

単一走行車両による道路橋の非定常ランダム応答の解析

NON-STATIONARY RANDOM RESPONSE OF HIGHWAY
BRIDGES UNDER A SINGLE MOVING LOAD

吉村 虎蔵*・彦坂 熙**・内谷 保***

By Torazo YOSHIMURA, Hiroshi HIKOSAKA and Tamotsu UCHITANI

1. ま え が き

走行車両による橋梁の動的応答については、古くから多くの理論的実験的研究が行われてきたが、近年、確率論的手法による道路橋の衝撃係数^{1)~3)}、疲労強度⁴⁾、および歩行者の振動感覚^{5)~8)}などに関する研究が多く発表されている。車両を鉛直振動のみを行う 1 自由度もしくは多自由度の sprung mass にモデル化し、橋梁の動的応答をランダム過程として扱うとき、車両が移動するために橋梁の振動は非定常ランダム過程となり、橋梁上の車両の振動もまた非定常である。これは車両と橋梁の連成非定常ランダム振動の問題となり、一般に解析が困難なため、最も簡単な単一走行車両の場合ですら従来その解（たとえば応答の 2 乗平均値など）が求められておらず、連成を無視した近似解またはシミュレーション法による応答のサンプル関数を得るにとどまっている。

車両と橋梁の連成を無視する場合には、車両が橋面に与える外力（接地力）を一般路面上における外力と同じく定常ランダム過程として与え、橋梁の応答にのみ非定常性を考慮することになる。この解析モデルを単一走行車両の場合に適用した著者らの研究⁹⁾によれば、車両と橋梁の固有振動数比が 1 に近いとき橋梁の応答が過度に大きくなる反面、車両の振動数比をわずかに変えるだけで橋梁の応答が急激に小さくなり、文献 8) で小堀らも同様の指摘を行っている。また車両と橋梁の減衰の影響が橋梁の応答に非常に大きく現われてくるほか、車両の接地力をホワイトノイズとして解析した L. Fryba¹⁰⁾の算例では、車両の走行速度が遅いほど橋梁のたわみ応答が大きくなり、走行速度が 0 のときに応答の 2 乗平均値が最大になるという結果がえられている。このように、車両と橋梁の連成を無視した解析モデルは、既往の多く

の実測データとあわない非現実的な解析結果を与えることがある。

これに対し、シミュレーション法による場合には、車両と橋梁の連成振動の微分方程式を、たとえば Runge-Kutta-Gill 法のような数値積分法により解くことができるので、解析モデルに関する上記難点は解消するが、非定常ランダム振動であるから応答の 2 乗平均値を得るには数多くのサンプル関数を計算してアンサンブル平均を求める必要があり、パラメーターの多い本題の応答解析においては必ずしも適当な手法と言い難い面がある。

本研究は、以上の観点から、道路橋の動的応答において基本となる 1 台の大型車が走行する場合について、これを車両と橋梁の連成非定常ランダム振動の問題として扱い、ランダム過程のサンプル関数の時間領域でのフーリエ級数展開を利用して、任意時刻の応答の非定常 2 乗平均値を求める手法を提示したものである。本論文における数値解析例はスパン 20~50 m の単純合成桁道路橋を対象としたが、モーダルアナリシスを用いているので、固有振動数と振動モードが与えられれば、本法は単純桁橋以外の種々の形式の橋梁にも適用できる。

解析にあたっては次の事項を仮定する。

- (1) 路面の不規則凹凸は平均値が 0 の定常確率ガウス過程とする。
- (2) 車両が橋梁に到着した時点時間を時間 t の原点とし、 $t=0$ において橋梁は静止しているものとする。
- (3) 車両が橋梁に進入する際に伸縮装置などから受ける衝撃効果は、車両ばね上質量の鉛直振動の $t=0$ における初期条件に含ませる。この初期条件は本来確率量であるが、本論では簡単のため確定量として与えるものとする。

2. 路面凹凸のパワースペクトル密度とサンプル関数

路面凹凸の特性については、従来種々の表示方法が採

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 九州大学助手 工学部土木工学科

られているが、走行車両の振動との関連で最適と思われるのは、路面を平均値0の定常ランダム過程と見なしてパワースペクトル密度で表わす方法である。すなわち、路面凹凸を路面長 x の定常ランダム関数 $d(x)$ で表わせば、 $d(x)$ と $d(x+u)$ の間の自己相関関数 $R_d(u)$ が次式で求められる。

$$R_d(u) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X d(x)d(x+u)dx \quad \dots(1)$$

さらに路面周波数（路面単位長当りの凹凸波数）を Ω とおけば、 $d(x)$ のパワースペクトル密度関数 $\bar{S}_d(\Omega)$ が次式より算定される。

$$\bar{S}_d(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_d(u)e^{-i2\pi\Omega u}du \quad \dots(2)$$

上式の i は虚数単位である。従来から、式 (1), (2) を用いて解析された飛行場の滑走路^{11),12)}、高速道路¹³⁾、一般道路^{14),24)} および自動車メーカーのテストコース¹⁵⁾ などのパワースペクトル密度が報告されており、その結果から、式 (2) の $\bar{S}_d(\Omega)$ は車両の振動に影響を及ぼす Ω の範囲内において、おおむね次式で表わされることが知られている。

$$\bar{S}_d(\Omega) = a/\Omega^2 \quad \dots(3)$$

ただし、 a は路面の良否により異なる定数である。

川合・森崎¹³⁾は、周波数応答関数が既知の測定車がパワースペクトル密度未知の路面を走行するときの鉛直加速度のパワースペクトル密度を算定することにより、入力としての路面凹凸のパワースペクトル密度を推定するという方法を用いて、名神高速道路の $\bar{S}_d(\Omega)$ を報告している。その結果によれば、式 (3) の a および $\bar{S}_d(\Omega)$ をそれぞれ cycle/m および $\text{cm}^2/(\text{cycle}/\text{m})$ の単位で表わすとき、 $a=5 \times 10^{-5} \sim 6 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{m}$ 程度の値がえられているが、本論の数値解析においては少し大きめの $a=10^{-3} \text{cm}^2/\text{m}$ を標準値として採用する。

なお、 Ω の代わりに $\omega=2\pi\Omega$ の関数として表わした路面凹凸のパワースペクトル密度をあらためて $S_d(\omega)$ とおくことにする。すなわち、

$$S_d(\omega) = 4\pi^2 a/\omega^2 \quad \dots(4)$$

さて、パワースペクトル密度関数 $S_d(\omega)$ が既知のとき、 $d(x)$ を平均値0の定常確率ガウス過程と仮定すれば、 $d(x)$ のサンプル関数が近似的に次式で表わされる。

$$d(x) = \sum_{k=1}^N (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x) \quad \dots(5)$$

ここに N は十分に大きな正の整数とし、 $a_k (k=1, 2, \dots, N)$ は互いに独立で平均値0、標準偏差 σ_k のガウス確率変数、 $b_k (k=1, 2, \dots, N)$ も互いに独立で平均値0、標準偏差 σ_k のガウス確率変数、さらに b_k は a_k に独立とする。 σ_k は次のように与えられる。すなわち、 $d(x)$ のパワースペクトル密度 $S_d(\omega)$ の正の ω 領域に

おいて、 ω 軸上の上限値 $\omega_u=2\pi\Omega_u$ と下限値 $\omega_l=2\pi\Omega_l$ を用いて $d\omega=(\omega_u-\omega_l)/N$ 、 $\omega_k=\omega_l+(k-1/2)d\omega$ とするとき、

$$\sigma_k^2 = S_d(\omega_k) d\omega/\pi \quad \dots(6)$$

$N \rightarrow \infty$ のとき式 (5) の $d(x)$ のパワースペクトル密度関数が $S_d(\omega)$ に収束することは容易に証明される¹⁶⁾。なお、シミュレーション法により橋梁の走行荷重応答を数値計算するときには、式 (5) の $2N$ 個の正規乱数 a_k, b_k を作り出さねばならないが、本論の手法においては、のちに4. で示すように a_k, b_k の値は不要である。

