

# ゲートリップ付近の圧力分布についての理論解析

## THEORETICAL ANALYSIS OF PRESSURE DISTRIBUTION ON THE GATE LIP.

荻原 国 宏\*  
By Kunihiko OGIHARA

### 1. はじめに

ゲートの周辺部の圧力分布を求めることは、ポテンシャル流としてのフローネットを書く方法<sup>1)</sup>、実験による方法等が使用されて、実地の設計に役立てられている。また最近になって多く作られている長大スパンゲートにおいては、図-1 に示すごとく、ゲートリップが取り付けられるのが通例となっている。このリップの主要目的は、ダウンプルの減少と流れの支配点をゲートリップの

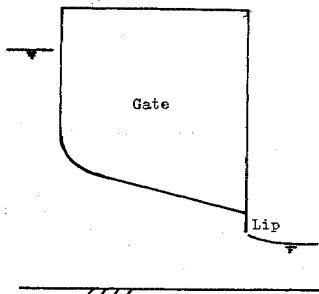


図-1

所にもってきて、流れを安定化させ、振動の原因となる、剝離点の変動をなくすことを目的としている。この2点については、かなりの効果があることは良く知られている事実である。

この論文は、このゲートリップの効果のうち、圧力の効果について等角写像の手法を利用して求めたものである。

### 2. リップのない場合

ゲート部より流出する流れは自由流出の場合を考えることにする。この場合、複素ポテンシャル面と流れの面( $z$ -面)とを直接に結びつける写像関数を求めることはできないので、このような場合に常に使用される速度面と、仲介面を利用することにする。

図-2 に示した  $Z, W, \Omega, t$  の各面の関係を使うこと

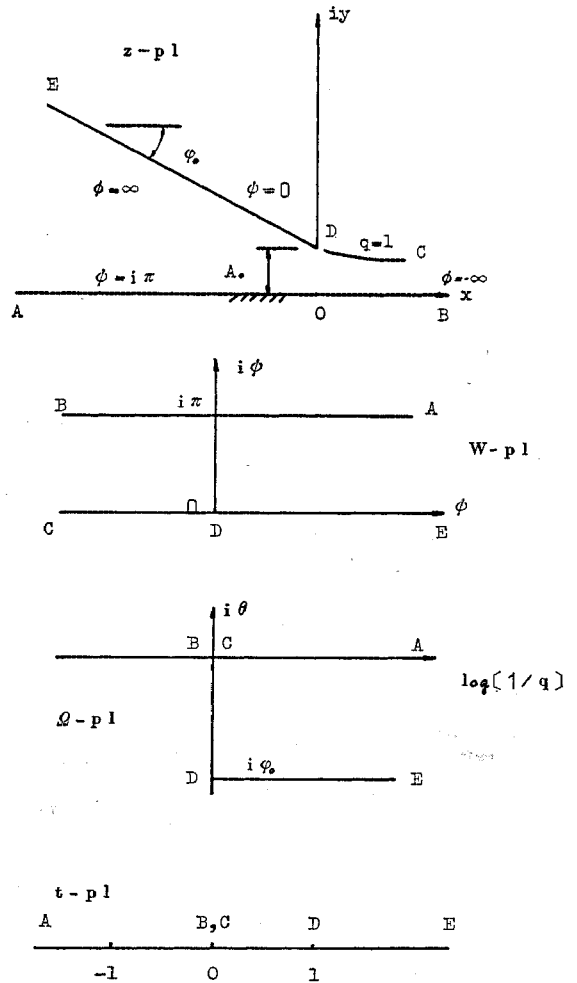


図-2 写像関係

にする。本来は  $z$  と  $W$  面の写像関数を求めれば良いが、これは難しいので、 $W$  と  $t, \Omega$  と  $t$  の間の写像関数を求めることにする。なお  $\Omega$  面は

$$\Omega = \log\left(\frac{dz}{dW}\right) = \log\frac{1}{q} + i\theta \dots\dots\dots(1)$$

