分散の2倍となる。すなわち、いま  $\xi$  および  $\eta$  の分散をそれぞれ  $\sigma_{\xi}^2, \sigma_{\eta}^2$  とすると

$$\sigma_{\xi}^2 = 2 \sigma_{\eta}^2 \dots \dots \dots (27)$$

となる。

$\sigma_{\eta}^2$  は、式 (23) および式 (26) の関係を用いて次のように表わされる。

$$\sigma_{\eta}^2 = \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \eta^2 P(\eta) - \{E(\eta)\}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \cdot \left\{ \sum_{\eta=-n}^n \eta^2 \cdot P(\eta|n) \right\} - \bar{n}^2 \cdot (q-p)^2 \dots \dots (28)$$

式 (28) の  $\{ \}$  の中は、自動車  $n$  台通過したときの計測誤差の分散  $\sigma_{c_n}^2$  に、そのときの平均値  $n \cdot (q-p)$  の2乗を加えたものとして表わされるが、 $\sigma_{c_n}^2$  は1台の自動車  $n$  が通過したときの計測誤差の分散  $\sigma_{c_1}^2$  の  $n$  倍となるから、われわれは  $\sigma_{c_1}^2$  を求めれば式 (28) が計算できることになる。

ところが、 $\sigma_{c_1}^2$  は

$$\sigma_{c_1}^2 = (-1)^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p-q) + (+1)^2 \cdot q - (q-p)^2 = (p+q) - (q-p)^2$$

として容易に求められるから、結局式 (28) は

$$\sigma_{\eta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \cdot [n \cdot \{(p+q) - (q-p)^2\} + n^2 \cdot (q-p)^2] - \bar{n}^2 \cdot (q-p)^2 = \bar{n} \cdot \{(p+q) - (q-p)^2\} + (q-p)^2 \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot P_n(\tau) - \bar{n}^2 \right\} \\ = \bar{n} \cdot \{(p+q) - (q-p)^2\} + (q-p)^2 \cdot \sigma_q^2 \dots \dots \dots (29)$$

となる。ここに、 $\sigma_q^2$  は交通量  $n$  の分散である。

式 (29) を式 (27) に代入して  $\sigma_{\xi}^2$  が得られるが、これを  $L^2$  で除したものが交通密度の計測誤差の分散であるから、いまそれを  $\hat{\sigma}_{\xi}^2$  とすると

$$\hat{\sigma}_{\xi}^2 = 2 \cdot [\bar{n} \cdot \{(p+q) - (q-p)^2\} + (q-p)^2 \cdot \sigma_q^2] / L^2 \dots \dots \dots (30)$$

となる。

$\tau$  が大きくなると  $\bar{n}$  は明らかに大きくなるし、また  $\sigma_q^2$  も大となるので、式 (30) で表わされる  $\hat{\sigma}_{\xi}^2$  は交通密度計測開始時点からの時間の経過とともに大きくなる性質がある。したがって、計測誤差の平均値は 0 であるが、瞬時情報としての交通密度の値の信頼度は時間の経過とともに低下するものと考えられる。

