

変断面格子桁の塑性設計

PLASTIC DESIGN OF GRILLAGE BEAMS WITH
VARIABLE CROSS SECTION伊 藤 満*・福 本 晴 士**
By Mitsuru ITŌ and Yuhshi FUKUMOTO

1. 緒 言

塑性設計の立場にたったの桁構造の最小重量設計を行う場合、作用する活荷重の移動性を考慮して桁の変断面形状を決めるが、用いる方法として、(a) Foulks の定理に基づいて行う方法、(b) 塑性解析の上界定理による崩壊機構の条件を線型計画法の問題として解く方法、(c) 塑性解析の下界定理を用いて影響線的な考え方をもちに解く方法、(d) 塑性解析の上・下界定理を巧みに利用して他の数理計画法の問題として解く方法などがあげられる。(a)に関する最近の研究として Lamblin¹⁾ は Save and Prager²⁾ の単一移動荷重をうける最小重量塑性設計の考え方を拡張して、サンドウィッチ断面からなる多径間連続ばりの変断面設計を行っている。(b)の代表的な研究に Gross and Prager³⁾ の一端固定他端単純支持のはりについてがある。また、筆者らは(c)に関する Horne⁴⁾ の研究に基づいて変断面2径間連続ばりの最小重量化を目的とした塑性設計を行い各種断面形状と軽量化について検討している⁵⁾。L.A. Twisdale⁶⁾ は連続ばりの各断面に必要とされる絶対最大曲げモーメントを動的計画法を用いて解く最小重量設計法を提案している。鋼構造物の格子桁構造に関する研究には Heyman の一連の研究^{7)~9)} があり、単純支持をもつ多くの並列主桁からなる直交正方格子桁の塑性解析および最小重量設計を行い、実験的にも検証している。米沢¹⁰⁾ は両端固定の2本主桁と1~3本までの横桁よりなる格子桁に偏心荷重が載った場合の極限解析を行い、実験的に考察した後、多主桁と1本横桁からなる直交格子桁の最小重量設計¹¹⁾、さらに、曲線格子桁の極限解析¹²⁾へと拡張している。Grigorian^{13)~16)} は集中固定荷重が格子桁の格点に作用する場合の任意の支持条件をもつ、ねじれ抵抗のない

多主桁からなる等断面直交格子桁の新しい塑性解析法を提案し、最小重量設計への可能性についてもふれている。倉田・園田¹⁷⁾ は移動集中荷重および分布荷重をうける格点間等断面格子桁の最小重量設計を行っている。Eyre and Galambos¹⁸⁾ は変動繰り返し荷重が作用する場合の3本主桁をもつ2径間連続格子桁の変形硬化解析について述べ、漸増塑性崩壊メカニズムおよび変形硬化荷重について検討している。格子桁の実験的研究に文献19)、崩壊形式に関するものに文献20)、斜め格子桁について文献21)などがある。

本研究は、上記(c)の考え方に基づいて、 m 本主桁 n 本横桁の変断面格子桁の塑性設計を行い最小重量化を目的として検討を加えたものである。また、同一の崩壊荷重を有する変断面格子桁、等断面格子桁を圧延H形鋼から製作し曲げ試験により、これら試験桁のもつ極限強度および崩壊性状について比較検討したものである。

2. m 本主桁 n 本横桁の格子桁の最小重量塑性設計

(1) 用いた仮定および条件

- 1) 使用鋼材を理想弾塑性材料として求めた桁の曲げモーメント・曲率曲線は単純塑性解析で用いる理想弾塑性性状とする。
- 2) 桁は塑性ヒンジを形成することのできるような断面構成とする。
- 3) 主桁、横桁のねじれ抵抗を無視した変断面直交格子桁を設計の対象とする。
- 4) 等間隔に配置された横桁は、すべて同一等断面からなり、曲げモーメントとせん断力を伝達する。
- 5) 崩壊時には横桁に塑性ヒンジが形成されるものとする。
- 6) 線荷重として単位幅員当り M_t/L_0 の荷重が桁上

* 正会員 工修 立命館大学助教授 理工学部土木工学科

** 正会員 Ph. D., 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

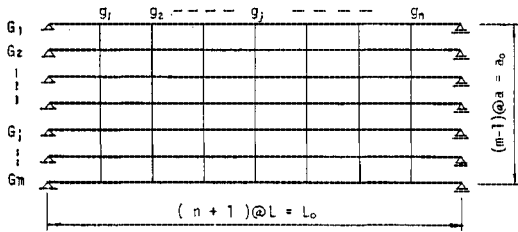


Fig. 1 A Simply-Supported Grillage consisting of $m \times n$ Beams

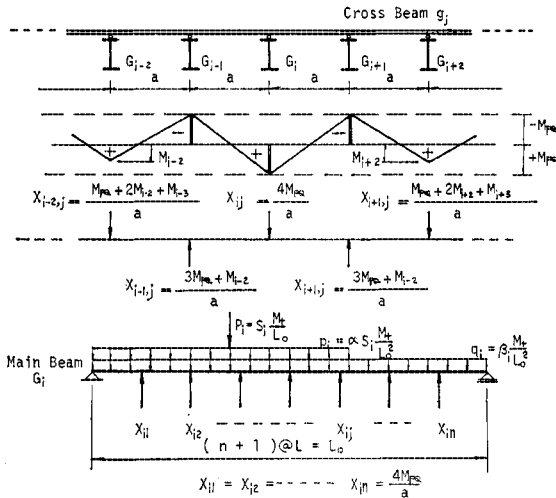


Fig. 2 Reactions at Nodes

を1個通過する。ここに、 M_i は基準曲げモーメントであり、線荷重 P_i 、分布活荷重 p_i 、等分布死荷重 q_i の任意の組合せ荷重が作用したときの単純はりのスパン中央の曲げモーメントに関係した項である (式(14)参照)。ここに、 \bar{i} は格子桁の幅員中央に位置する主桁 $G_{\bar{i}}$ (対称性から $\bar{i} = m/2$, あるいは $(m+1)/2$) を示す。したがって、 M_i は $G_{\bar{i}}$ 桁上の荷重強度を基準として表わされている。 L_0 はスパン長 (m) である。

7) 等分布活荷重として単位面積当り $\alpha M_i/L_0^2$ 、等分布死荷重として単位面積当り $\beta_i M_i/L_0^2$ が載荷されるものとする。ここに、 α は鋼道路橋示方書の L-20 荷重から、線荷重 5 t/m、活荷重 0.35 t/m² より $\alpha = 0.07 L_0$ となる。 β_i は主桁 G_i に作用する線荷重とスパン上の全死荷重との比を示す。

(2) 格子桁の塑性解法

a) 格点力および格点モーメント

図-1 に示すような等間隔に配置された主桁 ($G_i, i = 1, m$) および横桁 ($g_j, j = 1, \dots, n$) からなる格子桁の主桁 G_i と横桁 g_j の格点 ij に作用する格点力 X_{ij} は次のようにして求められる。すなわち、仮定 4), 5) から横桁 g_j が主桁 G_i 上の線荷重 P_i 、分布活荷重 p_i 、

Table 1 Reaction at Nodes

Main Beam	Reaction at Nodes	No. of Beams m
G_1	$X_{1j} = MPQ/a$	m
G_2	$X_{2j} = \begin{cases} 2MPQ/a \\ 3MPQ/a \end{cases}$	3 ≥ 4
G_i	$X_{ij} = 4MPQ/a$	≥ 5

等分布死荷重 q_i により崩壊メカニズムを形成したときの格点力 X_{ij} は曲げモーメントのつり合いより 図-2 のように表わされる。ここに、曲げモーメントの正負は、桁の下縁に引張を生ずるものを正、桁の上縁に引張を生ずるものを負とする。 MPQ は等断面横桁の抵抗塑性モーメント。 a は主桁間隔、 $M_{i\pm 2}, M_{i\pm 3}$ は弾性曲げモーメント ($|MPQ| > M_{i\pm 2}, M_{i\pm 3}$) である。したがって設計の対象となる主桁 G_i に作用する最大格点力 X_{ij} は表-1 のようにまとめることができる。次に、格点力 X_{ij} の作用によって主桁 G_i 上の格点 ij に生ずる格点モーメント M_{ij} の大きさは、選ばれた基準主桁 G_0 上の格点モーメント $M_{0i} (j=1)$ の比で表わせば、次式のようになる。

$$M_{ij} = \left\{ \frac{j(n+1) - j^2}{n} \right\} \omega_{i0} M_{0i} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。 $\omega_{i0} = X_{ij}/X_{0j}$ (表-1)。 M_{0i} は基準主桁 G_0 上の格点 $j=1$ に生ずる格点モーメント。 j は主桁 G_i の支点から j 番目の格点、 n は横桁本数である。

b) 抵抗塑性モーメント

図-3 に示すような主桁 G_i 上の P_i, p_i, q_i の作用による桁の必要抵抗塑性モーメントは、文献 5) と同様に、塑性解析の下限定理を用いて求めることができる。