\* 正会員 工博 東洋大学助教授 工学部土木工学科



と書ける。

b)  $\Omega$  面と  $t$  面の関係

シュバルツ, クリストフェルの定理より

$$\frac{d\Omega}{dt} = A(t+1)^{-1}t^{-1/2}(t-a)^{-1/2}(t-1)^{-1/2} \dots\dots\dots(14)$$

となる。ここで  $1/t=x^2$  とおくと

$$\frac{d\Omega}{dx} = -2A \frac{1}{\sqrt{(1-ax^2)(1-x^2)}} \frac{x^2}{x^2+1} \dots\dots(15)$$

となる。さらに

$$a=k^2, x=sn u \dots\dots\dots(16)$$

の変数変換をすると,

$$\frac{d\Omega}{du} = -2A \frac{sn^2 u}{sn^2 u + 1} \dots\dots\dots(17)$$

の形に整理できる。この積分は

$$k^2 sn^2 \bar{a} = -1, sn \bar{a} = \pm i/k \dots\dots\dots(18)$$

とおくことにより

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{du} &= \bar{A} \frac{2k^2 sn \bar{a} cn \bar{a} dn \bar{a} sn^2 u}{1 - k^2 sn^2 \bar{a} sn^2 u} \\ \bar{A} &= \frac{-A}{k^2 sn \bar{a} cn \bar{a} dn \bar{a}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

と書きなおせて, その結果は

$$\Omega = \bar{A} \log \frac{\Theta(u-\bar{a})}{\Theta(u+\bar{a})} + Bu + c, B=2Z(\bar{a}) \dots\dots\dots(20)$$

となる。さらに

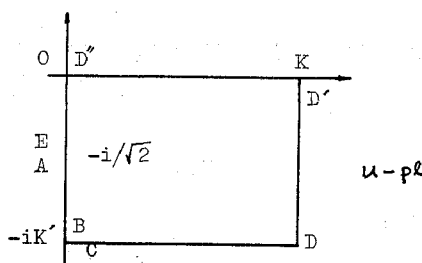
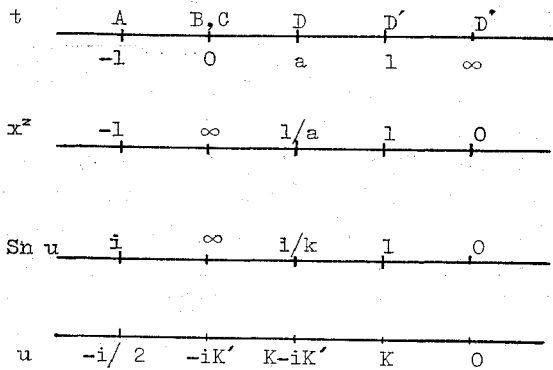


図-4 変数変換と境界値

$$\left. \begin{aligned} \Theta(u-\bar{a}) &= \vartheta_4\left(\frac{u-\bar{a}}{2k}\right), \\ \Theta(u+\bar{a}) &= \vartheta_4\left(\frac{u+\bar{a}}{2k}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

の関係を使うと

$$\Omega = \bar{A} \log \frac{\vartheta_4\left(\frac{u-\bar{a}}{2k}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u+\bar{a}}{2k}\right)} + Bu + C \dots\dots\dots(22)$$

となる。係数  $\bar{A}, B, C'$  は境界条件 (図-4) と 図-3 の  $\Omega$  面の関係を満たすように決めれば良い。その結果

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \varphi_0/\pi = 1/n \\ B &= i(\varphi_0 - \pi/2)/K \\ C &= -i\varphi_0(\bar{a}/K+1) - (\varphi_0 - \pi/2) \cdot K'/K \\ &= -i\varphi_0 + \log 1/q_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(23)$$

の関係式が得られる。C については, 2つの条件式が求まり, この式の同時に成立する条件より, コーナーの流速を与える式

$$\log 1/q_0 = -i\varphi_0 \bar{a}/K - (\varphi_0 - \pi/2) \cdot K'/K \dots\dots(24)$$