3. 車両-橋梁系の運動方程式

図-1 のように $x=0, l$ を両端支点とする橋梁の n 次の固有振動モードを $\varphi_n(x)$ とし、時間関数 $Q_n(t)$ を基準座標にとれば、橋梁の動たわみ $Y(x, t)$ が次式で表わされる。

$$Y(x, t) = \sum_n \varphi_n(x) Q_n(t) \quad \dots(7)$$

一般に上式の級数の収束は非常に早いので、限られた低次の振動モードのみを用いればよいことは周知のとおりである。橋梁の単位長当りの質量を ρ 、 n 次の固有円振動数を ω_n 、減衰定数を h_n とし、一定速度 v で走行する車両の $x=vt$ における全接地力を $P(t)$ とすれば、 $Q_n(t)$ の微分方程式が次式で与えられる。

$$\ddot{Q}_n + 2h_n\omega_n\dot{Q}_n + \omega_n^2 Q_n = \frac{1}{M_n} \varphi_n(vt) P(t) \quad \dots(8)$$

ここに、

$$M_n = \int_0^l \rho \varphi_n^2(x) dx$$

他方、車両をばね上質量 M_0 、ばね下質量 M_u 、ばね定数 k_0 および粘性減衰係数 C_0 からなる振動系にモデル化し（図-1）、 M_0 の鉛直変位を $Z(t)$ とすれば、ばね下質量 M_u の変位は $x=vt$ における橋のたわみ $Y_v = Y(vt, t)$ と路面凹凸量 $d(vt)$ の和で与えられるので M_0 の運動方程式が次式で表わされる。

$$M_0 \ddot{Z} + C_0 \{\dot{Z} - \dot{Y}_v - \dot{d}(vt)\} + k_0 \{Z - Y_v - d(vt)\} = 0 \quad \dots(9)$$

一般に M_0 に比して M_u の影響は小さいと考えられるので以下においては M_u を無視し、車両の総重量を P_0 、接地力を $P(t) = P_0(1 - \ddot{Z}/g)$ (g は重力の加速度)、

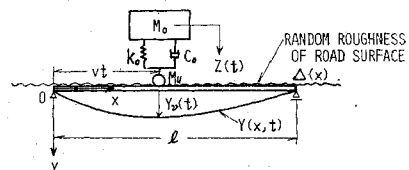


図-1 車両-橋梁系の解析モデル

固有円振動数を $\omega_0 = \sqrt{k_0/M_0}$ 、減衰定数を $h_0 = C_0/(2\sqrt{k_0 M_0})$ と表わせば、式 (8)、(9) がそれぞれ次のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{Q}_n + 2h_n\omega_n\dot{Q}_n + \omega_n^2 Q_n &= \frac{P_0}{M_n} \varphi_n(vt) (1 - \ddot{Z}/g) \\ \ddot{Z} + 2h_0\omega_0\dot{Z} + \omega_0^2 Z &= 2h_0\omega_0\dot{Y}_v + \omega_0^2 Y_v + F(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ここに、

$$F(t) = 2h_0\omega_0\dot{d}(vt) + \omega_0^2 d(vt) \dots\dots\dots(11)$$

なお、仮定により $Q_n(t)$ および $Z(t)$ の初期条件は次のように確定量と与えられているものとする。

$$Q_n(0) = \dot{Q}_n(0) = 0, Z(0) = z_0, \dot{Z}(0) = \dot{z}_0 \dots\dots(12)$$

いま、式 (10) および (12) を満足する非定常ランダム過程 $Q_n(t)$ 、 $Z(t)$ の任意時刻 t における平均値 $\bar{q}_n(t)$ 、 $\bar{z}(t)$ を次式で定義する。

$$\bar{q}_n(t) = E[Q_n(t)], \bar{z}(t) = E[Z(t)] \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 $E[]$ は $[]$ 内のランダム過程またはランダム変数の期待値を表わす記号である。

平均値からの $Q_n(t)$ 、 $Z(t)$ の偏差を $q_n(t)$ 、 $z(t)$ とすれば、 $Q_n(t)$ および $Z(t)$ はそれぞれ

$$Q_n(t) = \bar{q}_n(t) + q_n(t), Z(t) = \bar{z}(t) + z(t) \dots\dots\dots(14)$$

と表わされ、さらに次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} Y(x, t) &= \bar{y}(x, t) + y(x, t) \\ Y_v(t) &= \bar{y}_v(t) + y_v(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}(x, t) &= \sum_n \varphi_n(x) \bar{q}_n(t) \\ y(x, t) &= \sum_n \varphi_n(x) q_n(t) \\ \bar{y}_v(t) &= \bar{y}(vt, t) \\ y_v(t) &= y(vt, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

式 (10) の両辺の各項の期待値をとれば、仮定により $E[d(vt)] = 0$ 、 $E[\dot{d}(vt)] = 0$ であるから、平均値 $\bar{q}_n(t)$ 、 $\bar{z}(t)$ が満足すべき次の微分方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{q}}_n + 2h_n\omega_n\dot{\bar{q}}_n + \omega_n^2 \bar{q}_n &= \frac{P_0}{M_n} \varphi_n(vt) (1 - \ddot{\bar{z}}/g) \\ \ddot{\bar{z}} + 2h_0\omega_0\dot{\bar{z}} + \omega_0^2 \bar{z} &= 2h_0\omega_0\dot{\bar{y}}_v + \omega_0^2 \bar{y}_v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

上式は路面の凹凸を考えない場合の車両-橋梁系の運動方程式にほかならず、平均値 $\bar{y}(x, t)$ 、 $\bar{z}(t)$ はそれぞれ路面が完全に滑らかな場合の橋梁と車両の動的応答を表わすことになる。 $t=0$ における初期条件 $\bar{q}_n(0) = \dot{\bar{q}}_n(0) = 0$ 、 $\bar{z}(0) = z_0$ 、 $\dot{\bar{z}}(0) = \dot{z}_0$ を満足する式 (17) の解を求めることは、すでに多くの研究^{17)~19)} が行われているので本論では省略する。

さて、式 (14) の $Q_n(t)$ 、 $Z(t)$ は式 (10) を満足し、また $\bar{q}_n(t)$ 、 $\bar{z}(t)$ は式 (17) を満足するゆえ、偏差 $q_n(t)$ および $z(t)$ に関する微分方程式は次式与えられ

ることになる。

$$\ddot{q}_n + 2h_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{P_0}{M_n g} \varphi_n(vt) \ddot{z} \dots\dots\dots(18\cdot a)$$

$$\ddot{z} + 2h_0\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = 2h_0\omega_0\dot{y}_v + \omega_0^2 y_v + F(t) \dots\dots\dots(18\cdot b)$$

式 (12) で確定量として与えられた初期条件はそのままで式 (17) の平均値 $\bar{q}_n(t)$ 、 $\bar{z}(t)$ の初期条件となるゆえ、 $q_n(t)$ および $z(t)$ の初期条件は

$$q_n(0) = \dot{q}_n(0) = 0, z(0) = \dot{z}(0) = 0 \dots\dots\dots(19)$$

で与えられ、また $q_n(t)$ および $z(t)$ の期待値は明らかに

$$E[q_n(t)] = 0, E[z(t)] = 0$$

となる。路面凹凸のサンプル関数がたとえ式 (5) のように与えられれば、式 (19) の初期条件を満足する式 (18) の解 $q_n(t)$ および $z(t)$ のサンプル関数が数値積分により容易に求められる。しかしながら、 $q_n(t)$ および $z(t)$ は非定常ランダム過程であるから、その 2 乗平均値を求めるのに時間平均を用いることはできず、数多くのサンプル関数を計算してアンサンブル平均を行わなければならない。そこで、次節においてフーリエ級数を利用して非定常 2 乗平均値を求める一手法を示すことにする。