ここに、 P_i, p_i, q_i は鋼道路橋示方書によりすでに、各主桁 G_i に分配された最大設計荷重強度を示す。 P_i のみが作用する場合は、次のようになる (図-4)。桁の正の曲げモーメント $M_S(x)$ は、

$$M_S(x) = \left(1 - \frac{x}{L_0} \right) P_i x_P + M_H(x), \quad x \geq x_P$$

$$M_S(x) = \left(1 - \frac{x_P}{L_0} \right) P_i x + M_H(x), \quad x \leq x_P$$

..... (2)

となり、 $M_S(x)$ の最大値 $M_{Smax}(x)$ は、 $x = x_P$ のときに得られる。また、図-4 から $M_H(x)$ は式 (1) を

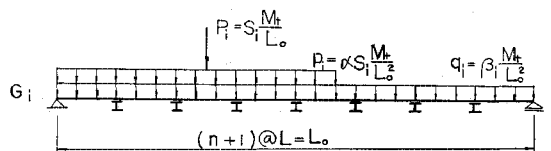


Fig. 3 Combined Loading Condition

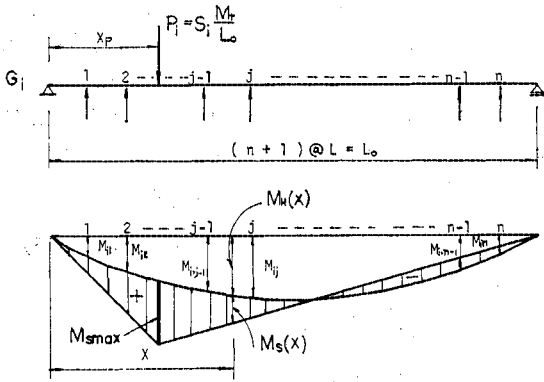


Fig. 4 Bending-Moment Diagram

用いて次のように示すことができる。

$$M_H(x) = \left\{ \frac{j(j-1)}{n} + \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot (n-2j+2) \frac{x}{L_0} \right\} \omega_{i0} M_{01} \dots (3)$$

ここに、 $(j-1)/(n+1) \leq x/L_0 \leq j/(n+1)$ である。

一方、移動線荷重 P_i に対して主桁 G_i 上の任意断面で正の曲げモーメント $M_{Smax}(x)$ と負の曲げモーメント $M_H(x)$ の絶対値とが等しくなる断面位置を $x = c_{ik} L_0$ 、ここに、 $(j-1)/(n+1) \leq c_{ik} \leq j/(n+1)$ 、 k は任意の整数) とおくと、 M_{01} は次式のようになる。

$$M_{01} = \frac{-(1-c_{ik})c_{ik}}{2\omega_{i0} \left\{ \frac{j(j-1)}{n} + \frac{n+1}{n} (n-2j+2)c_{ik} \right\}} \cdot P_i L_0 \dots (4)$$

となり、基準主桁 G_0 上の点 $x = c_{01}(j=1, \omega_{i0}=1, k=1)$ では、次式のようになる。

$$M_{01} = \frac{-(1-c_{01})}{2(n+1)} P_0 L_0 \dots (5)$$

式(5)を用いて主桁 G_i 上の任意格点間における $M_{Smax}(x)$ 、および $M_H(x)$ を表わすと式(6)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{Smax}(x)}{M_t} &= \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) \left(\frac{x}{L_0}\right) S_i - (1-c_{01}) \\ &\quad \cdot \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2\right) \omega_{i0} S_0 \\ &\quad \left. \begin{aligned} \frac{j-1}{n+1} \leq \frac{x}{L_0} \leq \frac{j}{n+1} \\ \frac{M_H(x)}{M_t} &= -(1-c_{01}) \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2\right) \omega_{i0} S_0 \\ &\quad \left. \begin{aligned} \frac{j-1}{n+1} \leq \frac{x}{L_0} \leq \frac{j}{n+1} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

ただし、ここに、 $S_i(S_0)$ は主桁 G_i (基準主桁 G_0) 上に作用する線荷重 $P_i(P_0)$ に対する崩壊線荷重係数を示す。 $M_t = 2P_i L_0$ 、 $u_1 = (n-2j+2)/2n$ 、 $u_2 = (j-1)/2n(n+1)$ 。ここで、 $M_{Smax}(x)$ と $|M_H(x)|$ の大小関

係は、 $F_{ij}(x) = \{|M_H(x)| - M_{Smax}(x)\} / M_t$ とおくと、

$$F_{ij}(x) = S_i \left(\frac{x}{L_0}\right)^2 + [2\omega_{i0} S_0 (1-c_{01}) u_1 - S_i] \cdot \frac{x}{L_0} + 2\omega_{i0} S_0 (1-c_{01}) u_2 \dots (7)$$

となり、式(7)の正負の判別により求まる。式(7)は x に関する2次式であり、

$$F_{ij}((j-1)L_0/(n+1)) \cdot F_{ij}(jL_0/(n+1)) = [1/n(n+1)^2]^2 \cdot [(n+1)\omega_{i0} S_0 (1-c_{01}) - nS_i]^2 \cdot j(j-1)(n-j+1)(n-j+2) \geq 0 \quad (\because n \geq j \geq 1)$$

であることを考慮すれば、1つの格点間 ($j-1 \sim j$) で次の3つの場合の抵抗塑性モーメント分布 $M_{Pij}(x)$ が考えられる。

(1) Case 1. $M_{Smax}(x) - |M_H(x)| = 0$ が満たされる場合

格点 $j-1 \sim j$ 間で x/L_0 の増加にともない式(7)から、 $F_{ij}((j-1)L_0/(n+1)) \geq 0$ 、 $F_{ij}(jL_0/(n+1)) \geq 0$ 、 $F_{ij}(x)$ の判別式 $D_{ij} = [2\omega_{i0} S_0 (1-c_{01}) u_1 - S_i]^2 - 8\omega_{i0} S_0 S_i (1-c_{01}) u_2 \geq 0$ 、および、 $F_{ij}(x)$ の根 c_{ik} が $(j-1)/(n+1) \leq c_{ik} \leq j/(n+1)$ の条件が同時に成立する必要があり、抵抗塑性モーメント分布は式(6)より次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{Pij}(x)}{M_t} &= (1-c_{01}) \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2\right) \omega_{i0} S_0 \\ &\quad \left. \begin{aligned} \frac{j-1}{n+1} \leq \frac{x}{L_0} \leq c_{i, 2j-2} \\ \frac{M_{Pij}(x)}{M_t} &= \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) \left(\frac{x}{L_0}\right) S_i - (1-c_{01}) \\ &\quad \cdot \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2\right) \omega_{i0} S_0 \\ &\quad \left. \begin{aligned} c_{i, 2j-2} \leq \frac{x}{L_0} \leq c_{i, 2j-1} \\ \frac{M_{Pij}(x)}{M_t} &= (1-c_{01}) \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2\right) \omega_{i0} S_0 \\ &\quad \left. \begin{aligned} c_{i, 2j-1} \leq \frac{x}{L_0} \leq \frac{j}{n+1} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ここに、 $c_{i, 2j-2}$ 、 $c_{i, 2j-1}$ は、 $M_{Smax}(x) - |M_H(x)| = 0$ となる断面位置を示し、式(4)=式(5)と置くことにより c_{01} の関数として求まる。

$$c_{i, 2j-2} \left. \begin{aligned} c_{i, 2j-1} \right\} &= \frac{1}{2S_i} [S_i - 2u_1(1-c_{01})\omega_{i0} S_0 \\ &\quad \pm \sqrt{(S_i - 2u_1(1-c_{01})\omega_{i0} S_0)^2} \\ &\quad \quad \cdot [-8u_2(1-c_{01})S_i\omega_{i0} S_0]} \dots (9)$$

(2) Case 2. $M_{Smax}(x) < |M_H(x)|$ が満たされる場合

格点 $j-1 \sim j$ 間で常に、 $M_{Smax}(x) < |M_H(x)|$ となる場合、このときの条件は、 $F_{ij}((j-1)L_0/(n+1)) >$