が得られる。 $\bar{a}$  は式 (18) より虚数であることがわかるのでこれを満足する解を

$$\bar{a} = \pm ia_i, a_i > 0 \text{ の実数} \dots\dots\dots(25)$$

とおくと, 式 (24) は

$$q_0 = \exp\left[-\frac{\pi}{K} \left\{ \frac{1}{n} (K' \pm a_i) - \frac{K'}{2} \right\}\right] \dots\dots(26)$$

となり, ゲートリップの条件に合うのは  $\pm a_i$  の内 (+) の方であることがわかった (後述の実験結果との対比による)。

写像関数は結局式 (23) を式 (22) に代入して整理することにより

$$\Omega = \log \frac{\vartheta_4\left(\frac{u-\bar{a}}{2k}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u+\bar{a}}{2k}\right)} + \log \frac{\exp\left[i\pi \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{u}{K} - 1\right) - \frac{u}{2K} \right\}\right]}{q_0} \dots\dots\dots(27)$$

となる。また式 (1) の関係を考慮すると

$$\frac{dz}{dW} = \frac{\vartheta_4\left(\frac{u-\bar{a}}{2k}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u+\bar{a}}{2k}\right)} \exp\left[i\pi \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{u}{K} - 1\right) - \frac{u}{2K} \right\}\right] \dots\dots(28)$$

の関係を得る。式 (13) および  $1/t=x^2$ , 式 (16) の関係を使用して  $W \sim u$  の関係を求めると

$$\frac{dW}{du} = -\frac{2sn u dn u cn u}{1+sn^2 u} \dots\dots\dots(29)$$

の関係式が得られる。式 (28), (29) の両式より  $u$  を消

去して  $W \sim z$  の積分結果が得られれば、解は求められたことになるが、これは至難であるので、数値積分をすることにする。

c) リップ部分についての解

図-3 からわかるごとく、リップ部分は  $DD'$  である。この部分の  $u$  の値の変化は、図-4 より  $K \sim K - iK'$  である。そこで

$$u = K - iu_1, \quad u_1 > 0 \text{ の実数} \dots\dots\dots(30)$$

において、式 (28), (29) を書きなおすと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dW} = \frac{q_0}{q} &= \left[ \frac{\vartheta_3 \left( \frac{-u_1 - \bar{a}}{2k} \right)}{\vartheta_3 \left( \frac{-u_1 + \bar{a}}{2k} \right)} \right]^{1/n} \\ &\cdot \exp \left[ \frac{\pi u_1}{K} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \frac{\bar{a}}{K'} \right) \right] \\ \bar{\theta} &= -\pi/2 \\ \frac{dW}{du_1} &= -2k'^2 \frac{\overline{cnu_1} \overline{snu_1}}{\overline{dnu_1} (1 + \overline{dnu_1}^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

ここに  $\overline{cnu_1}$  のごとく  $-$  を引いた楕円関数は  $k'$  を母数とするものである。式 (30) の  $W$  は実質的には実数として表われるので、ポテンシャルの値になっている。

式 (31) の 2 式を使用して、パラメーター  $u_1$  を消去して、 $r \sim W$  の関係が求まれば良いのであるが、これはかなり困難である。したがって数値積分をすることにする。

d) ゲート面についての解

同じく図-3 からわかるごとく、ゲート面は  $D'E$  である。このときの  $u$  の値は  $0 \sim -i/\sqrt{2}$  の間で変化している。したがって  $u = -iu_2$  において式 (28), (29) を書きなおすと、式 (31) と同様に次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dW} = \frac{q_0}{q} &= \left[ \frac{\vartheta_2 \left( \frac{u_2 + \bar{a}}{2K'} \right)}{\vartheta_2 \left( \frac{u_2 - \bar{a}}{2K'} \right)} \right]^{1/n} \\ &\cdot \exp \left[ \frac{\pi u_2}{K} \left\{ -\frac{1}{n} \left( 1 + \frac{\bar{a}}{K'} \right) + \frac{1}{2} \right\} \right] \\ \bar{\theta} &= -\varphi_0 = -\pi/n \\ \frac{dW}{du_2} &= -2 \frac{\overline{snu_2} \overline{dnu_2}}{\overline{cnu_2} (\overline{cnu_2}^2 - \overline{snu_2}^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