4. 非定常ランダム応答の 2 乗平均値の算定

車両の走行速度を v とすれば、橋長 l を通過するに要する時間 t_0 は

$$t_0 = l/v$$

となる。そこで、式 (18) の $q_n(t)$ 、 $y_v(t)$ 、 $F(t)$ などのサンプル関数を $0 \leq t \leq t_0$ において定義された連続関数と考え、次のようなフーリエ正弦級数展開を行うものとする。

$$2h_0\omega_0\dot{y}_v + \omega_0^2 y_v = \sum_m A_m \sin \alpha_m t \dots\dots\dots(20)$$

$$F(t) = \sum_m B_m \sin \alpha_m t \dots\dots\dots(21)$$

ここに、

$$\alpha_m = m\pi/t_0, A_m \text{ は未定係数,}$$

$$B_m = \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} F(t) \sin \alpha_m t dt \dots\dots\dots(22)$$

式 (5) のサンプル関数を利用し、式 (19) の初期条件を考慮して上式の B_m を求めれば次の結果をうる。

$$B_m = 2 \sum_{k=1}^N \left[\frac{m\pi}{(m\pi)^2 - (\omega_k l)^2} \cdot \{c_k (1 - (-1)^m \cos \omega_k l) - (-1)^m d_k \sin \omega_k l\} - \frac{\omega_0^2}{m\pi} a_k \{1 - (-1)^m\} \right] \dots\dots\dots(23)$$

ここに、

$$c_k = \omega_0^2 a_k + 2 h_0 \omega_0 \omega_k v b_k$$

$$d_k = \omega_0^2 b_k - 2 h_0 \omega_0 \omega_k v a_k$$

a_k, b_k が確率変数であるから B_m も確率変数となる。
式 (21) のフーリエ級数の M 項までをとるものとし、
 M 個の確率変数 B_m ($m=1, 2, \dots, M$) の列ベクトル
を $\{B_m\}$ とすれば、その共分散行列が次式で表わされ
る。

$$E[\{B_m\} \{B_m\}^T] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1M} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{M1} & B_{M2} & \dots & B_{MM} \end{bmatrix} \dots (24)$$

ここに、

$$B_{ij} = B_{ji} = E[B_i B_j] \dots (25)$$

式 (25) に (23) を代入し、2. で述べた a_k, b_k に関
する仮定および式 (6) より $E[a_k] = E[b_k] = E[a_k b_k] =$
 $E[a_k a_n] = E[b_k b_n] = 0$ ($k \neq n$), $E[a_k^2] = E[b_k^2] = \sigma_k^2 =$
 $S_d(\omega_k) \Delta\omega/\pi$ なることを考慮しつつ $N \rightarrow \infty$ とすれば、上
の共分散行列の i 行 j 列要素 B_{ij} が次のように表わさ
れる。

a) $i+j$ が偶数のとき

$$B_{ij} = 8 \pi \int_0^\infty \left[\frac{ij \{1 - (-1)^i \cos \omega l\}}{\{(i\pi)^2 - (\omega l)^2\} \{(j\pi)^2 - (\omega l)^2\}} \right. \\ \left. \cdot (\omega_0^4 + 4 h_0^2 \omega_0^2 v^2 \omega^2) + \frac{\{1 - (-1)^i\}}{ij\pi^4} \omega_0^4 \right] \\ \cdot S_d(\omega) d\omega \dots (26 \cdot a)$$

b) i が偶数, j が奇数のとき

$$B_{ij} = -\frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{i}{\{(i\pi)^2 - (\omega l)^2\} j} \\ \cdot \{\omega_0^4 (1 - \cos \omega l) + 2 h_0 \omega_0^2 v \omega \sin \omega l\} \\ \cdot S_d(\omega) d\omega \dots (26 \cdot b)$$

c) i が奇数, j が偶数のときは上式の i と j を入
れ換えればよい。

式 (26) の被積分関数は $\omega l = i\pi$ または $\omega l = j\pi$ のと
きに有限値をとり、また ω が大きくなれば急速に 0
に収束するので容易に数値積分することができる。

さて、式 (20), (21) を (18 \cdot b) に代入すれば次式を
うる。

$$\ddot{z} + 2 h_0 \omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = \sum_m (A_m + B_m) \sin \alpha_m t$$

初期条件 $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ を満足する上式の解は、
Duhamel 積分により次のように表わされる。

$$z(t) = \sum_m \left\{ (A_m + B_m) \frac{1}{\omega_0'} \int_0^t e^{-h_0 \omega_0 (t-\tau)} \sin \omega_0' \right. \\ \left. \cdot (t-\tau) \sin \alpha_m \tau d\tau \right\} = \sum_m (A_m + B_m) \lambda_m(t) \\ \dots (27)$$

ここに、

$$\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - h_0^2}$$

$$\lambda_m(t) = -\bar{K}_{m1} \cos \alpha_m t - \bar{K}_{m2} \sin \alpha_m t + e^{-h_0 \omega_0 t}$$

$$\cdot (\bar{K}_{m1} \cos \omega_0' t + \bar{K}_{m3} \sin \omega_0' t)$$

$$\bar{K}_{m1} = \frac{2 \alpha_m h_0 \omega_0}{(\alpha_m^2 - \omega_0^2)^2 + (2 \alpha_m h_0 \omega_0)^2},$$

$$\bar{K}_{m2} = \frac{\alpha_m^2 - \omega_0^2}{(\alpha_m^2 - \omega_0^2)^2 + (2 \alpha_m h_0 \omega_0)^2},$$

$$\bar{K}_{m3} = \frac{\alpha_m (\alpha_m^2 - \omega_0^2 + 2 h_0^2 \omega_0^2)}{\omega_0' \{(\alpha_m^2 - \omega_0^2)^2 + (2 \alpha_m h_0 \omega_0)^2\}}$$

式 (27) を t で 2 回微分して式 (18 \cdot a) に代入すれば
次式をうる。

$$\ddot{q}_n + 2 h_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{P_0}{M_n g} \\ \cdot \varphi_n(vt) \sum_m (A_m + B_m) \dot{\lambda}_m(t) \dots (28)$$

ここに、

$$\dot{\lambda}_m(t) = K_{m1} \cos \alpha_m t + K_{m2} \sin \alpha_m t + e^{-h_0 \omega_0 t}$$

$$\cdot (K_{m3} \sin \omega_0' t - K_{m1} \cos \omega_0' t)$$

$$K_{m1} = \alpha_m^2 \bar{K}_{m1}, K_{m2} = \alpha_m^2 \bar{K}_{m2},$$

$$K_{m3} = \frac{\alpha_m \{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \alpha_m^2) + 2 h_0^2 \omega_0^2 \alpha_m^2\}}{\omega_0' \{(\alpha_m^2 - \omega_0^2)^2 + (2 \alpha_m h_0 \omega_0)^2\}}$$

初期条件 $q_n(0) = \dot{q}_n(0) = 0$ を満足する式 (28) の解
は、Duhamel 積分により次のように表わされる。

$$q_n(t) = -\frac{P_0}{M_n g} \sum_m (A_m + B_m) \mu_{nm}(t) \dots (29)$$

ここに、

$$\mu_{nm}(t) = \frac{1}{\omega_n'} \int_0^t e^{-h_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n' (t-\tau) \\ \cdot \varphi_n(v\tau) \dot{\lambda}_m(\tau) d\tau \dots (30)$$

$$\omega_n' = \omega_n \sqrt{1 - h_n^2}$$

単純桁橋や単純トラス橋のように、固有振動モードが
1 つの正弦曲線 $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x/l)$ で表わされる場合
の $\mu_{nm}(t)$ の計算結果を付録に示した。単純橋以外の
連続桁橋²⁰⁾ や各種の補剛アーチ橋^{21), 22)} の固有振動モ
ードも一般的に正弦級数で表わされるので、本法をそれら
の橋梁の応答解析に容易に拡張適用できる。

