土木学会論文報告集
第 258 号・1977 年 2 月

ネットワーク容量増強問題と最適ネットワーク問題への拡張について

THE NETWORK CAPACITY EXPANSION PROBLEM AND ITS EXTENSION TO THE OPTIMAL NETWORK PROBLEM

西　村　昂*
By Takashi NISHIMURA

1. まえがき

ネットワークの容量増強は，交通需要の増大に伴って道路網および鉄道網においてこれまで長年繰り返されてきた．既存のネットワーク容量を交通需要に合うように合理的に増強することは交通対策の重要な柱の1つといえる．道路網においては交通需要増大に対応する道路網容量の増大が追いつかないことや自動車交通の外部不経済のために交通需要を抑制することによって道路網容量とバランスさせる方向の対策に移行しつつあるが，しかしいかなる交通需要に対しても道路網容量の不足を見つけ出し，最適な容量増強計画を立案することは基礎的な重要性をもっているといえよう．

ネットワークの容量増強は従来，ネットワークへの交通配分により容量不足区間を発見し，それを補う容量増強計画を立案する方法が行われているといえる．すなわち計画 OD 交通量を計画道路網案に配分して各区間別の交通量を推定し，容量の過不足を検討し，計画道路網を修正し，ふたたび配分によって適正容量をもっているかどうかを調べるという繰り返し近似法によって行っているといえる．この方法は現状では最も実用的な解法ということができよう．

これに対してまったく別の考え方によるアプローチを考えることができる．これはネットワーク容量を解析するためのカット法[1]に基礎をおく方法で，計画 OD 交通量に対してネットワークのすべてのカットにそこを通過するフローに対する容量を持たせるように計画する解法といえる．したがって既存ネットワークのすべてのカットにおける計画交通量に対する不足容量を補う最適増強計画の作成を目指すものといえる．

このような問題に対して，これまで Fulkerson によるラベリング法の応用によりアプローチしたものや[2]，Hu による modified cost による方法[3]，さらに Christofides & Brooker による Branch and Bucktrack 法を利用したツリー探索法[4]などの例があるが，いずれもシングルコモディティフローに対するものである．ここで述べるカットを利用する方法も当然利用することができる．

カットを利用するこの方法はさらに最適ネットワーク問題にも発展させることが可能と考えられる．最適ネットワーク問題は計画交通量に対して与えられた目的関数を最適化するネットワーク構成（形態）を求める問題といえるから，この方法では計画交通量に対する容量を満たす最小費用のネットワーク構成はさきの最適増強計画の一般的拡張として定式化できる．また費用制約下での容量最大のネットワーク問題も同様に定式化することができる．

ここでは容量増強問題および最適ネットワーク問題への拡張について，問題の定式化および解法を述べ，簡単な計算例をも示してみたい．

2. ネットワーク容量増強問題

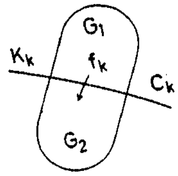
(1) 問題の考え方

計画交通量に対してネットワークの容量が不足する場合の容量増強の考え方は，これまで OD 交通量をネットワークへ配分することによって容量不足路線と不足容量の大きさを推定するいわゆる交通量配分方式に基礎をおいているといえる．

これとは別にネットワーク理論的立場からのアプローチも可能である．これはネットワークの任意のカットにおいてカット容量とカットを通過する交通需要の関係から考察するものである．

ネットワーク G の任意のカットを K_k とし，これにより G は2つの部分 G_1, G_2 に分割されるものとする．カット K_k を構成するアークの容量の和を C_k とすると，これはカット K_k の容量を表わす．カット K_k は

* 正会員　工修　大阪市立大学助教授　工学部土木工学科



図—1　カット K_k

ネットワークを2つの部分ネットワークに切断するが，一方から他方への容量とその逆方向の容量とは区別しなければならないから，方向がお互いに逆な2つのカットの対と考えることができる．このカットを通過する交通量は計画 OD 交通量より求められ，1つの部分ネットワークに起点をもち，他の部分ネットワークに終点をもつ交通量の和として表わされる．計画 OD 交通量の OD パターン（単位 OD 表）より通過交通量を求めると，これは全発生交通量に対するカットの通過交通量の比率を表わす（図—1）．

$$f_k=\sum_{i\in G_1}\sum_{j\in G_2} p_{ij} \cdots\cdots(1)$$

ただし p_{ij} は単位 OD 表の要素で，i から j へのフローの割合，f_k はカット K_k の通過交通量（比率）を表わす．通過実交通量 F_k は，全発生交通量を T とすると

$$F_k=T\cdot f_k \cdots\cdots(2)$$

で表わされる．

ネットワークの任意のカット K_k において，カット容量はカットの通過交通量より常に大でなければならないから，次式が満たされなければならない．これはまたすべてのカットで成り立つ必要がある．

$$C_k \geqq T\cdot f_k=F_k,\ k\in \boldsymbol{K}\ \text{（カット集合）}\cdots\cdots(3)$$