リップ長は式 (31) を使用して  $u_1 = 0 \sim K'$  まで積分すれば良い。また各点の流速は  $u_1, u_2$  をパラメーターとして、コーナーの流速  $q_0$  との関係で求めることができる。

4. 圧力分布の計算

流れの場はポテンシャル流として、連続の方程式を満たす解を求めたことになっている。圧力分布は運動方程

式を積分したエネルギーの式より求めることにする。

表面摩擦力によるエネルギーの損失は、ゲートリップ付近の局所的な現象を考えているので、微小項として無視することにし、流れは定常であることを考えれば、ベルヌイの式が成り立つことになる。

$$\begin{aligned} E &= \frac{q^2}{2g} + y + \frac{P}{w} \\ \text{or } \frac{P}{w} &= E - y - \frac{q^2}{2g} \end{aligned} \dots\dots\dots(33)$$

ゲート面までの基準面からの高さ  $y$ 、およびその点の流速  $q$  はさきの (31), (32) の式を数値積分することによって求まり、また、 $E$  の値は、上流のエネルギー、またはゲートリップ部の流出速度より求めることができるので、その値を使用すれば良い。

ゲートの操作荷重として問題になるダウンプル、およびアップリフトは、図-5 の ACD の部分を積分した力はアップリフトになり、ABC の部分を積分した力はゲートが閉じていたときの浮力に比して、浮力の減少した力に相当するのでダウンプルに相当している。

したがってダウンプルの大きさを求めるためには  $q^2/2g$  の値のみを求めても良ことになる。

5. 数値計算結果と実験値との比較

理論計算での流れの場と実験での流れの場との間には図-6 のような関係になっていることがわかる。したがって

$$q = \frac{\bar{q}}{\bar{Q}/\bar{A}_0}, \quad \psi = \bar{\psi}\pi/\bar{Q} \dots\dots\dots(34)$$

となり、また

$$q = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{q} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \dots\dots\dots(35)$$

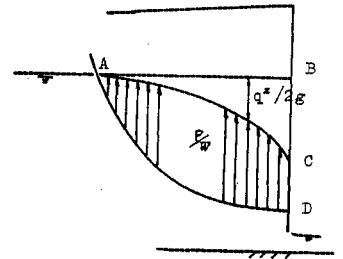


図-5 圧力分布と速度水頭

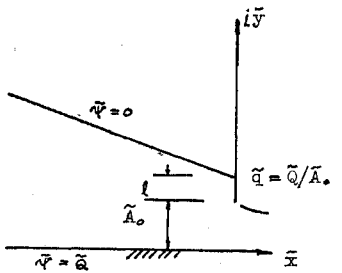
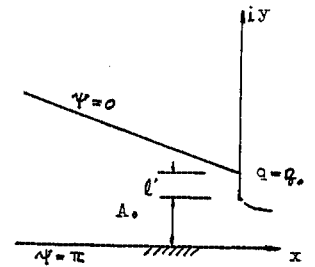


図-6 解析面(上)と実際の流れの面(下)

の関係より、

$$dy = \frac{d\psi}{q} = \frac{\frac{Q_0}{\pi} d\psi}{\frac{Q_0}{\pi} \bar{A}_0 q} = \frac{\bar{A}_0}{\pi} dy \dots\dots\dots (36)$$

の関係が得られる。したがってリップ長は式 (31) を使用して、 $u_1=0 \sim K'$  での  $dr$  の積分値を求めれば良い。

$$l = \frac{\bar{A}_0}{\pi} \int dr = \frac{\bar{A}_0}{\pi} \int_0^{K'} \frac{dr}{dW} \cdot \frac{dW}{du_1} \cdot du_1 \dots (37)$$