式 (29) の $q_n(t)$ を用いれば橋梁のたわみ $y(x, t)$
が式 (16) より次のように表わされる。

$$y(x, t) = \sum_n \varphi_n(x) q_n(t) \\ = -\frac{P_0}{g} \sum_m (A_m + B_m) r_m(x, t) \dots (31)$$

ここに、

$$r_m(x, t) = \sum_n \frac{1}{M_n} \varphi_n(x) \mu_{nm}(t) \dots (32)$$

未定係数 A_m は、以下のように決定される。まず式
(31) において $x=vt$ とすれば次式をうる。

$$y_v(t) = y(vt, t) = -\frac{P_0}{g} \sum_m (A_m + B_m) r_m(vt, t) \\ \dots (33)$$

また、式 (20) のフーリエ級数の第 k 項の展開係数
 A_k は次のように求められる。

$$A_k = \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} (2h_0\omega_0\dot{y}_v + \omega_0^2 y_v) \sin \alpha_k t dt \quad \dots (34)$$

ただし、 $\alpha_k = k\pi/t_0$

上式を部分積分のうえ式 (33) を代入して整理すれば次の結果をうる。

$$A_k = -\sum_m C_{km} (A_m + B_m) \quad \dots (35)$$

ここに、

$$C_{km} = \frac{P_0}{g} \cdot \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} (\omega_0^2 \sin \alpha_k t - 2h_0\omega_0\alpha_k \cos \alpha_k t) \cdot r_m(vt, t) dt \quad \dots (36)$$

式 (35) は未定係数 $A_m (m=1, 2, \dots, M)$ に関する次の連立一次方程式に書き換えられる。

$$[C_{km} + \delta_{km}] \{A_m\} = -[C_{km}] \{B_m\} \quad \dots (37)$$

上式の $\{ \}$ は列ベクトル、 $[C_{km}]$ は C_{km} を k 行 m 列要素とする正方行列、また δ_{km} は次の性質をもつ Kronecker のデルタ記号である。

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1; & k=m \\ 0; & k \neq m \end{cases}$$

式 (37) を解いて次式がえられる。

$$\{A_m\} = -[C_{km} + \delta_{km}]^{-1} [C_{km}] \{B_m\} \quad \dots (38 \cdot a)$$

$$\{A_m + B_m\} = [D_{km}] \{B_m\} \quad \dots (38 \cdot b)$$

ここに $[D_{km}] = \mathbf{I} - [C_{km} + \delta_{km}]^{-1} [C_{km}]$ 、 \mathbf{I} は単位行列。

式 (38 \cdot b) を (31) に代入すれば次式がえられる。

$$\begin{aligned} y(x, t) &= -\frac{P_0}{g} \{A_m + B_m\}^T \{r_m(x, t)\} \\ &= -\frac{P_0}{g} \{B_m\}^T [D_{km}]^T \{r_m(x, t)\} \quad \dots (39) \end{aligned}$$

ここに、 $\{r_m(x, t)\}$ は式 (32) の $r_m(x, t) (m=1, 2, \dots, M)$ の列ベクトルである。

式 (39) を用いて、 $y(x, t)$ の 2 乗平均値すなわち $Y(x, t)$ の分散が次のように求められる。

$$\begin{aligned} E[y^2(x, t)] &= \left(\frac{P_0}{g}\right)^2 E[\{r_m(x, t)\}^T [D_{km}] \{B_m\} \\ &\quad \cdot \{B_m\}^T [D_{km}]^T \{r_m(x, t)\}] \\ &= \left(\frac{P_0}{g}\right)^2 \{r_m(x, t)\}^T [D_{km}] E[\{B_m\} \\ &\quad \{B_m\}^T] [D_{km}]^T \{r_m(x, t)\} \quad \dots (40) \end{aligned}$$

上式中の期待値 $E[\{B_m\} \{B_m\}^T]$ は式 (24) の共分散行列にはかならず、その i 行 j 列要素 B_{ij} が式 (26) により与えられる。

橋梁の速度応答 $\dot{y}(x, t)$ の 2 乗平均値すなわち $\dot{Y}(x, t)$ の分散も同様にして

$$\begin{aligned} E[\dot{y}^2(x, t)] &= \left(\frac{P_0}{g}\right)^2 \{\dot{r}_m(x, t)\}^T [D_{km}] \\ &\quad \cdot E[\{B_m\} \{B_m\}^T] [D_{km}]^T \{\dot{r}_m(x, t)\} \quad \dots (41) \end{aligned}$$

より求められ、 $\dot{r}_m(x, t)$ を $\ddot{r}_m(x, t)$ と置き換えれば

加速度応答 $\ddot{y}(x, t)$ の 2 乗平均値がえられる。

なお、周知のとおり橋梁のような減衰の小さい構造物においては、 $n \neq i$ に対するランダム過程 $q_n(t)$ と $q_i(t)$ は互いにほぼ独立と考えてよく、 $n \neq i$ の場合の期待値 $E[q_n(t)q_i(t)]$ はほとんど 0 になる。したがって $y(x, t)$ および $\dot{y}(x, t)$ の 2 乗平均値が次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} E[y^2(x, t)] &= \sum_n \varphi_n^2(x) E[q_n^2(t)] \\ E[\dot{y}^2(x, t)] &= \sum_n \varphi_n^2(x) E[\dot{q}_n^2(t)] \end{aligned} \right\} \quad \dots (42)$$

すなわち、 n の各項ごとに $\varphi_n(x)q_n(t)$ および $\varphi_n(x)\dot{q}_n(t)$ の 2 乗平均値を求めて代数和をとればよく、この場合、式 (42) は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} E[y^2(x, t)] &= \left(\frac{P_0}{g}\right)^2 \sum_n \left(\frac{1}{M_n} \varphi_n(x)\right)^2 \{\mu_{nm}(t)\}^T \\ &\quad \cdot [D_{km}] E[\{B_m\} \{B_m\}^T] [D_{km}]^T \\ &\quad \cdot \{\mu_{nm}(t)\} \\ E[\dot{y}^2(x, t)] &= \left(\frac{P_0}{g}\right)^2 \sum_n \left(\frac{1}{M_n} \varphi_n(x)\right)^2 \{\dot{\mu}_{nm}(t)\}^T \\ &\quad \cdot [D_{km}] E[\{B_m\} \{B_m\}^T] [D_{km}]^T \\ &\quad \cdot \{\dot{\mu}_{nm}(t)\} \end{aligned} \right\} \quad \dots (43)$$

ただし、 $\{\mu_{nm}(t)\}$ は $\mu_{nm}(t) (m=1, 2, \dots, M)$ の列ベクトルである。

最後に、任意時刻 t における非定常ランダム応答 $Y(x, t)$ および $\dot{Y}(x, t)$ の真の 2 乗平均値が次式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} E[Y^2(x, t)] &= \bar{y}^2(x, t) + E[y^2(x, t)] \\ E[\dot{Y}^2(x, t)] &= \dot{\bar{y}}^2(x, t) + E[\dot{y}^2(x, t)] \end{aligned} \right\} \quad \dots (44)$$

従来の研究⁹⁾によれば、橋梁上の歩行者の振動感覚を評価する場合には、上式の $E[\dot{Y}^2(x, t)]$ の平方根を振動刺激として考えればよいとされている。橋梁上を走行する車両の主たる加振源は、橋梁への進入時に伸縮装置などから受ける衝撃および路面の凹凸と考えられ、本論では前者の効果が上式の $\dot{\bar{y}}^2(x, t)$ に、また後者の効果が $E[\dot{y}^2(x, t)]$ に含まれる。しかるに、前者は車両進入直後の橋梁の振動に大きな影響を及ぼすが、車両の進行につれて後者の影響が卓越し、近似的に次式が成立すると考えてよい。

$$E[\dot{Y}^2(x, t)] \cong E[\dot{y}^2(x, t)] \quad \dots (45)$$

これに関する具体例は、次節の数値計算により示すことにする。

5. 数値計算および考察

表一の諸元および固有振動数をもつ 2 車線の単純合成桁道路橋²⁾を対象として、1 台の車両が走行する場合

表一 2車線単純合成桁橋の諸元

スパン長 l (m)	単位重量 ρg (ton/m)	総重量 W (ton)	曲げ剛性 EI (kg·cm ³)	静的最大たわみ $P_0^3/48EI$ (mm)	1次固有振動数 $f_1 = \omega_1/2\pi$ (Hz)
20	4.84	96.8	1.242×10 ¹³	1.83	6.23
30	5.17	155.2	2.484×10 ¹³	3.08	3.79
40	5.34	213.6	4.882×10 ¹³	3.71	2.94
50	5.44	272.0	8.440×10 ¹³	4.20	2.45