名神高速道路におけるデータをもとに、 $p=0.002, q=0.001$  とし、 $\tau=5$  分の場合について、式 (30) より

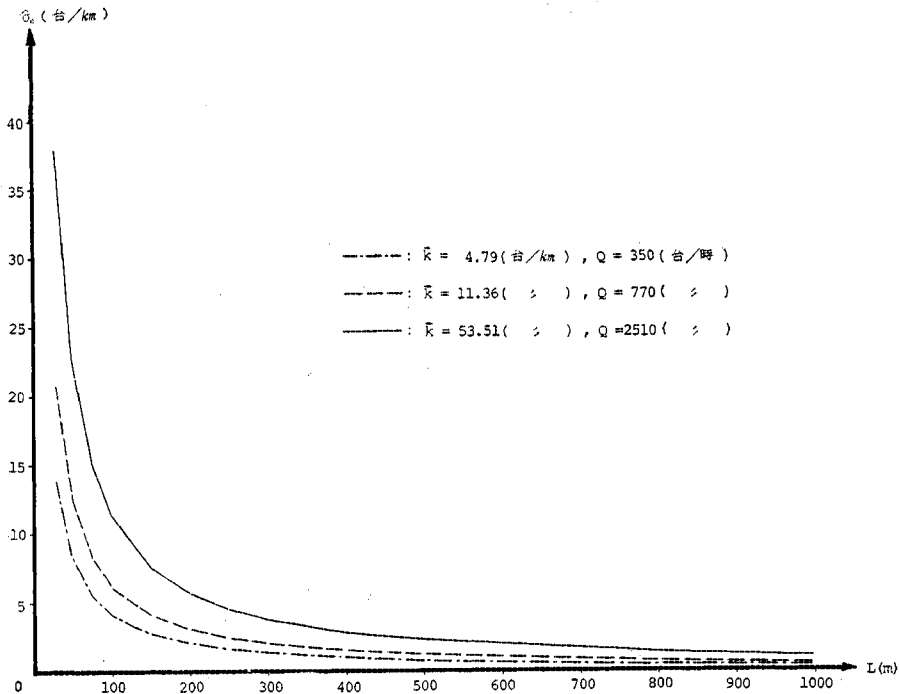


図-3 交通密度の計測誤差の標準偏差と区間長の関係

求められる計測誤差の標準偏差  $\sigma_e^2$  を  $L$  の変化に対して計算してみると 図-3 のようになる。なお、図において、 $Q$  は 1 車線あたりの 1 時間交通量を示すものとするが、 $Q=350, 770, 2510$  に対する 5 分間交通量の  $\sigma_q^2$  は、それぞれデータをもとに 123.17, 1830.17, 19870.88 としている<sup>2)</sup>。また、各  $\bar{k}$  の値は交通量を平均速度で割って求めたものである。

図-3 は計測開始から 5 分後の誤差の標準偏差を示したものであるが、任意時間  $T$  分後の標準偏差については、定常状態を前提とすれば、式 (30) で  $\bar{n}$  および  $\sigma_q^2$  がともに  $(T/\tau)$  倍となることから、図-3 より得られる値を  $\sqrt{(T/\tau)}$  倍して考えればよいことがわかる。定常状態が期待できない場合には、 $T$  をほぼ定常と考えられるいくつかの時間帯に分け、それぞれの時間帯別に適合する  $p, q, \bar{n}, \sigma_q^2$  の値を式 (30) にあてはめて、まず各時間帯別の分散を計算し、それを加え合わせるという方法によって求めるようにすればよい。

### (3) 計測誤差を規準とした交通密度の計測区間長の決定

考え方は空間オキュパンシーの計測区間長決定の場合と類似した考え方に従う。すなわち、交通密度の実際の値の  $100\alpha\%$  以上の計測誤差が発生する確率を、あらかじめ与えられた水準  $\beta$  以下にする最小の  $L$  をもって適正な交通密度の計測区間長とするという方法である。

いま、簡単のために交通密度およびその計測誤差を連続量と仮定し、それらの確率密度関数を  $\theta(x), \varphi(y)$  とすると、上述の関係は次のように数式化できる。

$$\int_0^{k_{\max}} \theta(x) \cdot \left\{ \int_{\alpha x}^{\infty} \varphi(y) dy + \int_{-\infty}^{-\alpha x} \varphi(y) dy \right\} dx \leq \beta \dots\dots\dots (31)$$

式 (31) を満たす最小の  $L$  を見つければ、それがここでいう適正な交通密度の計測区間長となる。

#### 〔計算例〕

交通密度の計測を開始して 4 時間（その間は定常状態を仮定）後の値について、 $\alpha=\beta=0.1$  として  $L$  を決定してみる。対象とする交通状態は、図-3 を作成したデータを利用すべく、 $\bar{k}=53.51$  台/km、 $\bar{k}=11.36$  台/km および  $\bar{k}=4.79$  台/km の 3 つとする。交通密度は 10 秒ごとの計測値の 5 分間平均値を用いるものとして、その分布を近似的に正規分布（ただし、 $k$  の変域  $[0, 0.15]$  で正規化したもの）とし、その形を決定するために必要な分散は、式 (15) の値を 30 (=60 秒  $\times$  5/10 秒) で除した値を採用する。計測誤差についても経過時間が長いことを考え正規分布で近似する。また、 $L$  の探索間隔は 20 m とする。