(1) リップ長とコーナーの流速

ゲートよりの流出速度と、リップコーナーの部分の流速との比は、式 (26) の  $q_0$  の値として求められる。またリップ長は式 (31) を数値積分することによって求められる。このいずれの式も、ゲート面の傾斜を示すパラメーター  $n$  と  $a=k^2$  として与えられる、楕円関数のパラメーターの2つが入っている。したがって、この2つの値をパラメーターにして、流速および、ゲートリップ長を決めることができる。これをグラフにしたのが図-7である。これには  $n=6$  ( $\varphi_0=30^\circ$ )、 $n=18$  ( $\varphi_0=10^\circ$ ) の2ケースしか示していない。

実際にはゲートリップ長およびゲート下面の傾斜角  $\varphi_0$  が決まっているので、 $\pi/\bar{A}_0$  の値と  $n$  の値より、図-7の Lip の曲線よりパラメーター  $a$  を決め、この  $a$  に相当する  $q_0$  (コーナーの流速) をグラフより読んで決める方法になる。

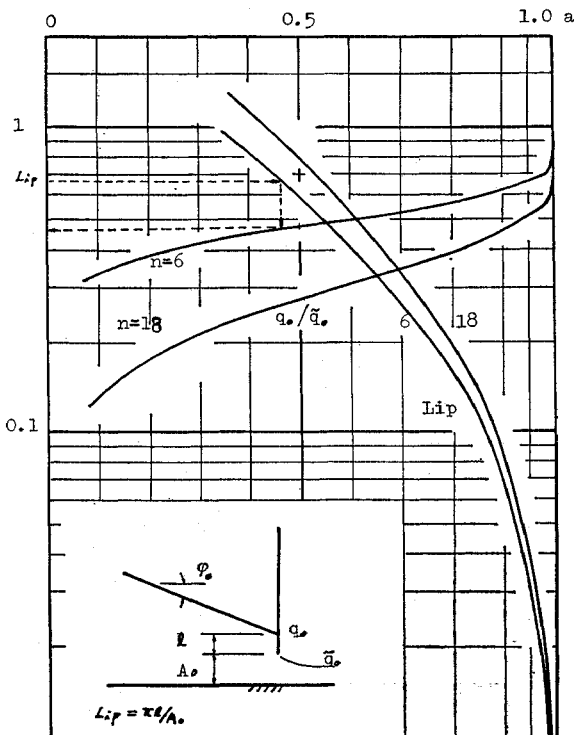


図-7 コーナ流速を求めるグラフ

(2) ゲート面の圧力分布

$\varphi_0=30^\circ$  と  $10^\circ$  のケースについて、実験値との比較を試みた。このデータは日本鋼管が日本工営に依頼実験をした結果の中の一部を使用させていただいた。この実験はリップ長と、ゲート底面の角度  $\varphi_0$  を変化させたときのゲート底面に働く圧力分布を測定した結果である<sup>9)</sup>。図-8に示してある一連のグラフで実測値と理論計算の結果を比較してみる。これらのグラフはいずれもエネルギー線からの  $q^2/2g$  の値 (速度水頭) の低下量として表示してある。またゲートリップのある場合とない場合を合わせて示してある。

白丸はゲートリップのないときの実測値、黒丸はリップのあるときの実測値である。図中の実線は、本理論による計算値である。鎖線は次のような準一様流の取り扱いをして求めたものである。