($P_0=13.6$ ton)

表二 標準車両のパラメータ

重量 P_0 (ton)	13.6
固有振動数 f_0 (Hz)	2.45
減衰定数 h_0	0.03
走行速度 v (m/sec)	12

のスパン中央点 $x=l/2$ におけるたわみおよび速度応答の数値解析を行った。小堀・梶川⁶⁾が指摘しているように、1台の走行車両による橋梁の動的応答は、歩行者の振動感覚を考慮するのに最も基本的な問題となるものである。

説明の便宜上、次の記号を用いることにする。

$\sigma_{\dot{y}}(t) : x=l/2$ における速度応答の分散 $E[\dot{y}^2(x, t)]$ の平方根, 単位 cm/sec.

$\Psi_{\dot{y}}(t) : x=l/2$ における速度応答の真の2乗平均値 $E[\dot{Y}^2(x, t)]$ の平方根, 単位 cm/sec.

橋梁の減衰定数は $h_u=0.01$ を標準値として用い、また車両の総重量 P_0 、固有振動数 $f_0=\omega_0/2\pi$ 、減衰定数 h_0 、走行速度 v は表二の値を標準値としたが、これらの値をパラメータとして種々変化させ、応答への影響を調べた。 $t=0$ における車両振動の初期条件は $z_0=0.2P_0/k_0$ 、 $\dot{z}_0=0$ 、すなわち車両ばねの静的変位の0.2倍の初期変位を与える場合のみを考えた。

単純桁橋のスパン中央点のたわみおよび速度応答に注目する限り、本論のようなモーダルアナリシスにおける固有振動モードは1次振動のそれのみを用いれば十分である。他方、式(20)、(21)で用いるフーリエ級数の必要項数は、橋長 l 、車両の走行速度 v 、路面の凹凸状況、その他多くのパラメータにより異なり、また速度応答の計算にはたわみ応答より多くの項数を必要とする。ここに示す範囲の単純桁橋を対象とする数値計算例においては、いずれも20項以下では不十分であったが、最も多い場合でも40項までとれば十分に収束した値がえられた。

(1) 路面凹凸のパワースペクトル密度関数の決定

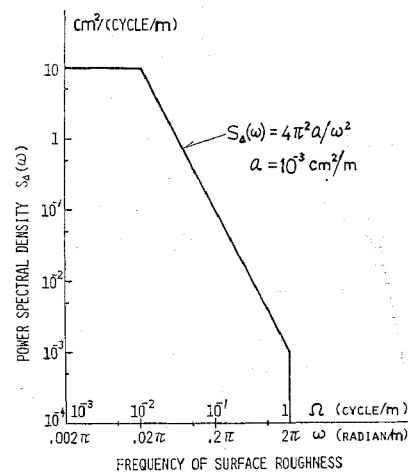
式(3)から明らかなように、路面周波数 Ω が大きくなれば路面凹凸のパワースペクトル密度 $\bar{S}_d(\Omega)$ の値は急速に減少し、またある上限値 Ω_u を越える周波数成分は車両-橋梁系の振動にほとんど影響を及ぼさないと考えられる。他方、 $\Omega \rightarrow 0$ のとき式(3)より $\bar{S}_d(\Omega) \rightarrow \infty$ となるが、ある値 Ω_c 以下の路面周波数は、 $\bar{S}_d(\Omega)$ の値がいくら大きくても本题の応答解析には影響しないと考えてよい。そこで、式(26)より共分散行列 $E\{B_m\} \{B_m\}^T$ の要素 B_{ij} を算定するに際

して、同式中の $S_d(\omega)$ を次のように定義する。

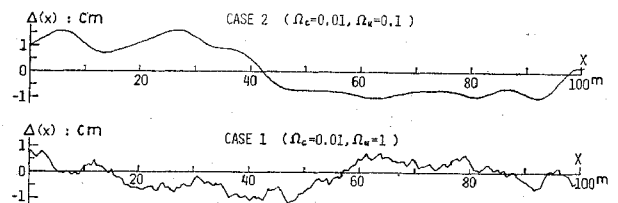
$$S_d(\omega) = \begin{cases} S_0 \text{ (定数)} & ; |\omega| < 2\pi\Omega_c \\ 4\pi^2 a/\omega^2 & ; 2\pi\Omega_c \leq |\omega| \leq 2\pi\Omega_u \\ 0 & ; |\omega| > 2\pi\Omega_u \end{cases}$$

いま、 $\Omega_c=0.01$ cycle/m、 $\Omega_u=1$ cycle/m、 $a=10^{-3}$ cm²/m、 $S_0=a/\Omega_c^2$ とし、 ω の正領域について上式の $S_d(\omega)$ を両対数目盛でプロットすれば図二をうる。

図三は、 $S_d(\omega)$ が図二で与えられる場合 (Case 1)、および波長 10 m 以下の路面凹凸を無視して $\Omega_u=0.1$ cycle/m とした場合 (Case 2) の路面凹凸のサンプル関数 $\Delta(x)$ を、それぞれシミュレーション法により式(5)から求めた一例である。また、これら2つの路面凹凸を表一の $l=30$ m の橋梁に与えて表二の標準車両を走行させ、式(10)の運動方程式を Rung-Kutta-Gill 法で解いて応答 $\dot{Z}(t)$ および $x=l/2$ における $Y(x, t)$ 、 $\dot{Y}(x, t)$ のサンプル関数を求めた。図四は、



図二 路面凹凸のパワースペクトル密度



図三 路面凹凸 $\Delta(x)$ のサンプル関数

これらのサンプル関数を、Case 1 の路面の場合について本論の手法で求めた $\sigma_y(t)$ および $\Psi_{\dot{y}}(t)$ と併せてプロットしたものである。Case 2 の路面に対する応答 $Y(x, t)$ および $\dot{Y}(x, t)$ は路面凹凸を全く無視した場合の応答とほとんど一致し、0.1 cycle/m 以下の路面周波数は橋梁の応答にほとんど影響していないことがわかる。

しかしながら、車両の走行速度が大きくなれば 0.1 cycle/m 以下の周波数が無視できない場合もあると思われるので、本節の以下の解析においてはすべて図-2 のパワースペクトルを用いた。この場合、 $|\omega| < 2\pi\alpha_0$ のパワースペクトル密度 S_0 の値を 0 としても橋梁の応答には全く影響しないことが、図-4 と同様の数値計算により確かめられた。

(2) 車両と橋梁の重量比および車両ばねの初期変位の影響

表-1 のスパン $l=50$ m, 総重量 $W=272$ ton の 2 車線橋梁および同一スパンで総重量と曲げ剛性をそれぞれ 1/2 に減じた仮想の 1 車線橋梁上に、表-2 の標準車両を走行させる場合を想定すれば、2 つの橋梁の固有振動数は同じであるが、後者の P_0 による静的最大たわみは当然前者のその 2 倍となる。それぞれの橋梁について、応答 $Z(t)$ および $x=l/2$ における $Y(x, t)$, $\dot{Y}(x, t)$ のサンプル関数をシミュレーション法により求め、本論の手法により求めた $\Psi_{\dot{y}}(t)$ および $\sigma_y(t)$ とともに示せば、図-5 のとおりである。また表-3 は各応答量の最大値を比較したものである。