次に，カット K_k におけるカット容量 C_k と通過交通 f_k の比を求めこれを T_k とすると，式 (3) より次式が成り立つ

$$T_k=C_k/f_k \geqq T \cdots\cdots(4)$$

必要がある．いま式 (4) の等号が成り立つカットが存在するし，これを K_m とする（2つ以上存在する場合はすべてをとりあげる）．K_m においては，そのカット容量 C_m はその通過交通 f_m によってすべてうめつくされているから，f_m を構成するアークには f_m を通過する OD ペア以外の交通が入り込む余地はない．したがって K_m 以外のすべてのカットにおいて，K_m を構成するアークを除外した残りの容量 C' で通過交通 f'（f_m を構成するフローとそれに対応する容量をも除外して）の処理が可能かどうかのチェックが必要となる．すなわち次式のように T_k' を定義すると

$$T_k'=\frac{C_k'}{f_k'} \cdots\cdots(5)$$

$$T_k' \geqq T,\ (k\in K,\ k\neq m) \cdots\cdots(6)$$

であることが必要となる．

したがって問題を (3),(6) の条件下で解くことが困難であるから，(3) の条件のみで解いた後で (6) の制約条件によるチェックを行う方法が考えられる．

（2）問題の定式化

与えられたネットワークが与えられた計画 OD 交通量 T に対して容量が不足する場合に，T を受け入れようとすればネットワークのどこかで容量不足を補う必要があるが，これに対する最適計画を考察してみよう．

この最適容量増強計画の考え方には，アーク容量を明確に定義し，容量の過不足を数量的に表わせる場合は，容量不足が生じないような最小費用の容量増強計画が存在する．一方，アーク容量ははっきりときめられないという立場に立ち，交通量の増加は走行速度の低下をもたらし，走行速度の低下は遅れ（delay）の増大につながると考えれば，遅れ損失と増強投資の両方を考慮した最適計画（たとえば遅れ損失と建設投資額の和の最小となる計画）なども存在する．また一定の投資額制約下での容量最大あるいは遅れ最小の容量増強計画も定義でき，問題の記述のしかたによっていくつかの最適計画が考えられることになる．

ここでは，固定したアーク容量を定義し，容量不足を数量的に表現できる場合の問題定式化を行ってみよう．計画交通量を T, OD パターンを P, ネットワークの全カット集合を K, K の要素である K_k の容量を C_k, K_k の通過交通割合を P から求めたものを f_k とすると，各カットにおいて

$$C_k-T\cdot f_k$$

を計算し，これが正ならばカット容量は余裕が存在し，負ならばカット容量は不足しているといえる．すべてのカットについて容量の過不足を調べ，容量の不足するカットのみを集めた容量不足カット集合を $\overline{K}$ とし，その不足容量の大きさ R_k を要素とする不足容量ベクトルを R とする．

$$R_k=T\cdot f_k-C_k \cdots\cdots(7)$$

また容量不足カットに含まれるすべてのアークを $\overline{A}$ とするとき，$\overline{K}$ と $\overline{A}$ のカット行列（cutset matrix）を $\overline{M}$ とすると，

$$\overline{M}=\{m_{ij}\} \cdots\cdots(8)$$

ただし $\begin{cases} m_{ij}=1 & \text{カット } i \text{ がアーク } j \text{ を含む時} \\ \quad\ \ =0 & \text{カット } i \text{ がアーク } j \text{ を含まない時} \end{cases}$

で表わされる．

アーク $\overline{A}$ の容量増強計画ベクトルを x で表わすと，最適増強計画は，制約条件 (9) を満たし，目的関数 (10) を最小化する x として求められる．

$$\text{制約条件}\quad \left.\begin{array}{r} \overline{M}\cdot x \geq R \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots(9)$$

$$\text{目的関数}\quad Z=\sum_e f_e(x) \rightarrow \min \cdots\cdots(10)$$

ただし $f_e(x)$ はアーク e の容量増強費用関数を表わす．

この問題は費用関数 $f(x)$ の形によって解法が変化するが，線形費用関数の場合は線形計画問題となる[5]．

ネットワークのすべてのカットの求め方については，任意のツリーに対する基本カットよりそれらを組み合わせることにより他のすべてのカットを導き出すことができる[6]．

また容量不足カットの求め方については，すべてのカット探索を行わなくても，フローシミュレーションによっても求めることができる．実用的に利用できるフロー配分原則にしたがって計画 OD 交通量を配分した場合の容量超過アークの出現状況より求めることができる．