0, $F_{ij}(jL_0/n+1) > 0$, $D_{ij}{}_P < 0$ であり, 抵抗塑性モーメント分布は, 次式のようになる.

$$\frac{M_{Pij}(x)}{M_t} = (1 - c_{01}) \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2 \right) \omega_{i0} S_0$$

$$\frac{j-1}{n+1} \leq \frac{x}{L_0} \leq \frac{j}{n+1} \dots \dots \dots (10)$$

(3) Case 3. $M_{Smax}(x) > |M_H(x)|$ が満たされる場合

同様に, この場合は $F_{ij}((j-1)L_0/(n+1)) \leq 0$, $F_{ij}(jL_0/(n+1)) \leq 0$, $D_{ij}{}_P \geq 0$ の条件を必要とし, 抵抗塑性モーメント $M_{Pij}(x)$ として式 (11) を得る.

$$\frac{M_{Pij}(x)}{M_t} = \left(1 - \frac{x}{L_0} \right) \left(\frac{x}{L_0} \right) S_i - (1 - c_{01}) \cdot \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2 \right) \omega_{i0} S_0$$

$$\frac{j-1}{n+1} \leq \frac{x}{L_0} \leq \frac{j}{n+1} \dots \dots \dots (11)$$

次に, 横桁 $g_j (j=1, \dots, n)$ の抵抗塑性モーメント M_{PQ} は, 主桁 G_i と横桁 $g_j (j=1, \dots, n)$ の崩壊時の曲げモーメントのつり合いから求めると次のようになる. すなわち横桁 g_j はすべて等断面であることを考慮して表-1 から $i=j=1$ を選び, さらに横桁に生ずる曲げモーメントの正負を考えると $M_{PQ} = -X_{11} \cdot a$ となる. また, 主桁 G_i の不静定反力 $X_{1j} (j=1, \dots, n)$ の作用による格点 $j=1$ の不静定モーメント M_{11} は曲げモーメントのつり合いから $M_{11} = -nL_0 X_{11} / 2(n+1)$ となり, この M_{11} と式 (1) より $j=1$ のときの $M_{11} = \omega_{10} M_{01}$ とが等しいことより $M_{PQ} = 2(n+1)/n \times (a/L_0) \omega_{10} M_{01}$ を得る.

これに式 (5) を用いて次式のように表わされる.

$$\frac{M_{PQ}}{M_t} = - \left(\frac{1}{n} \right) (1 - c_{01}) \left(\frac{a}{L_0} \right) \omega_{10} S_0 \dots \dots \dots (12)$$

以上のようにして求められた格子桁の崩壊時の塑性ヒンジ位置は $M_{Smax}(x)$ の位置と全横桁が主桁 G_{i-1} , G_i , G_{i+1} と交差する全横桁断面となる. 図-3 に示すような荷重状態の場合は, 次のようになる. すなわち, Case 1, Case 2, Case 3 に対するそれぞれの条件は表-2 のようにまとめられる. 表中, $F_{ij}(x){}_P$ は式 (7), $F_{ij}(x){}_Q$ は, $\beta_i(x/L_0)^2 + [2\omega_{i0}\beta_0(1-d_{01})u_1 - \beta_i](x/L_0) + 2\omega_{i0}\beta_0(1-d_{01})u_2$, $D_{ij}{}_Q$ は $[2\omega_{i0}\beta_0(1-d_{01})u_1 - \beta_i]^2 - 8\omega_{i0}\beta_0\beta_i(1-d_{01})u_2$ である. また, d_{01} は q_i のみが作用するときの基準主桁 G_0 の支点と格点 $j=1$ 間で $M_{Smax}(x) - |M_H(x)| = 0$ となる断面位置を示す. 抵抗塑性モーメント分布 $M_{Pij}(x)$ は, 主桁 G_i に対して,

$$\frac{M_{Pij}(x)}{M_t} = S_i(X_P + \alpha X_P') + \beta_i X_Q + \omega_{i0} \cdot [S_0(X_P' + \alpha X_P') + \beta_0 X_Q'] \dots (13)$$

ここに,

$$M_t = 8 \left(\frac{P_i L_0}{4} + \frac{p_i L_0^2}{8} + \frac{q_i L_0^2}{8} \right) = 2 P_i L_0 + p_i L_0^2 + q_i L_0^2 \dots \dots \dots (14)$$

X_P は, 単純桁 G_i に単位線荷重 $P_i=1$ が作用したときの載荷点の曲げモーメント. X_P, X_Q は単純桁 G_i に単位分布活荷重 $p_i=1$, 単位等分布死荷重 $q_i=1$ が, それぞれ作用したときの x/L_0 点の曲げモーメント. X_P', X_Q' は単純桁 G_i に単位格点力 $X_{ij}=1$ が作用したときの x/L_0 点の曲げモーメント $M_H(x)$ を, それぞれの荷重が基準主桁 G_0 に作用したときの格点モーメント M_{0i} (式 (5) 相当) で表わした量である. したがって, 式 (13) の X に関する項は $M_{Smax}(x)$ と $|M_H(x)|$ の大小関係により, それぞれ次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} &M_{Smax}(x) > |M_H(x)| \text{ では,} \\ &X_P = \left(1 - \frac{x}{L_0} \right) \left(\frac{x}{L_0} \right), X_P' = \frac{1}{2} X_P \\ &X_Q = X_P, X_P' = (c_{01} - 1) \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2 \right) \\ &X_P' = \frac{1}{2} X_P', X_Q' = (d_{01} - 1) \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2 \right) \\ &M_{Smax}(x) < |M_H(x)| \text{ では,} \\ &X_P = X_P = 0, X_Q = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L_0} - 1 \right) \left(\frac{x}{L_0} \right) \\ &X_P' = (1 - c_{01}) \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2 \right), X_P' = \frac{1}{2} X_P' \\ &X_Q' = (1 - d_{01}) \left(u_1 \frac{x}{L_0} + u_2 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

横桁 g_j に対して,

$$\frac{M_{PQ}}{M_t} = \frac{\omega_{10}}{n} [S_0(X_P' + \alpha X_P') + \beta_0 X_Q'] \dots \dots \dots (16)$$

式 (16) の X_P', X_P', X_Q' は $M_{Smax}(x)$ と $|M_H(x)|$ の大小に関係なく次式で示される.

$$\left. \begin{aligned} &X_P' = (1 - c_{01}) \left(\frac{a}{L_0} \right) \\ &X_P' = \frac{1}{2} X_P' \\ &X_Q' = (1 - d_{01}) \left(\frac{a}{L_0} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

したがって, 図-1 に示す格子桁の重量 W は,

Table 2

Case	1		2		3	
x/L_0	$\frac{j-1}{n+1}$	$\frac{j}{n+1}$	$\frac{j-1}{n+1}$	$\frac{j}{n+1}$	$\frac{j-1}{n+1}$	$\frac{j}{n+1}$
$F_{ij}(x){}_P$	≥ 0	≥ 0	> 0	> 0	≤ 0	≤ 0
$F_{ij}(x){}_Q$	≥ 0	≥ 0	> 0	> 0	≤ 0	≤ 0
$D_{ij}{}_P$	≥ 0		< 0		≥ 0	
$D_{ij}{}_Q$	≥ 0		< 0		≥ 0	
$\frac{M_{Smax}(x)}{M_H(x)}$	$\frac{M_{Smax}(x)}{\geq M_H(x) }$		$\frac{M_{Smax}(x)}{< M_H(x) }$		$\frac{M_{Smax}(x)}{> M_H(x) }$	

$$\frac{W}{M_t L_0} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} w_{ij} + (m-1)nw_g \dots\dots(18)$$

となる。ここに、 w_{ij} は任意格点間の主桁重量

$$w_{ij} = k \int_{(j-1)/(n+1)}^{j/(n+1)} (M_{Pij}(x))^N dx$$

であり、 w_g は単位主桁間当りの横桁重量

$$w_g = k \int_0^a (M_{PQ})^N dx$$

である⁵⁾。 k, N は桁の断面形状に関する定数であり、後の数値計算例では、 $k=1, N=1$ として桁重量を求めている。式 (18) を最小にする c_{01} および d_{01} は、 W_P を線荷重と分布活荷重による格子桁重量、 W_g を等分布死荷重による格子桁重量とすると、それぞれ $\partial W_P / \partial c_{01} = 0$ および $\partial W_g / \partial d_{01} = 0$ から求めることができる。このようにして m 本主桁 n 本横桁の最小重量塑性設計は設計対象主桁 $G_i (i=1, 2, \dots, \bar{i})$ のそれぞれの主桁を基準主桁 G_0 に選んだときの格子桁抵抗塑性モーメント分布、および格子桁全重量をそれぞれ求め、その中から最小重量を与える抵抗塑性モーメント分布として求まる。