ゲート開度を  $\bar{A}_0$ 、ゲートリップよりの水平距離を  $x$  とすれば、 $x$  の所での流れの断面積は、ゲート単位幅を考えると、

$$A = \bar{A}_0 + x \tan \varphi_0$$

である。したがって平均流速は

$$q = Q/A = Q/(\bar{A}_0 + x \tan \varphi_0)$$

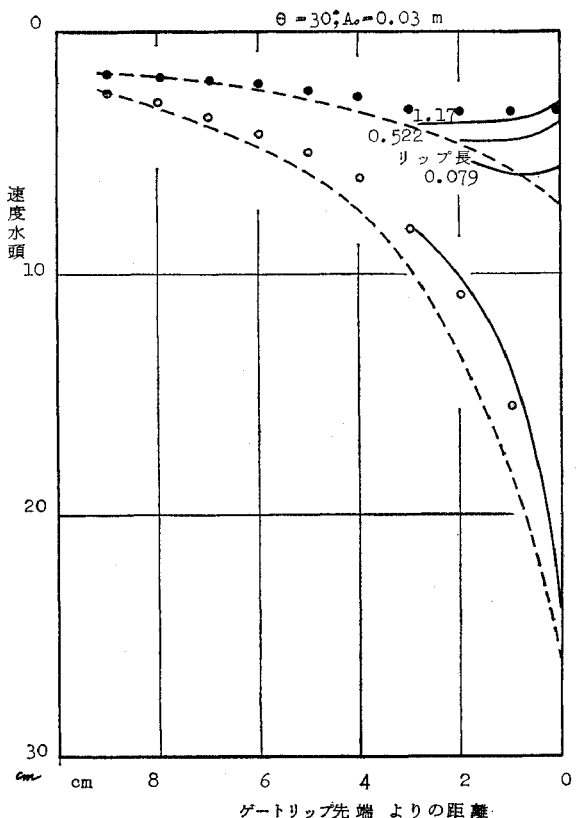


図-8 (1)

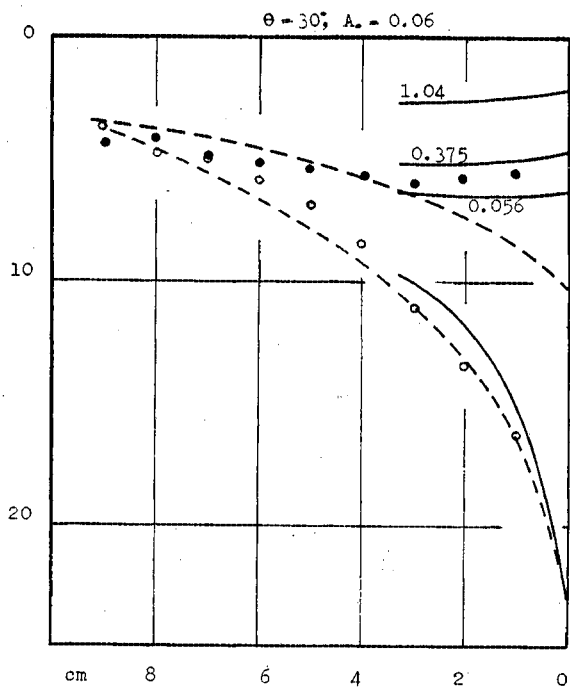


图-8 (2)

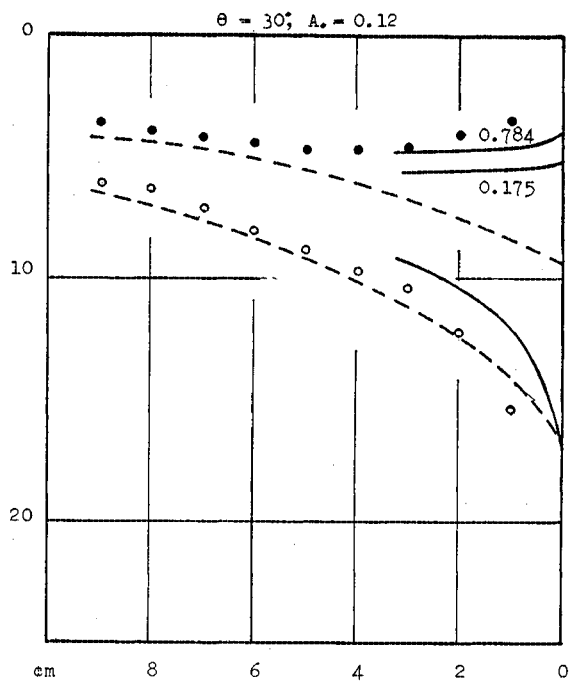


图-8 (3)