（3） 解　　法

上で定式化した問題はアーク容量増強の費用関数の形によって解法が変わるが，ここではいくつかの代表的な費用関数の形に対する解法について考察してみたい．費用関数の形として 図―2 に示すものを考えてみよう．容量を x だけ増強する場合の費用を $f(x)$ とすると，これらは次のように表わされる．

（i） 一 定 値　$f(x)=b$,（$b>0$）（図―2（a））

（ii） 単価一定　$f(x)=ax$,（$a>0$）（図―2（b））

（iii） 単価一定かつ固定費のある場合

$f(x)=ax+b$,（$a>0$, $b>0$）（図―2（c））

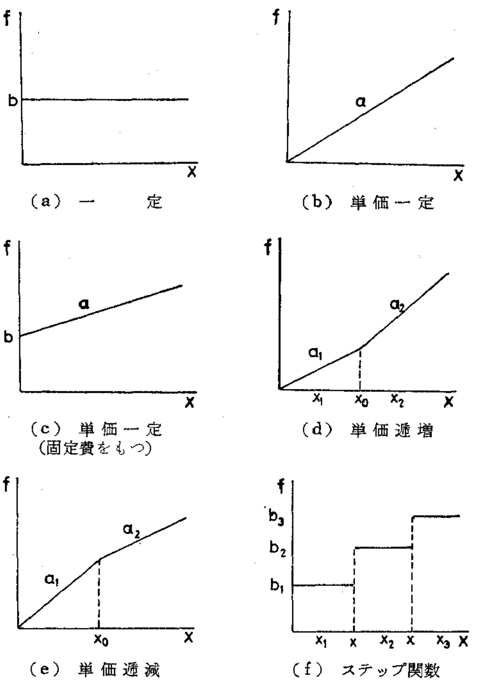
ただし，$x=0$ の時，$f(x)=0$

（iv） 単価逓増　$f(x)=a_1x$, $0\leqq x\leqq x_0$（$a_1>0$）（図―2（d））

$f(x)=a_2x+b_2$, $x_0\leqq x$（$a_2>a_1$）

単価逓減　上と同様，（$a_1>a_2>0$），（図―2（e））

（v） ステップ関数　$f(x)=b_i$, $x_{0i-1}\leqq x\leqq x_{0i}$, $i=1, 2, \cdots$（$b_1<b_2<\cdots$），（図―2（f））



図―2　費用関数のタイプ

（i）の費用関数は一定費用 b で大きな容量増強が可能であるから，各容量不足カットに1つのアーク増強が行われればよいから，解法としては最小被覆（minimum cover）を求める問題となり，0-1 変数計画法などが利用できる．

（ii）の費用関数に対する解法は，線形計画問題の標準形を解くことであるからシンプレックス法を利用することができる．

（iii）の費用関数に対する解法は，次のような処理により 0-1 変数を含む混合整数計画問題とすることができる[7]．すなわち費用関数式（11）

$$f(x)=ax+b \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

を，0-1 変数 y を導入して式（12）のように書きかえる．

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax+by \\ 0\leqq y\leqq 1 \quad \text{(0-1 変数)} \\ 0\leqq x\leqq Ny \text{（}N\text{ は大きな正数）} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(12)$$

（iv）の費用関数の場合は，増強単価が増加容量によって逓増する場合は変数分割をすることにより線形計画問題とすることができる．図―2（d）において

$$\left.\begin{array}{l} x=x_1+x_2 \\ f(x)=a_1x_1+a_2x_2,\ a_1<a_2 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

とおけば，最小化問題においては a の小さいところから採用されるから x_1, x_2 という順にうめられていき，不連続な解とはならない．図―2（e）に示すような単価逓減形に対しては上のような処理ができなく，別の工夫が必要となる．

（v）の費用関数の場合の解法は，変数分割により 0-1 変数計画問題となり，擬ブール計画法（Pseudo-Boolean Programming）等によって解くことができる[8]．

$$x=x_1+x_2+x_3+\cdots$$

とおく．ここで x_1, x_2, x_3, … は 0-1 変数で，かつ

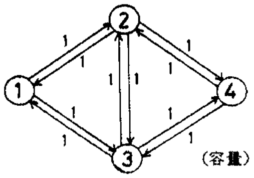
$$0\leqq x_1+x_2+x_3+\cdots\leqq 1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

を満たし，費用関数 $f(x)$ を次のように書けばよい．

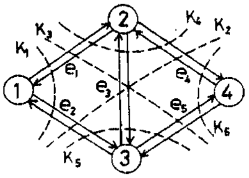
$$f(x)=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\cdots \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

（4） 数値計算例

ここで簡単な数値計算例を示してみよう．図―3 に示すネットワークに 図―4 に示す OD パターンをもつフローが流れるとすると，図―5 に示す各カットに対して，表―1 に示す各カットの処理可能交通量 T_k が求