スパンおよび固有振動数が等しい 2 つの橋梁におい

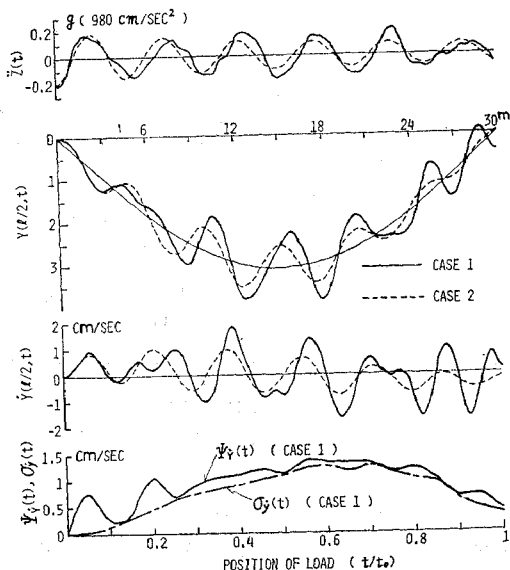


図-4 応答のサンプル関数および $\Psi_{\dot{y}}(t)$, $\sigma_y(t)$ ($l=30$ m, $z_0=0.2 P_0/k_0$, $\dot{z}_0=0$)

表-3 応答の最大値の比較 ($l=50$ m, $P_0=13.6$ ton, $f_0=2.45$ Hz)

	(a)	(b)	(a)/(b)
	$W=136$ ton	$W=272$ ton	
固有振動数 (Hz)	2.45	2.45	1
重量比 P_0/W	0.1	0.05	2
静的最大たわみ y_{st} (mm)	8.40	4.20	2
$Y(l/2, t)$ の最大値 (mm)	10.67	5.96	1.79
$Y(l/2, t)/y_{st}$ の最大値	1.27	1.42	0.89
$\dot{Y}(l/2, t)$ の最大値 (cm/sec)	5.32	3.50	1.52
$\Psi_{\dot{y}}(t)$ の最大値 (cm/sec)	4.19	2.73	1.53
$\sigma_y(t)$ の最大値 (cm/sec)	3.24	2.44	1.33

て、静的たわみの大きい軽橋梁のほうが重い橋梁よりも揺れを強く感じることは実橋においてよく経験するところである²³⁾。図-5 および表-3 によれば、軽橋梁の速度応答は重い橋梁のそれより大きい、静たわみに対する動たわみの比はむしろ軽橋梁のほうが小さい点から考えて、振動感覚に大きな影響を与える要素は速度応答であることが首肯される。

また図-5 から明らかなように、 $\Psi_{\dot{y}}(t)$ と $\sigma_y(t)$ の間には車両の橋梁への進入直後には極めて大きな差が見られるが、 $t/t_0 > 0.4$ 以降においては両者の値が接近し、近似的に式 (45) が成立することがわかる。同様のことが前の図-4 についても認められよう。3. で述べたように $Y(x, t) - Z(t)$ 系と偏差 $y(x, t) - z(t)$ 系の初期条件はそれぞれ式 (12) および (19) で与えられるので、図-4 および 5 の結果は、 $t/t_0 < 0.4$ における $\Psi_{\dot{y}}(t)$ が初期条件 z_0, \dot{z}_0 の影響を強く受けること、およびその影響が $t/t_0 > 0.4$ 以降にはほとんど及ばないことを示している。またこの結果から、歩行者の振動感覚を評価するためには、車両が橋梁への進入時に受ける衝撃効果を含めた初期条件の設定も重要な要素の一つであると考えられ、今後の研究課題の一つとなろう。この初期条件は本来確率量として取扱うべきであるが、現時点では資料が不十分であるので、以下の解析例では初期条件の影響は小さく近似的に式 (45) が成立するものと考えて、 $\sigma_y(t)$ に対する各パラメーターの影響を述べることにする。

図-6 は、車両の重量 P_0 を 6.8 ton, 13.6 ton, 20.0 ton と変化させ、パラメーター $f_0=2.45$ Hz, $h_0=0.03$, $v=12$ m/sec は共通の 3 種の車両が上記の $l=50$ m の 2 車線橋を走行する場合の $\sigma_y(t)$ をプロットしたものである。図-5 と併せ考えれば、車両と橋梁の重量比 P_0/W が大きいほど $\sigma_y(t)$ も大きいことが明らかであるが、静的たわみが P_0 に比例するのに対し、 P_0/W と $\sigma_y(t)$ は線型関係にないことが認められる。

(3) 車両と橋梁の固有振動数比および減衰定数の影響

1 次固有振動数が $f_1=2.45$ Hz である $l=50$ m の 2

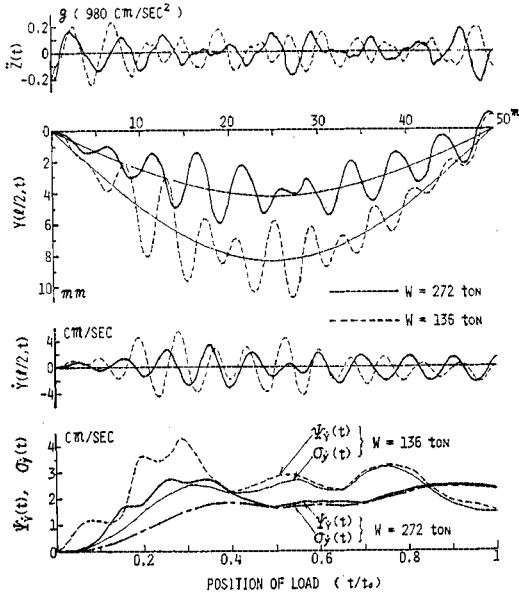


図-5 応答のサンプル関数および $\ddot{Y}(t)$, $\dot{\sigma}_y(t)$
($l=50\text{ m}$, $z_0=0.2 P_0/k_0$, $\dot{z}_0=0$)

車線橋に、種々の固有振動数 f_0 をもつ車両を走行させた場合の $\sigma_y(t)$ をプロットすれば 図-7 がえられる。ただし、車両パラメーター $P_0=13.6\text{ ton}$, $h_0=0.03$, $v=12\text{ m/sec}$ は全車両に共通とした。図-8 は逆に表-2の標準車両を表-1の各スパンの橋梁にそれぞれ走行させた場合の $\sigma_y(t)$ を示したものである。これらの結果より、車両と橋梁の固有振動数比 f_0/f_1 が1に近いとき $\sigma_y(t)$ が当然ながら大きくなること、および f_0/f_1 が1より小さくなると急激に応答が小さくなることがわかる。

次に、車両と橋梁の減衰定数 h_0 , h_n が応答に及ぼす影響を調べるため、図-7 の $f_0/f_1=1$ または図-8 の $l=50\text{ m}$ の解析例 (ともに $h_0=0.03$, $h_n=0.01$) について、 h_0 と h_n の組み合わせのみを変えて $\sigma_y(t)$ を求め、結果を図-9 に示した。

車両と橋梁の振動の連成を無視し、車両の接地力を定常ランダム過程として与える場合には、応答に対する車両と橋梁の減衰の影響が顕著に現われ⁹⁾, $h_0 \rightarrow 0$ または $h_n \rightarrow 0$ とすれば、特に本例のように $f_0/f_1=1$ のときの橋梁の応答は過度に大きくなる。しかしながら、本論のような解析モデルで車両と橋梁の連成非定常ランダム振動を扱う場合には、 $h_0 \rightarrow 0$ または $h_n \rightarrow 0$ としても $\sigma_y(t)$ は極端に過大にならない。

(4) 車両の走行速度の影響

図-10 は、表-2 の標準車両の走行速度 v のみを 6 m/sec , 12 m/sec , 24 m/sec と変化させ、 $l=50\text{ m}$ の2車線橋上を走行させた場合の $\sigma_y(t)$ をプロットしたもの