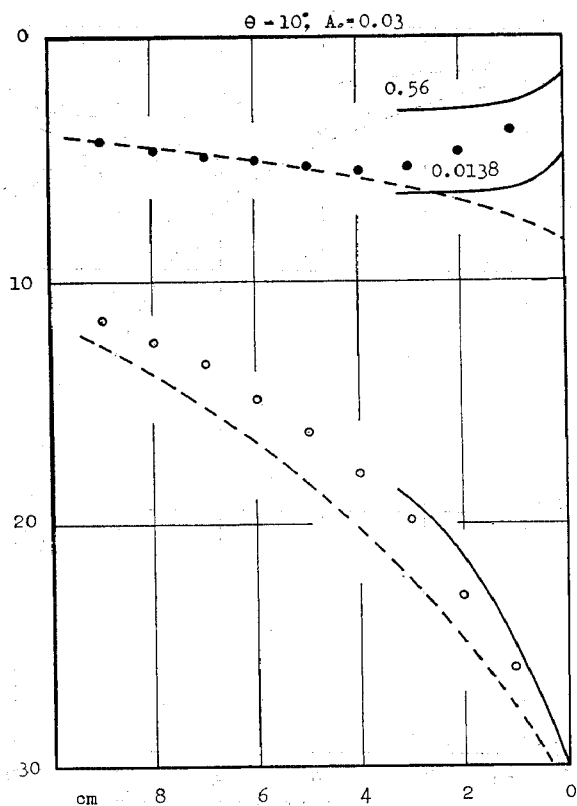


图-8 (4)

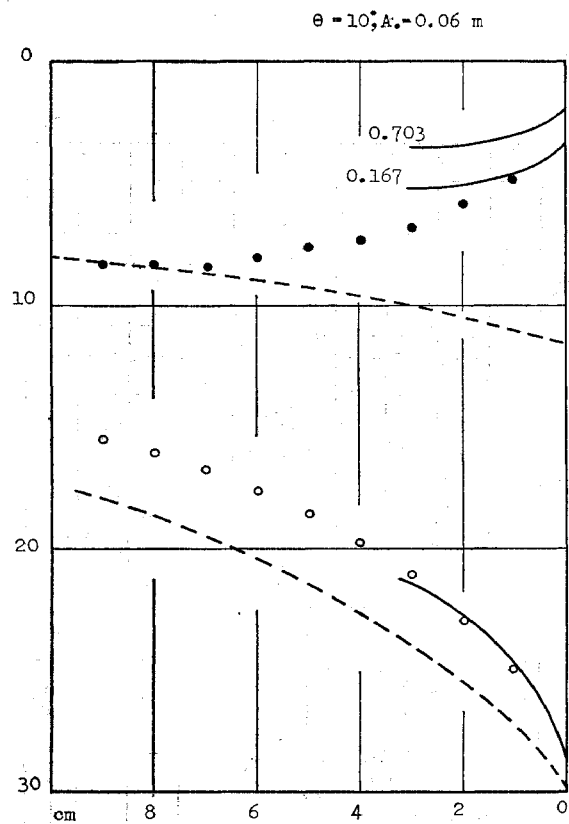


图-8 (5)