計算の結果、 $\bar{k}=53.51, 11.36, 4.79$  に対応して、それぞれ  $L=440$  m, 1120 m, 1820 m として決定された。

$\alpha=0.1, \beta=0.1$  を交通制御上要求される交通密度情報の精度の限界を規定する値とすれば、計測区間長を上

のような値にとった場合においても、計測開始後4時間の時点で、交通密度値を正しい値にリセットする必要があるといえるわけであるが、そのリセットすべき真値をいかにしてみつけるかは、はなはだ難しい問題といわなければなるまい（もちろん、同様のことは交通密度計測開始時点の初期台数を与える場合にもいえる）。

もし、計測開始後24時間経過した時点における交通密度値に対して、所与の精度を保証するように  $L$  を決定しておいた場合には、安定的と思われる深夜の値として、別途あらかじめ観測しておいた値を毎日リセットする方法もあるが、そのときの  $L$  の値はかなり大きくなるのが予想されるので、新たに別の問題を惹起する可能性がある。

#### 4. む す び

本研究では、まず空間オキュパンシーの基本特性として、その確率密度、平均値および分散を理論的に導いた。このうち平均値は従来から使われているものと一致したが、分散については、車長の分散と交通密度の分散の加重和として表現できることを新たに示した。

また、得られた空間オキュパンシーの特性を利用して、その計測区間長の適正な値を決める一つの方法についても言及したが、計算例によれば計測区間長が250 m前後となると、その計測値を用いてかなり長い道路区間の空間オキュパンシーの値を、高い精度で推定できることがわかった。

交通密度の計測誤差についても、その基本特性として、生起確率、平均値および分散について検討した。その結果、交通密度計測区間の上下流端における交通量の計測精度が同一ならば、平均値は常に0となるが、分散は時間の経過とともに大きくなってゆくことが判明した。したがって、交通密度を交通量を介して計測すると

いう方法をとる限り、一定時間ごとに正しい値にリセットしないと、所与の精度を保持できないことが結論づけられた。

一方、計測誤差の分散は区間長に対して逆比例的関係にあるが、この性質を考慮して、計測開始後一定時間経過した時点における交通密度の精度を一定水準に保つのに必要な最小限の区間長を決定する方法について述べた。計測開始後4時間を対象とした試算では、平均交通密度がある程度大きい場合、約450 mという値が得られた。しかしながら、このような計測区間長を探っても、やはり4時間後には真値をリセットすることが必要となってくるので、そのリセットの方法をみつけることが至難であることを考慮すると、交通流を自動的に監視制御するシステムにおいては、交通密度を交通情報とすることは、限定的かつ補助的にしかできないといえよう。

#### 参 考 文 献

- 1) 奥谷 巖・佐藤武久：交通量、交通密度とオキュパンシーの分布の相互関係について、昭和49年度土木学会中部支部研究発表会講演概要集、昭和50年1月。
- 2) 高速道路調査会交通工学研究部会：高速道路の交通流監視制御装置に関する研究報告書、昭和46年2月。
- 3) 鍋島泰雄：交通密度を表わすための計測区間長と単位時間の関係について、土木学会第29回年次講演会講演概要集、pp. 95~96、昭和49年10月。
- 4) 高速道路調査会交通工学研究部会：高速道路の交通流監視制御装置に関する研究報告書、昭和45年3月。
- 5) 奥谷 巖：交通情報の特性に関する2, 3の考察、第29回土木学会年次学術講演会講演集、昭和49年10月。
- 6) 奥谷 巖：交通量と時間オキュパンシーの特性に関する確率論的考察、土木学会論文報告集、第210号、pp. 47~55、1973-2。
- 7) 高速道路調査会交通工学研究部会：高速道路の交通流監視制御装置に関する研究報告書、昭和44年3月。

(1975.7.19・受付)