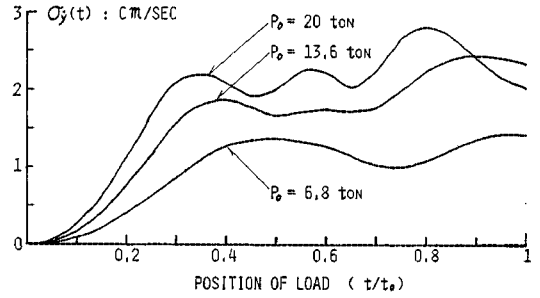


図-6 $\sigma_y(t)$ への車両重量 P_0 の影響
($l=50\text{ m}$, $W=272\text{ ton}$, $f_0/f_1=1$)

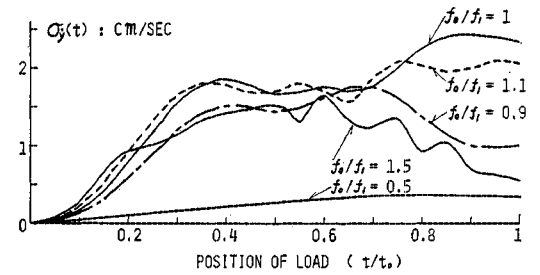


図-7 $\sigma_y(t)$ への固有振動数比 f_0/f_1 の影響
($l=50\text{ m}$, $f_1=2.45\text{ Hz}$, $P_0=13.6\text{ ton}$)

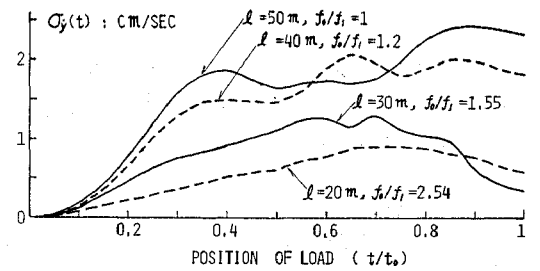


図-8 $\sigma_y(t)$ へのスパン l および固有振動数比 f_0/f_1 の影響
($P_0=13.6\text{ ton}$, $f_0=2.45\text{ Hz}$)

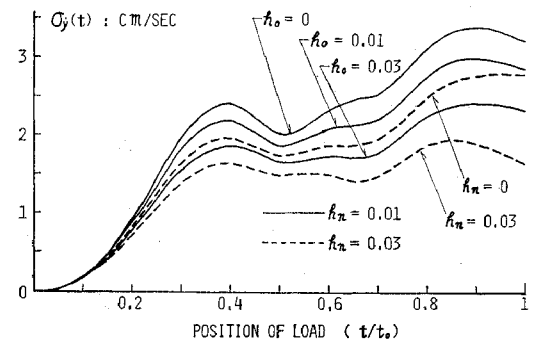


図-9 $\sigma_y(t)$ への減衰定数 h_0 , h_n の影響
($l=50\text{ m}$, $P_0=13.6\text{ ton}$, $f_0/f_1=1$)

である。 v が増せば、大きなパワースペクトル密度をもつ低サイクルの路面凹凸が車両の加振源として効いてくる。したがって実用的な走行速度 v の範囲内では、一般に v が大きいほど橋梁の速度応答も大きくなると考える

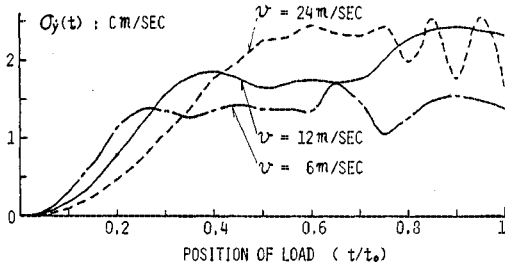


図-10 $Q_y(t)$ への車両走行速度 v の影響
($l=50$ m, $P_0=13.6$ ton, $f_0/f_1=1$)

のが自然であり、図-10の結果はこれを裏付ける解析例の1つといえよう。

6. むすび

車両と橋梁の振動の連成を無視し車両の接地力を定常ランダム外力と仮定する、既往の諸研究の解析モデルの欠点は、橋梁の振動の車両へのフィードバック効果が考慮されていないことである。この効果は、車両と橋梁の固有振動数が近接するときとくに大きいことが、凹凸のない橋面上を単一走行車両が走行するときのエネルギー授受の観点から、J.M. Biggs¹⁷⁾らによって実験的および理論的に研究されており、単一走行車両による橋梁の応答解析モデルでは無視できない重要な要素と考えられる。

本論文の主眼は、上記フィードバック効果を考慮した、走行車両と橋梁の連成非定常ランダム振動の問題に対して、任意時刻の応答の非定常2乗平均値を求めることにあり、単純化された解析モデルといくつかの仮定のもとで、各種の橋梁に適用可能な解析手法を提示することができた。本法によればシミュレーション法のごとく数多くのサンプル関数を計算してアンサンプル平均をとる必要がなく、演算上の利点大きい。

数値計算例により、車両と橋梁の各種パラメーターが応答に及ぼす影響を示したが、対象が中小スパンの単純桁橋のみに限られていることと、車両の加振源となる初期条件および実際の橋面の凹凸についての資料が不十分であることから、今後、各種形式の橋梁をも含めて、実験とその測定値との比較検討が必要と思われる。

車両を本論のような1自由度振動系にモデル化すれば、接地力が狭帯域のランダム過程となる。このため、車両と橋梁の固有振動数が近接する場合には、応答の理論値が実際以上に大きくなっていると考えられるので、1自由度振動系では表現できない大型車両の振動の影響⁸⁾などを検討することも必要であろう。

謝 辞：本研究に関して、本学工学部の渡辺寿夫教授および末岡淳男助教授より有益なご助言をいただき、また各古屋大学の成岡昌夫教授、金沢大学の小堀為雄教

授、長崎大学の岡林隆敏助手、三菱自動車工業(株)の森崎健二氏および建設省土木研究所の成田信之氏より貴重な文献と資料を提供していただいた。ここに記して謝意を表する。