3. 数値計算例

(1) 3本主桁1本横桁の格子桁

図-5 は主桁間隔とスパンの比 a/L_0 の3通りに対し $P_1=P_2, p_i=q_i=0$ の場合の抵抗塑性モーメント分布を式 (13) により求めた結果を示したものである。

図から、主桁に対する塑性ヒンジ形成位置は、たとえば、 $a/L_0=0.4$ に対して、 G_1 桁では、 $0 \leq x/L_0 \leq 0.5$ 、 G_2 桁では、 $0 \leq x/L_0 \leq 0.4$ の範囲に存在することを示している。なお、横桁の場合は横桁中央断面である。

図-6 は $a/L_0=0.2$ に対して塑性解析の上限定理を用いて線型計画法 (LP 法)³⁾ により求めた結果と本解法による結果とを比較したものである。図には、LP 法による1スパンの分割数 N を4, 6, 8の3通りに対して求めた桁全重量 W_{LP} と図-5による桁全重量 W との重量比較が示してある。 W_{LP} は、分割の増加ともない、図-5による桁重量 W に近づいていくことがわかる。図-7は種々の a/L_0 に対する格子桁重量 W を $P_1=P_2, p_i=q_i=0$ の場合について等断面格子桁 (曲線 (1), (2)) および変断面格子桁 (曲線 (3), (4)) について示したものである。曲線 (1) の r 、曲線 (2) の r, η は、与えられた a/L_0 値に対して桁重量が最小となるときの、それぞれの値を示しており、曲線 (1) の r 値は $a/L_0=0.0, 0.2, 0.4$ に対して、 $r=0.0, 0.401, 0.802$ 、曲線 (2) の η, r 値は、 $a/L_0=0.0, 0.2, 0.4$ に対して $\eta=0.715, r=0.0, 0.143, 0.286$ である。曲線 (1), (2) と曲線 (3), (4) は a/L_0 の比に対してほぼ同じ割合で重量が増加していることがわかる。表-3には荷重比

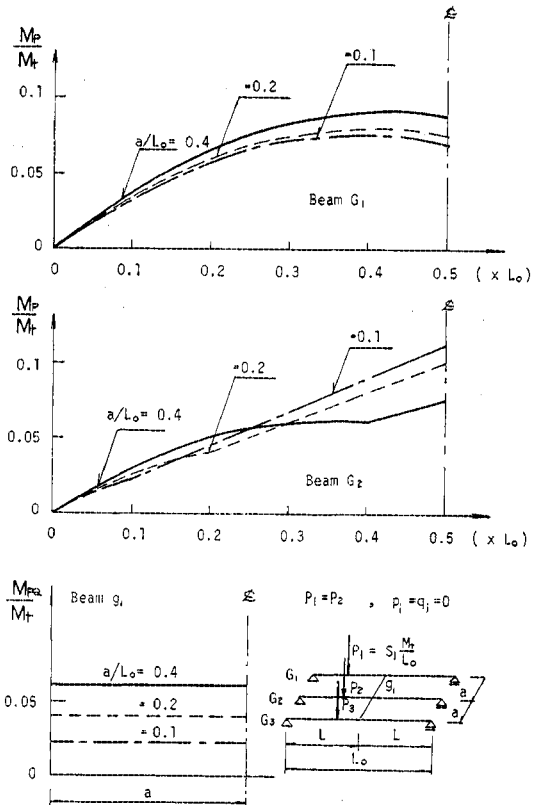


Fig. 5 Resisting Plastic Moment Diagram

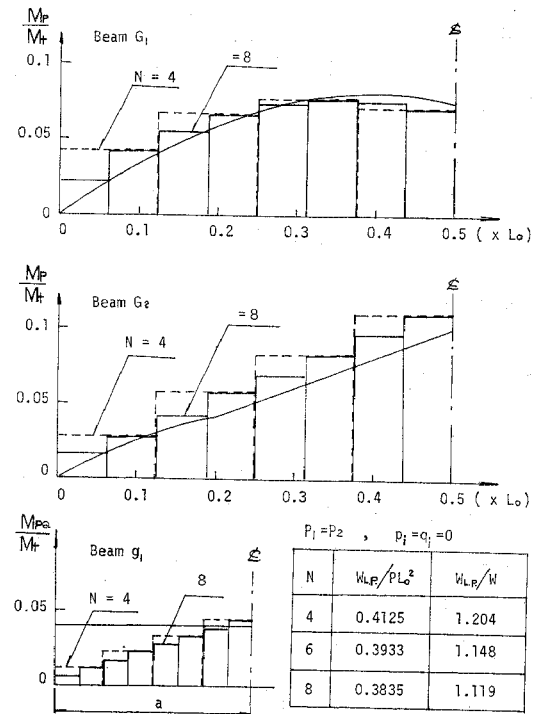


Fig. 6 Comparison of Resisting Plastic Moment Diagrams

Table 3

a/L_0	$c_{21}=d_{21}$	W/M_1L_0
0	0	0.142
0.1	0.1	0.148
0.2	0.2	0.165
0.3	0.3	0.189
0.4	0.4	0.218
0.5	0.5	0.250

$P_i : p_iL_0 : q_iL_0 = 1 : 2.8 : 2.0$ ($L_0 = 40$ m)
 $P_1 = P_2, q_1 = q_2$

$P_i : p_iL_0 : q_iL_0 = 1 : 2.8 : 2.0$ ($L_0 = 40$ m 相当) に対して $P_1 = P_2, q_1 = q_2$ として求めた格子桁重量 W と c_{ik}, d_{ik} 値がそれぞれの a/L_0 値に対して示してある。

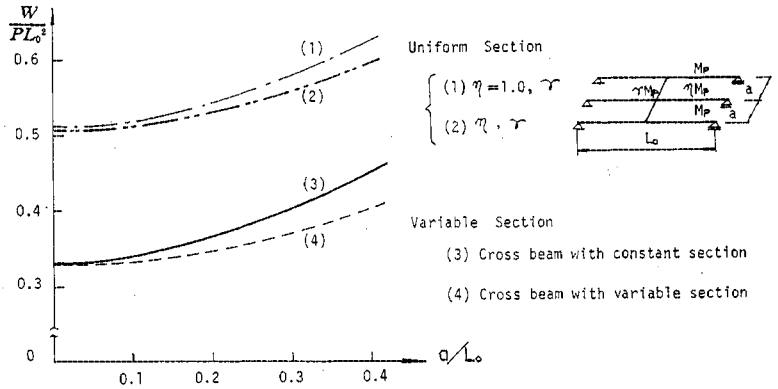


Fig. 7 Minimum Structural Weight - a/L_0 Relations

(2) 3本主桁3本横桁の格子桁

表-4 は、表-3 と同じ荷重比に対する $m=3, n=3$ の格子桁重量 W と最小重量を与える c_{21}, c_{22}, c_{23} 値を a/L_0 値に対して示したものである。図-8 は表-5 に示す 5通りの荷重比に対して $P_1 = P_2, q_1 = q_2, a/L_0 = 0.2$ の場合について求めたものである。図中、曲線1は P_i のみが作用したとき、曲線5は q_i のみのときに対応している。図から曲線2, 3, 4は荷重比の違いに対して抵抗塑性モーメントの分布形状がほぼ同形の曲線となっ

ていることがわかる。

(3) 5本主桁3本横桁の格子桁

表-6 は、表-3 および表-4 と同じ荷重比に対する $m=5, n=3$ の格子桁重量 W と c_{ik}, d_{ik} 値を a/L_0 に対して示したものである。表中、 $a/L_0 = 0 \sim 0.3$ は基準主桁が G_2 桁のとき、 $a/L_0 = 0.4, 0.5$ は基準主桁が G_3 桁のときそれぞれ最小重量を与えることを示している。図-9 は表-5 と同じ荷重比に対して $P_1 = P_2 = P_3, q_1 = q_2 = q_3$ として求めたものである。図-10 は $L_0 = 40$