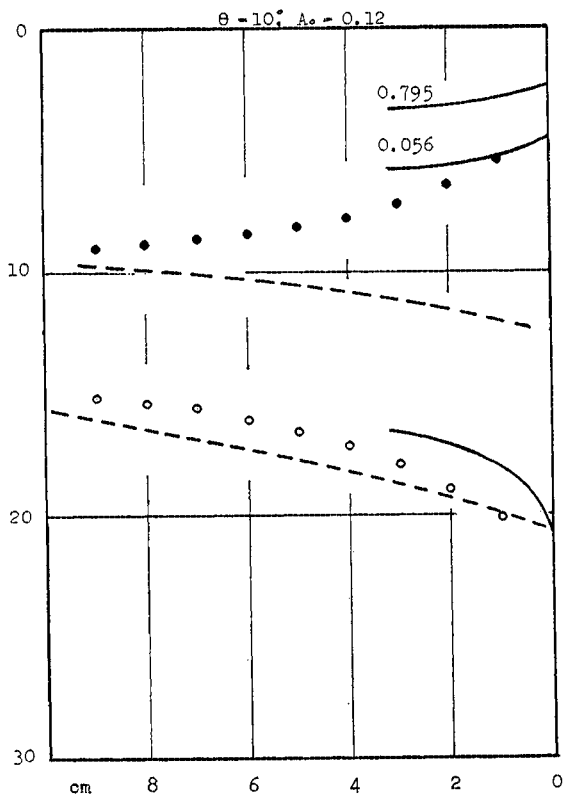


図-8 (6)  
図-8 実測値と計算値

で求まり、式 (33) より圧力分布を求めることができる。

これらのグラフより次の事項がまとめられる。

- i) ゲートリップのある場合には、リップ近辺の圧力分布は、本理論の手法によってかなり良い精度で計算することができる。
- ii) ゲートリップのないときには、準一様流の仮定による計算、および、この理論による計算法とも良い結果を示しているが、前者の方がより広範囲にわたって実験値と良い相関を示している。
- iii) ゲートリップのある場合には、リップよりはなれるにしたがって、準一様流の仮定による方法と実験値との相関が良くなってきている。

### 6. おわりに

ゲートリップのダウンブル軽減の効果については、実験によって確認されていたが、ここに示した計算手法によって、リップ長をどの程度の長さにしたら良いのかをあらかじめ実験に先立って決めることができるようになった。

この研究は筆者と日本鋼管第二重工土木設計室の田中征登氏をキャップとするゲートに関する研究会での討論

に端を発して、一年程度かかって完成したものである。

また理論との比較に使用したデータは、このときの討論の資料となったものの一部であり、心よく使用させていただいたことを合せて、研究会の諸氏に感謝致します。最後にこの計算法について有益なご指導をして下さいました本間 仁教授に謝意を表します。

### 記号表

- $A$  : schwawartz christoffel の写像式の係数、流れの断面積
- $A_0, \tilde{A}_0$  : ゲート開度
- $a$  : パラメーター ( $=k^2$ )
- $\tilde{a}$  : パラメーター [ $=sn^{-1}(i/k)$ ]
- $cn, dn, sn$  : 楕円関数
- $E$  : エネルギー
- $i$  : 虚数 ( $=\sqrt{-1}$ )
- $k, k'$  : 楕円関数の母数と補母数
- $K, K'$  : 楕円関数の周期を示すパラメーター、完全楕円積分値
- $l$  : リップ長
- $P/w$  : 圧力水頭
- $q$  : 流速の絶対値
- $q_0$  : リップコーナー部の流速
- $\dot{Q}$  : 流量
- $t$  : 伸介写像面
- $V$  : 速度ベクトル ( $oei\psi$ )
- $W$  : 複素ポテンシャル ( $=\varphi+i\psi$ )
- $x$  : 座標 (実軸), 変数変換  $y=snu$
- $y$  : 座標 (虚軸)
- $z$  : 複素面 ( $=x+iy=re^{i\theta}$ )
- $Z$  : ジーター関数
- $\Omega$  :  $=\log(dx/dW)=\log(1/q)+i\tilde{\theta}$
- $\varphi$  : 速度ポテンシャル
- $\varphi_0$  : ゲート面の傾き ( $=\pi/n$ )
- $\theta, \tilde{\theta}$  : ベクトルの偏角
- $\theta$  : シーター関数
- $\psi$  : 流関数
- $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$  : テーター関数

### 参考文献

- 1) Rouse, H. : Engineering Hydraulics, Chapter VIII, Sec C, 1950
- 2) 土木学会 : 水理公式集, 昭和 46 年改訂版, p. 284.
- 3) 佐々木達治郎 : 等角写像の応用, 富山房.
- 4) 日野幹雄 : 流体力学, 朝倉書店.
- 5) 友近 晋 : 楕円関数論, 共立出版社.
- 6) 竹内端三 : 関数論 下, 裳華房.
- 7) 理工学のための数学ハンドブック, 丸善.