付録：式(30)の $\mu_{nm}(t)$ の計算結果

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{より} \quad \varphi_n(v\tau) = \sin \alpha_n \tau, \\ \alpha_n &= \frac{n\pi}{t_0} \\ \mu_{nm}(t) &= \frac{1}{\omega_n'} \int_0^t e^{-h_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n' (t-\tau) \sin \alpha_n \tau \\ &\quad \cdot \{K_{m1} \cos \alpha_m \tau + K_{m2} \sin \alpha_m \tau + e^{-h_s \omega_s \tau} \\ &\quad \cdot (K_{m3} \sin \omega_0' \tau - K_{m1} \cos \omega_0' \tau)\} d\tau \\ &= \frac{1}{4 \omega_n'} \{F_1(t) + e^{-h_n \omega_n t} F_2(t) - e^{-h_s \omega_s t} F_3(t)\} \\ &\quad \dots\dots\dots (30)' \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \{K_{m1}(\beta_1 - \beta_7) - K_{m2}(\beta_2 - \beta_8)\} \cos(\alpha_m - \alpha_n)t \\ &\quad + \{K_{m1}(\beta_2 - \beta_8) + K_{m2}(\beta_1 - \beta_7)\} \sin(\alpha_m - \alpha_n)t \\ &\quad + \{K_{m1}(\beta_3 - \beta_5) - K_{m3}(\beta_4 - \beta_6)\} \cos \\ &\quad \cdot (\alpha_m + \alpha_n)t + \{K_{m1}(\beta_4 - \beta_6) + K_{m2}(\beta_3 - \beta_5)\} \\ &\quad \cdot \sin(\alpha_m + \alpha_n)t \\ F_2(t) &= \{-K_{m1}(\beta_1 + \beta_3 - \beta_5 - \beta_7) + K_{m2}(\beta_2 + \beta_4 - \beta_8 \\ &\quad - \beta_8) + K_{m3}(r_2 + r_4 - r_6 - r_8) + K_{m1}(r_1 + r_3 \\ &\quad - r_5 - r_7)\} \cos \omega_n' t + \{-K_{m1}(\beta_2 - \beta_4 - \beta_6 + \beta_8) \\ &\quad - K_{m2}(\beta_1 - \beta_3 - \beta_5 + \beta_7) - K_{m3}(r_1 - r_3 - r_5 \\ &\quad + r_7) + K_{m1}(r_2 - r_4 - r_6 + r_8)\} \sin \omega_n' t \\ F_3(t) &= \{K_{m1}(r_1 - r_7) + K_{m3}(r_2 - r_8)\} \cos(\omega_0' - \alpha_n)t \\ &\quad + \{K_{m1}(r_2 - r_8) - K_{m3}(r_1 - r_7)\} \sin(\omega_0' - \alpha_n)t \\ &\quad + \{K_{m1}(r_3 - r_5) + K_{m3}(r_4 - r_6)\} \cos(\omega_0' + \alpha_n)t \\ &\quad + \{K_{m1}(r_4 - r_6) - K_{m3}(r_3 - r_5)\} \sin(\omega_0' + \alpha_n)t \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{h_n \omega_n}{h_n^2 \omega_n^2 + (\alpha_m - \alpha_n - \omega_n')^2}, \\ \beta_2 &= \frac{\alpha_m - \alpha_n - \omega_n'}{h_n^2 \omega_n^2 + (\alpha_m - \alpha_n - \omega_n')^2}, \\ \beta_3 &= \frac{h_n \omega_n}{h_n^2 \omega_n^2 + (\alpha_m + \alpha_n + \omega_n')^2}, \\ \beta_4 &= \frac{\alpha_m + \alpha_n + \omega_n'}{h_n^2 \omega_n^2 + (\alpha_m + \alpha_n + \omega_n')^2}, \\ \beta_5 &= \frac{h_n \omega_n}{h_n^2 \omega_n^2 + (\alpha_m + \alpha_n - \omega_n')^2}, \\ \beta_6 &= \frac{\alpha_m + \alpha_n - \omega_n'}{h_n^2 \omega_n^2 + (\alpha_m + \alpha_n - \omega_n')^2}, \\ \beta_7 &= \frac{h_n \omega_n}{h_n^2 \omega_n^2 + (\alpha_m - \alpha_n + \omega_n')^2}, \\ \beta_8 &= \frac{\alpha_m - \alpha_n + \omega_n'}{h_n^2 \omega_n^2 + (\alpha_m - \alpha_n + \omega_n')^2} \end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{h_n \omega_n - h_0 \omega_0}{(h_n \omega_n - h_0 \omega_0)^2 + (\omega_0' - \alpha_n - \omega_n')^2}$$

$$r_2 = \frac{\omega_0' - \alpha_n - \omega_n'}{(h_n \omega_n - h_0 \omega_0)^2 + (\omega_0' - \alpha_n - \omega_n')^2}$$

$$r_3 = \frac{h_n \omega_n - h_0 \omega_0}{(h_n \omega_n - h_0 \omega_0)^2 + (\omega_0' + \alpha_n + \omega_n')^2}$$

$$r_4 = \frac{\omega_0' + \alpha_n + \omega_n'}{(h_n \omega_n - h_0 \omega_0)^2 + (\omega_0' + \alpha_n + \omega_n')^2}$$

$$r_5 = \frac{h_n \omega_n - h_0 \omega_0}{(h_n \omega_n - h_0 \omega_0)^2 + (\omega_0' - \alpha_n - \omega_n')^2}$$

$$r_6 = \frac{\omega_0' + \alpha_n - \omega_n'}{(h_n \omega_n - h_0 \omega_0)^2 + (\omega_0' + \alpha_n - \omega_n')^2}$$

$$r_7 = \frac{h_n \omega_n - h_0 \omega_0}{(h_n \omega_n - h_0 \omega_0)^2 + (\omega_0' - \alpha_n + \omega_n')^2}$$

$$r_8 = \frac{\omega_0' - \alpha_n + \omega_n'}{(h_n \omega_n - h_0 \omega_0)^2 + (\omega_0' - \alpha_n + \omega_n')^2}$$

参考文献

- 1) 山田・小堀：ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究，土木学会論文集，No. 119，pp. 1~9，1965-7.
- 2) 山田・小堀：活荷重に対する道路橋の動的応答—衝撃係数—に関する考察，土木学会論文集，No. 148，pp. 40~50，1967-12.
- 3) Nakai, H. and Kotoguchi, H. : Dynamic Response of Horizontally Curved Bridges under Random Traffic Flows, 土木学会論文報告集，No. 244，pp. 117~128，1975-12.
- 4) Shinozuka, M. and Kobori, T. : Fatigue Analysis of Highway Bridges, 土木学会論文報告集，No. 208，pp. 137~148，1972-12.
- 5) 小堀・梶川：道路橋の振動とその振動感覚，土木学会論文報告集，No. 222，pp. 15~23，1974-2.
- 6) 小堀・梶川：橋梁振動の人間工学的評価法，土木学会論文報告集，No. 230，pp. 23~31，1974-10.
- 7) 星谷・中根：橋の振動による心理的反応の理論解析，土木学会論文報告集，No. 246，pp. 1~8，1976-2.
- 8) 小堀・梶川：単一動荷重に対する道路橋の振動感覚，土木学会論文報告集，No. 248，pp. 11~23，1976-4.
小堀・梶川：振動感覚を評価するためのアーチ橋の動的スペクトル，土木学会論文報告集，No. 251，pp. 127~130，1976-7.
- 9) 吉村・彦坂ほか：不規則振動論による道路橋の走行荷重応答解析，九州大学工学集報，48巻6号，pp. 741~746，1975-12.
- 10) Fryba, L. : Non-Stationary Vibrations of Bridges Under Random Moving Load, Final Report of 8th IAB SE Congress, New York, pp. 1223~1236, 1968.
- 11) Thompson, W.E. : Measurements and Power Spectra of Runway Roughness at Airports in Countries of NATO, NACA Technical Note 4303, pp. 1~85, 1958-7.
- 12) 武田：航空機の走行荷重の解析，運輸技術研究所報告，10巻5号，pp. 1~44，1960-5.
- 13) 川合・森崎：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol. 2, No. 2, pp. 20~28, 1965.
- 14) 兼重：パワースペクトル解析の自動車への応用，いすゞ技報，No. 33, pp. 1~9, 1960.
- 15) 川合・森崎：自動車走行時の振動についての一考察，三菱重工技報，Vol. 6, No. 1, pp. 51~58, 1964.
- 16) 星谷：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，1974-8.
- 17) Biggs, J.M. and Suer, H.S. ほか：The Vibration of Simple Span Highway Bridges, Proc. ASCE, ST 2, March 1957, pp. 1186-1~1186-32.
- 18) Licari, J.S. and Wilson E.N. : Dynamic Response of a Beam Subjected to a Moving Forcing System, Proc. 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 419~425, 1962.
- 19) Smith, J.W. : Finite Strip Analysis of the Dynamic Response of Beam and Slab Highway Bridges, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, No. 4, pp. 357~370, 1973.
- 20) 平井：結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析，土木学会論文集，No. 104，pp. 1~8，1964-4.
- 21) 吉村・平井：ランガー桁の動的解析，土木学会論文集，No. 101，pp. 1~14，1964-1.
- 22) 吉村・平井：補剛アーチ橋およびつり橋の共通解析，土木学会論文集，No. 115，pp. 1~11，1965-3.
- 23) 吉村・江村ほか：走行荷重によるランガー橋の応答性状，昭和50年度土木学会西部支部研究発表会講演集，pp. 11~12，1976-2.
- 24) 成田・桂樹：路面の凹凸と自動車荷重 (IV)，土木研究所資料，第1130号，pp. 1~107，1976-3.
- 25) Fryba, L. : Non-Stationary Response of a Beam to a Moving Random Force, Journal of Sound and Vibration, Vol. 46, No. 3, pp. 323~338, June 1976.

(1976.8.11・受付)