Table 4

a/L_0	$c_{21}=d_{21}$	$c_{22}=d_{22}$	$c_{23}=d_{23}$	W/M_1L_0
0	0	—	—	0.142
0.1	0.1	—	—	0.148
0.2	0.785	1.460	1.468	0.165
0.3	0.809	1.300	1.636	0.191
0.4	0.906	1.110	1.859	0.226
0.5	1.0	1.0	2.0	0.270

$P_i : p_iL_0 : q_iL_0 = 1 : 2.8 : 2.0$ ($L_0 = 40$ m), $P_1 = P_2, q_1 = q_2$

Table 5

Curves	$P_i : p_iL_0 : q_iL_0$	S_i	α	β_i	M_i	L_0 (m)
1	1 : 0 : 0	0.500	0	0	$2P_1L_0$	L_0
2	1 : 1.4 : 2.0	0.185	1.4	0.370	$5.4 \sim$	20
3	1 : 2.1 : 2.0	0.164	2.1	0.328	$6.1 \sim$	30
4	1 : 2.8 : 2.0	0.147	2.8	0.294	$6.8 \sim$	40
5	0 : 0 : 1	0	0	1.000	q_iL_0	L_0

$P_1 = P_2, q_1 = q_2, \alpha = 0.07 L_0$

Table 6

a/L_0	$c_{21}=d_{21}$	$c_{22}=d_{22}$	$c_{23}=d_{23}$	$c_{31}=d_{31}$	$c_{32}=d_{32}$	$c_{33}=d_{33}$	W/M_1L_0
0	0.217	0.291	0.488	—	—	—	0.240
0.1	0.220	0.286	0.454	—	—	—	0.247
0.2	0.229	0.274	0.469	—	—	—	0.299
0.3	0.245	0.255	0.493	—	—	—	0.299
0.4	—	—	—	0.197	0.351	0.380	0.340
0.5	—	—	—	0.220	0.286	0.454	0.386

$P_i : p_iL_0 : q_iL_0 = 1 : 2.8 : 2.0$ ($L_0 = 40$ m), $P_1 = P_2 = P_3, q_1 = q_2 = q_3$

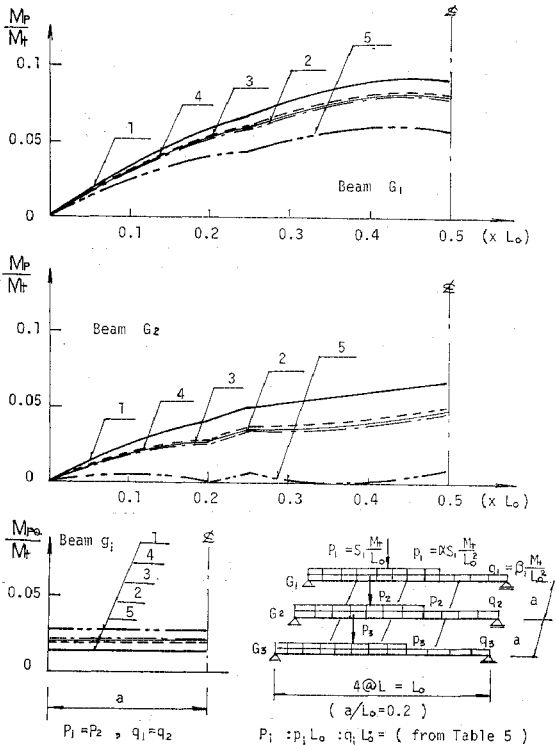


Fig. 8 Resisting Plastic Moment Diagrams for 3x3 Beams Grillage

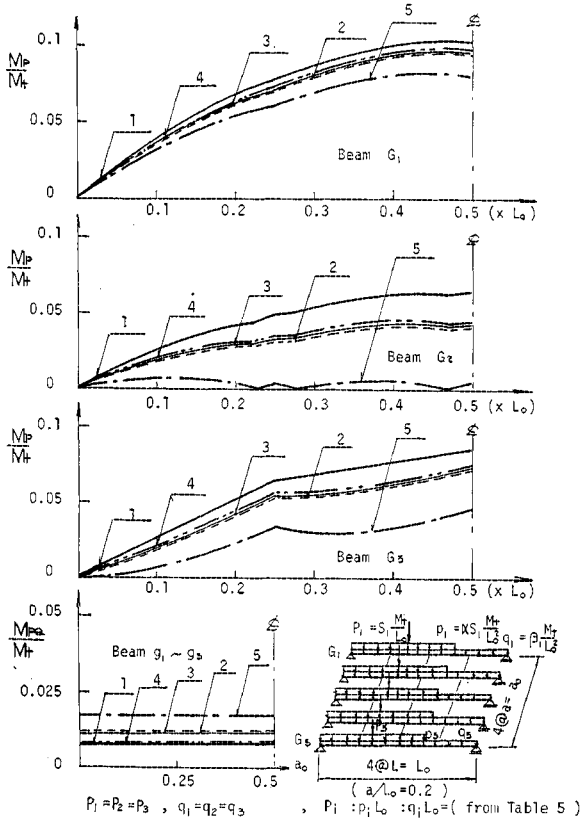


Fig. 9 Resisting Plastic Moment Diagrams for 5x3 Beams Grillage

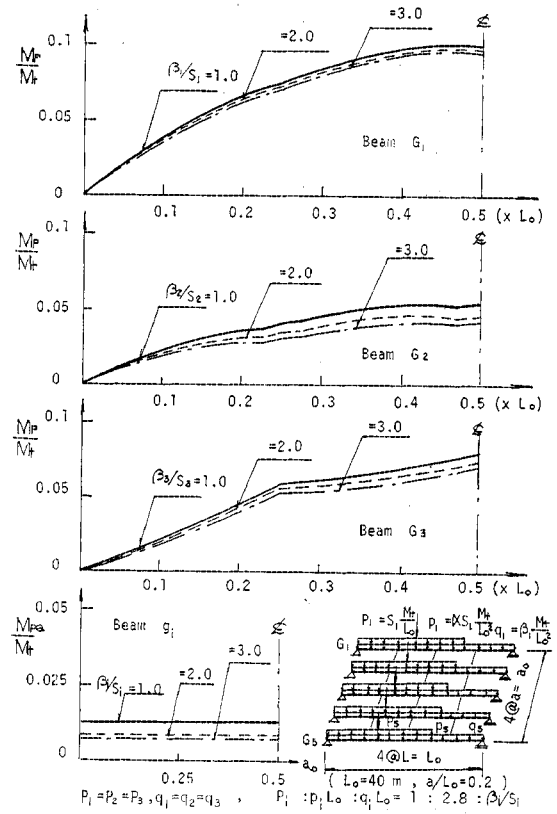


Fig. 10 Resisting Plastic Moment Diagrams for 5x3 Beams Grillage

m , $a/L_0=0.2$, $P_1=P_2=P_3$, $q_1=q_2=q_3$ に対する抵抗塑性モーメント分布と β_i との関係を示したものである。図から $\beta_i/S_i=1.0, 2.0, 3.0$ に対して抵抗塑性モーメント分布形状はほぼ同形の曲線となることがわかる。図-11 は荷重比 $P_i : p_i L_0 : q_i L_0 = 1 : 2.8 : 2.0$ ($L_0=40$ m), $P_1=P_2=\dots=P_i$, $q_1=q_2=\dots=q_i$ に対して a_0/L_0 値を一定とした場合の $m=3, 4, 5$, $n=1, 3, 5, 7$ のそれぞれの格子桁重量を示したものである。図中, () の中は (m 本主桁, n 本横桁) を意味している。図から a_0/L_0 の一定値に対して最小重量を与えるのは $a_0/L_0=0\sim 0.5$ の範囲では $m=5, n=5$ の格子桁であることがわかる。また, 格子桁の主桁本数が少ないほど a_0/L_0 値の増加に対して $W/M_i L_0$ の増加が急であることもわかる。

4. 実験的研究

(1) 実験目的

本実験は単一集中荷重に対する変断面格子桁の極限強度および崩壊性状を実験的に求めるために行うものであり, 主桁間隔とスパン長さの比 $a/L_0=0.2$ の 3 本主桁 1

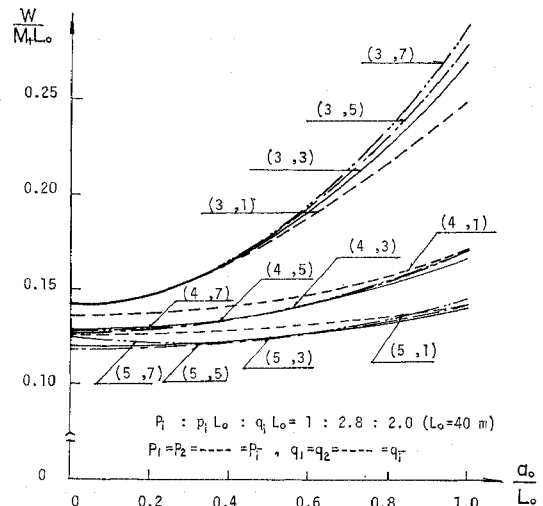


Fig. 11 Minimum Structural Weight- a_0/L_0 Relations for ($m \times n$) Beams Grillage

本横桁の格子構造を対象としている。

(2) 供試体と載荷位置

図-12 は, 各試験桁の載荷位置を示す。G-1, G-2 の

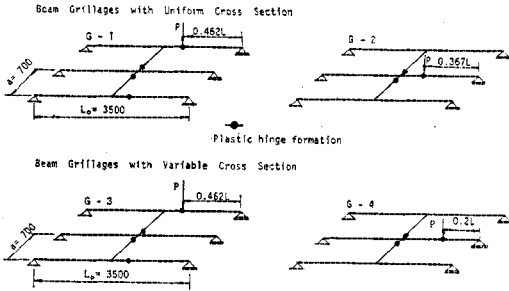


Fig. 12 Loading Condition

格子桁が等断面、G-3、G-4 桁が変断面格子桁を示す。G-1、G-2 桁の荷重位置は等断面格子桁（図一七、曲線(2)）としての崩壊荷重が最小となる荷重位置 $x/L_0 = 0.462$ および $x/L_0 = 0.367$ に選び、変断面格子桁（図一五、 $a/L_0 = 0.2$ ）に対して G-3 桁では、塑性ヒンジの形成可能な断面位置を $0 \leq x/L_0 \leq 1/2$ の範囲内で任意に選定できるから G-1 桁と同じ荷重位置を選び、G-4 桁では、同様に、 $0 \leq x/L_0 \leq 0.2$ の範囲で塑性ヒンジの形成が可能であるので $x/L_0 = 0.2$ を選んだ。

試験桁は、実験による崩壊機構の形成を容易にするために 図一12 に示した塑性ヒンジ形成位置の断面のみを本解析で得られた変断面および等断面格子桁の抵抗塑性モーメント分布を有する断面寸法とし、他の断面はそれ以上に断面積を大きくしてある。先に発表した文献 5) では変断面桁を製作して実験を行ったが、荷重荷点近傍における横倒れ変形を防止枠により拘束した。今回の実験は格子構造のため各桁の変断面による横倒れを防止する方策が困難となり横倒れによる塑性強度の早期の低減を防止するため、塑性強度によって生ずるとされる塑

性ヒンジ部近傍のみを実際の変断面形状とした。すなわち、崩壊機構を形成するのに必要な塑性ヒンジの箇所のみが使用圧延H形鋼フランジの一部を切り落して所要断面寸法（塑性断面係数 $Z(x) = M_P(x)/\sigma_y$ ）に成形加工されている。

したがって、図一13 に示す試験桁詳細図の切欠断面 1～5 のみが、それぞれ変断面桁、等断面桁として必要とされる抵抗塑性モーメントを有する断面となっている。図中、主桁の荷重荷点位置に相当する切欠断面 1、2、3 の断面寸法は抵抗塑性モーメントの分布形状が切欠部断面長（200 mm）に対して変断面格子桁でなめらかであり、等断面格子桁では同一であるので荷重荷点のみを抵抗塑性モーメント値に等しい断面寸法としてある。横桁断面は、変断面、等断面格子桁とも等断面横桁として主桁と横桁の支点で塑性ヒンジを形成するように塑性設計されているが、主桁と横桁の支点での塑性ヒンジ形成は供試体の製作および実験上難しいので 図一13 に示すように横桁の塑性ヒンジ形成位置は横桁中央位置より少し離れた切欠断面位置 4、5 とした。このため切欠断面 4、5 は、崩壊時の横桁の曲げモーメント勾配に忠実なテーパ付断面となっている。図中、中桁荷重の試験桁 G-2、G-4 では 1 度の崩壊実験を行い、耳桁荷重の試験桁 G-1、G-3 では両側の耳桁荷重により 2 度の実験を行った。これは、一方の耳桁と横桁の連絡をフランジ部どうし溶接した剛結合とし、他方の耳桁では、その結合をメタルタッチとして、ねじりに対して極めて抵抗の少ない構造とし、横桁の結合方法によるねじりの影響を実験的に調べたものである。表一7 は使用した H 形鋼の規格寸法と塑性ヒンジ部の実測寸法を示し、表中の番

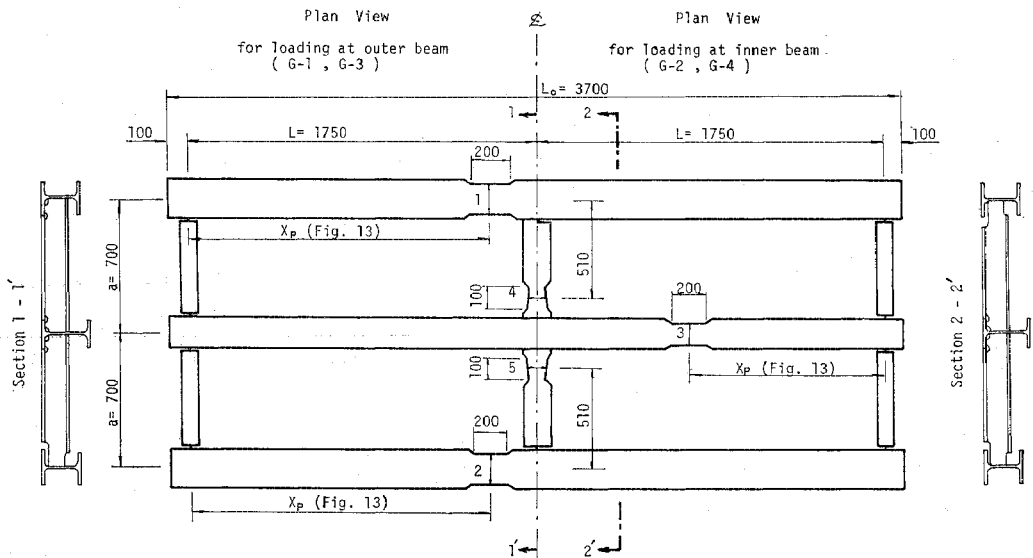


Fig. 13 Test Grillage Beams

Table 7 Dimensions of Test Grillages

Main Beams	Outer Beams			Inner Beams			Cross Beams		G-1, G-2		G-3, G-4	
	G-1, G-2	H-244×175×7×11		G-3, G-4	H-200×200×8×12		G-1, G-2	H-125×125×6.5×9		G-3, G-4	H-150×150×7×1.0	
	b, (t)			d, (w)			b, (t)		d, (w)			
	1	2	3	1	2	3	4	5	4	5		
G-1	159(10.8)	158(11.5)	—	246 (7.2)	245 (7.2)	—	83 (8.5)	82 (8.4)	127 (6.6)	127 (6.6)		
G-2	—	—	132(11.5)	—	—	201 (7.9)	84 (8.5)	82 (8.8)	127 (6.5)	127 (6.3)		
G-3	160(11.4)	164(11.5)	—	201 (7.6)	201 (7.8)	—	89(10.0)	88 (9.7)	150 (6.7)	150 (6.7)		
G-4	—	—	43(11.0)	—	—	245 (6.9)	89 (9.6)	91 (9.8)	150 (6.9)	150 (7.2)		

unit in mm

Table 8 Tensile Coupon Test Results

(SS 41)

Specimens	Thickness (mm)	σ_y (kg/cm ²)	σ_u (kg/cm ²)	$\frac{\sigma_u}{\sigma_y}$	$\epsilon_y \times 10^{-3}$	$\epsilon_{st} \times 10^{-3}$	$\frac{\epsilon_{st}}{\epsilon_y}$	$E(\times 10^9)$ (kg/cm ²)	$E_{st}(\times 10^{-6})$ (kg/cm ²)	$\frac{E_{st}}{E}$
F-1	11	2761	4710	1.699	1269	15075	11.4	2.15	0.0357	1/61.4
F-2	12	2453	4182	1.706	1282	12750	9.9	1.92	0.0461	1/41.5
F-3	10	2483	4261	1.715	1394	12375	9.6	1.77	0.0451	1/38.5
F-4	9	3120	4684	1.501	1532	19200	12.4	2.04	0.0436	1/46.7

号1～5は 図-13 に示す切欠断面のことである。b, t, d, w は、それぞれH形鋼のフランジ幅、フランジ厚、桁高、ウェブ厚である。写真-1 に載荷状況を示す。

(3) 実験結果と考察

表-8 に JIS 1 号引張試験結果を示す。表は各フランジ板厚に対する平均値を与えてある。図-14～17 は縦軸に荷重 P を、切欠部をもつ格子桁の単純塑性解析により求めた崩壊荷重 P_u (すなわち、変断面格子桁の P_u と同一値) で無次元化した量を取り、横軸に実験による載荷点下のたわみ量 δ を、計算による第2塑性ヒンジ形成時のたわみ量 δ_u で無次元化して示した試験桁の荷重-たわみ曲線である。図中、縦軸の 1.0 は計算による極限強度を示しており、各試験桁とも、この値を目標に設計され、実験が行われたことを示している。図中、曲線 1 は材料のひずみ硬化域を考慮して求めた荷重-たわみ曲線を示している。曲線 2 は変断面格子桁に対しては 図-5 に示す抵抗塑性モーメント分布に忠実な変断面に、等断面格子桁では 図-7 曲線 (2) に相当する格子桁の必要抵抗塑性モーメントに等しい等断面に使用圧延H形鋼のフランジ部を、それぞれ成形加工した格子桁 (Real Beams) に対するものを示し、材料のひずみ硬化域の効果を含んでいる。

曲線 3 と 4 は、それぞれ切欠部をもつ実験格子桁と Real Beams を対象に単純塑性解析を行った、それぞれの結果を示して



Photo. 1 G-1 during Test

いる。曲線 5 と 6 は、ひずみ硬化を考慮する場合と、考慮しない場合に対して横桁を取り除いた1本の変断面主桁の荷重-たわみ曲線を Real Beams に対して求めた

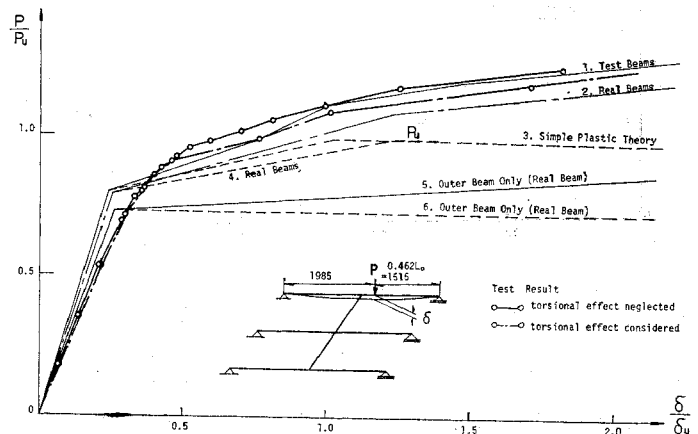


Fig. 14 Load-Deflection Curves for G-1

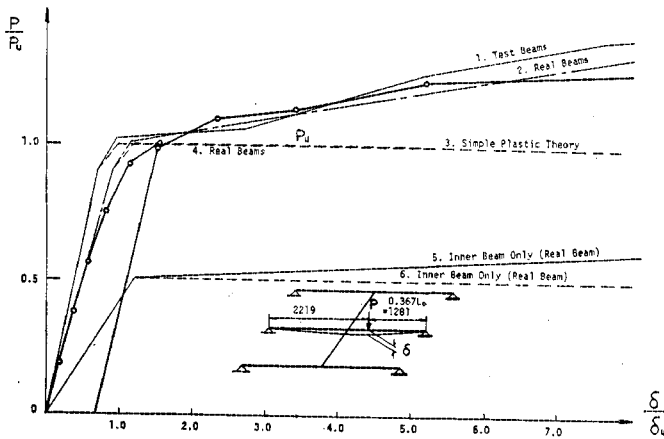


Fig. 15 Load-Deflection Curves for G-2

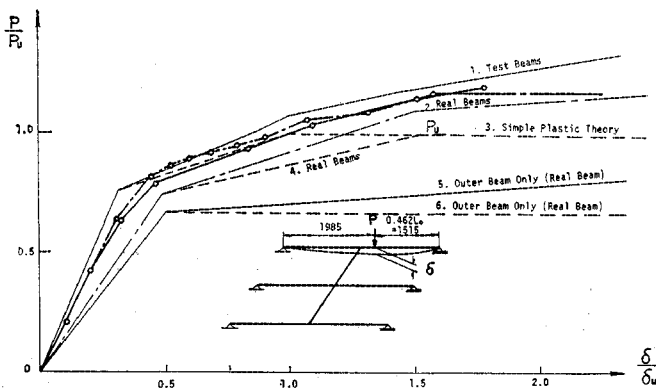


Fig. 16 Load-Deflection Curves for G-3

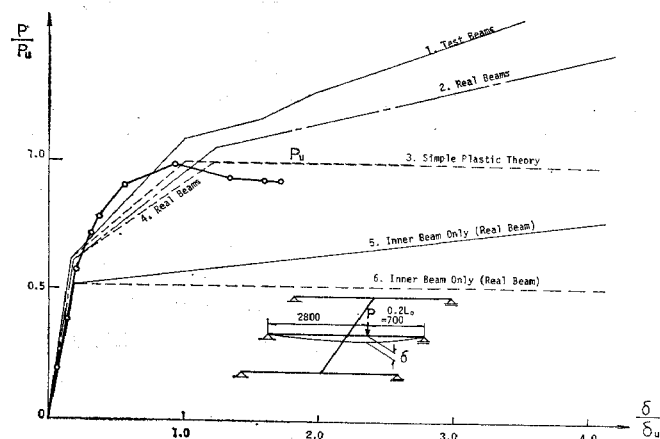


Fig. 17 Load-Deflection Curves for G-4

ものである。

計算により得られた曲線1と曲線2は本実験に用いた切欠部をもつ格子桁と変断面格子桁による荷重たわみ曲線を示しているが、両者を比較すると、実験桁は変断面桁に対して強度的には少し全体に上昇しているが、その

差はわずかであることがわかる。このことから、実験桁が変断面桁を代表するとみなすことができる。また、実験値は曲線1と良好な一致をみている。耳桁載荷の試験桁G-1, G-3では、横桁と主桁の結合方法によるねじれの影響は少ないようである。図-18は本実験に採用した切欠部断面形状が極限強度に与える影響を調べるために行った単純支持された一本主桁の崩壊実験結果である。図に示すようなNos. 3~6までの4種類の切欠断面をもち、切欠のないNos. 1, 2の桁との比較をしている。試験桁Nos. 1~6は、同一崩壊荷重で崩壊するように、スパン長、載荷点、切欠形状および切欠部の曲げモーメント勾配などを考慮して、格子桁実験に用いたと同じ圧延H形鋼(H-200×200×8×12)から製作したものである。縦軸は荷重Pを計算で得られた弾性限荷重P_yで無次元化した値をとり、横軸は切欠断面位置におけるたわみ量δを、その荷重時P_yのたわみ量δ_yで無次元化した値をとってある。これによると、等断面桁は弾塑性材料の桁として求めた所定のP_u値に近い桁強度を有しているのに対して、切欠をつけた桁は切欠部での曲率の集中化により大きな曲げひずみが生じ、その結果、切欠部は材料のひずみ硬化域までひずみを受け曲げ耐力の増加をもたらしている。この様子が図-14~17の荷重の上昇をもたらしているといえる。

5. 結 論

m本主桁n本横桁からなる変断面格子桁の塑性解法を示し、鋼道路橋示方書の線荷重、分布活荷重、等分布死荷重の任意の組合せに対する格子桁の最小重量塑性設計を行い、格子桁の主桁間隔とスパンの比によって重量比較を行った。また、実験的検証のために、これら解析結果から得られた変断面格子桁を切欠部をもつ格子桁によって置換えた格子桁を製作し、曲げ試験により崩壊荷重ならびに荷重変形関係について検討を加えた。得られた主な結論は、次のようである。

- (1) m本主桁n本横桁の変断面格子桁の最小重量塑性設計法を示し、3種類の組合せ荷重比に対する3本主桁1本横桁、3本主桁3本横桁、5本主桁3本横桁の格子桁の抵抗塑性モーメント分布を求めた。
- (2) 抵抗塑性モーメントを $M_{Pi}(x)/M_s$ の無次元

表示すれば、組合せ荷重比とは無関係に、ほぼ同形となることを3本主桁3本横桁、5本主桁3本横桁の格子桁を例にとり示した。ここに、 $M_{Pij}(x)$ は式 (13)、および M_i は式 (14) により求められる。

(3) a_0/L_0 値を一定とした場合の格子桁重量を $m=3, 4, 5, n=1, 3, 5, 7$ のそれぞれの格子桁を例にとり重量比較を行った。 $a_0/L_0=0\sim 0.5$ の範囲で5本主桁5本横桁の格子桁が最小重量を与えることを示した。

(4) 3本主桁1本横桁の変断面および等断面格子桁の曲げ試験を行い、崩壊荷重および荷重-変形関係について調べた。実験による塑性ヒンジの形成を容易にして、実験目的を明確にするため、塑性ヒンジ形成点近傍は変断面としての断面寸法を保ち、格子桁の他の部分は肉づけをして断面積を大きくとった。鋼材のひずみ硬化の影響と 図-18 で示したような切欠部がひずみ硬化に対して敏感であったため、理想弾塑性体をもとに変断面格子桁の最小重量塑性設計により求めた理論値より大きな値を示した。

おわりに、本研究を行うにあたり試験桁および立命館大学理工学部土木工学科の構造物試験載荷フレームの製作に並々ならぬご協力、多大のご援助をいただいた高田機工(株)矢幡健氏に深く感謝する次第である。また、立命館大学伊藤鉦一教授には、本研究をまとめるにあたり文献などでお世話になった。また、本実験に対し原口俊男君には修士論文の一部として、また研究室の各位には卒業論文として実験にデータ整理にご協力をいただいた。ここに厚くお礼申し上げる次第である。

6. 記 号

- a =主桁間隔
- a_0 =全主桁幅
- $c_{ik}=P_i, p_i$ を載荷した場合の主桁 G_i 上の $M_{Smax}(x)-|M_H(x)|=0$ の断面位置
- $d_{ik}=q_i$ を載荷した場合の主桁 G_i 上の $M_{Smax}(x)-|M_H(x)|=0$ の断面位置
- G_i =支点から i 番目の主桁
- g_j =支点から j 番目の横桁
- $\bar{i}=m/2$ あるいは $(m+1)/2$
- L =横桁間隔
- L_0 =格子桁のスパン長
- M_{ij} =格点 ij の格点モーメント
- M_0 =基準主桁 G_0 の格点 $j=1$ における格点モーメント

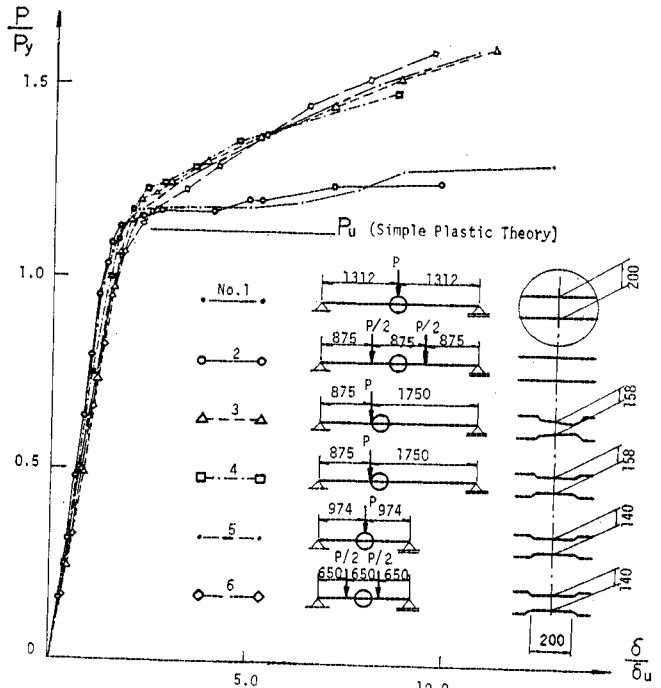


Fig. 18 Cut-Out Effect upon Load-Deflection Curves

- $M_H(x)$ = X_{ij} による曲げモーメント
- $M_{Pij}(x)$ = G_i 桁の格点 $j-1\sim j$ 間における抵抗塑性モーメント
- $M_i=8(P_i L_0/4 + p_i L_0^2/8 + q_i L_0^2/8)$ で示される基準曲げモーメント
- M_{PQ} =横桁の全塑性モーメント
- n =横桁本数
- m =主桁本数
- $P_i=G_i$ 桁上の崩壊線荷重
- p_i =等分布活荷重
- q_i =等分布死荷重
- $S_i=G_i$ 桁の崩壊線荷重係数
- W =格子桁重量
- $w_{ij}=G_i$ 桁の任意格点間重量
- w_0 =単位主桁間当りの横桁重量
- X_{ij} =格点 ij に作用する格点力
- α =等分布活荷重比
- $\beta_i=G_i$ 桁の等分布死荷重比
- $\omega_{i0}=X_{ij}/X_{0j}$

参考文献

- 1) Lamblin, D. : Minimum-weight Plastic Design of Continuous Beams Subjected to One Single Movable Load, J. Struct. Mech., 1 (1), 1972, pp. 133-157.
- 2) Save, M.A. and Prager, W. : Minimum Weight Design of Beams Subjected to Fixed and Moving Loads, J. Mech. Phys. Solids., 11, 1963, pp. 255-267.

- 3) Gross, O. and Prager, W. : Minimum Weight Design for Moving Loads, Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech; Berkeley Calif., 1962, pp. 1047-1051.
- 4) Horne, M.R. : Determination of the Shape of Fixed End Beams for Maximum Economy According to the Plastic Theory, Preliminary Publication and Final Report, IABSE, 4th Congress, Cambridge and London, 1953, pp. 119-123.
- 5) 福本啓士・伊藤 満：変断面はりの塑性設計に関する一考察, 土木学会論文報告集第185号, 1971, pp. 1~7.
- 6) Twisdal, L.A. : Absolute Minimum Weight Structures by Dynamic Programming Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST11, Technical Notes, 1973, pp. 2339-2344.
- 7) Heyman, J. : The Limit Design of Space Frames, J. Appl. Mech., 18, 1951, pp. 157-162.
- 8) Heyman, J. : The Limit Design of a Transversely Loaded Square Grid, J. Appl. Mech., 1952, pp. 153-158.
- 9) Heyman, J. : The Plastic Design of Grillage, Engineering Dec., 1953, pp. 803-807.
- 10) 米沢 博：格子ゲタ構造の極限荷重に関する一研究, 土木学会論文集第65号, 1959, pp. 10~15.
- 11) 米沢 博：格子桁構造の極限荷重および最小重量設計に関する一研究, 土木学会論文集第67号, 1960, pp. 11~18.
- 12) 米沢 博・三上市蔵：曲線格子桁の極限解析について, 土木学会論文集第132号, 1966, pp. 18~26.
- 13) Grigorian, M. : A Lower-bound Solution to the Collapse of Uniform Rectangular Grids on Simple Supports, Int. J. Mech. Sci. Vol. 13, 1971, pp. 755-761.
- 14) Grigorian, M. : The Plastic Design of Orthotropic Grids with Fixed Supports, Int. J. Mech. Sci., Vol. 14, 1972, pp. 197-203.
- 15) Grigorian, M. : Plastic Design of Regular Orthotropic Grids with Two Adjacent Edges Fixed, Free, or Hinged, Journal of Strain Analysis, Vol. 7, No. 4, 1972, pp. 279-284.
- 16) Grigorian, M. and Yaghai, S. : A Theorem for the Plastic Design of Regular Twistless Grids under Continuous Transverse Loading, Int. J. Solids Structures, Vol. 9, 1973, pp. 1421-1430.
- 17) 倉田宗章・園田恵一郎：格子桁の最小重量設計, 土木学会論文報告集第193号, 1971, pp. 13~22.
- 18) Eyre, D.G. and Galambos, T.V. : Shakedown of Grids, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 10, 1973, pp. 2049-2060.
- 19) 星 治雄・児島弘行・横田健一：格子桁の崩壊荷重に対する実験的追跡について, 土木学会第24回年次学術講演集, I-18, 1969.
- 20) 児島弘行：格子桁の崩壊に関する2・3の性状について, 土木学会第25回年次学術講演集, I-87, 1970.
- 21) 三上市蔵・米沢 博：斜め格子桁の極限解析, 土木学会関西支部年次学術講演集, I-18, 1972.

(1974.11.8・受付)