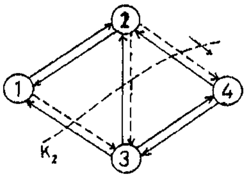
図—3 ネットワーク
(例題)



図—5 カ ッ ト

O＼D	1	2	3	4
1	0	0	0	0.5
2	0	0	0.3	0
3	0	0.1	0	0
4	0.1	0	0	0

図—4 OD パターン



図—6 最小カット

表—1 カットの処理可能交通量

カット	C_k	f_k	T_k	C_k	f_k	T_k
K_1	2	0.5	4	2	0.1	20
K_2	3	0.8	3.75	3	0.2	15
K_3	3	0.6	5	3	0.4	7.5
K_4	3	0.1	30	3	0.3	10
K_5	3	0.3	10	3	0.1	30
K_6	2	0.5	4	2	0.1	20

注：左欄はノード1を起点側に含む方向とし，右欄はその逆方向を示す

表—2 C_2, f_2 を除いた場合の処理交通量

カット	$C_k(m)$	$f_k(m)$	C_k'	f_k'	T_k'
K_1	1	0.5	0.125	0	∞
K_2	—	—	—	—	—
K_3	2	0.5	1.125	0.1	11.25
K_4	1	0.3	1.875	0	∞
K_5	1	0.3	1.875	0	∞
K_6	1	0.5	1.125	0	∞

められる．これよりネットワークの容量は図—6のようにカット K_2 で制約され，その最大フローは 3.75 であることがわかる．また式(5)，(6) の判定も表—2 に示すように成り立っているから $T=3.75$ は実行可能といえる．

いま，計画交通量 T が6であるとすると，表—1 の中の T_k が6未満の値をもつカットは容量不足となる．アークは両方向とも同じ容量をもつものとし，容量増加についても同様に考える．容量不足カットは K_1, K_2, K_3, K_6 の4つでこれらに含まれるアークは e_1～e_5 のすべてであるから，これらの容量増強量をそれぞれ x_1～x_5 とする．また容量増強の費用関数は線形とし，その単価は表—3 に示すものとする．計画交通量 $T=6$ を受け入れるための費用最小の容量増強計画は次のように定式化できる．

表—3 アーク容量の増強単価

アーク	増強単価
e_1	2
e_2	1
e_3	3
e_4	2
e_5	1

容量不足カットにおいて，カットの容量増強量はカットの不足容量にカットの通過交通量の割合をかけた実不足量を上まわればよいから，これを制約条件として表わすと次のようになる．

$$\left.\begin{array}{lll} K_1 \text{ において} & x_1+x_2 & \geqq 2\times 0.5 \\ K_2 \text{ において} & x_2+x_3+x_4 & \geqq 2.25\times 0.8 \\ K_3 \text{ において} & x_1+x_3+x_5 & \geqq 1\times 0.6 \\ K_6 \text{ において} & x_4+x_5 & \geqq 2\times 0.5 \\ & x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \cdots\ x_5\geqq 0 & \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(16)$$

を満たし，増強費用を表わす目的関数 Z を最小化する増強計画を求める問題で，

$$Z=2x_1+x_2+3x_3+2x_4+x_5\rightarrow\min \quad \cdots\cdots(17)$$

これは線形計画問題となるから，これをシンプレックス法（双対法）で解くと次のような最適解が得られる．

$$x_2=1.8,\quad x_5=1$$

またこの時の増強費用は往復分を入れて 5.6 である．

3．最適ネットワーク問題への拡張

（1） 問題の定式化

これまでネットワークの容量不足に対する最適容量増強計画の問題を考えてきたが，この問題に対する考え方は一般的な最適ネットワーク問題にも拡張することができる．最適ネットワーク構成に関しても目的関数，制約条件の設定方法により種々のものが考えられる．これまで代表的な考え方の1つとして建設費の制約下で走行距離を最小化するネットワークの探求が行われていたが，ここでは交通需要に対する容量を満たす最小費用のネットワーク構成を考えてみよう．これら2つの最適ネットワークは目的指標が異なるからネットワーク形態も当然相違する．しかし建設費制約下で，走行距離最小化ネットワークと容量最大化ネットワークは線形費用関数で小さな容量から連続的にいかなる容量設定も可能とする場合は同じ形態となることが説明できる[9]．

ここでネットワーク容量面からみた1つの最適ネットワークとして，計画交通量を受け入れられる最小建設費用のネットワーク構成問題を定式化してみよう．

計画交通量を T，OD パターンを P，ネットワークのすべてのカット集合を K とし，K に含まれる各カット K_k の容量を C_k，カットを通過する交通需要（割合）を f_k とすると，各カットにおいて容量が通過交通量より大でなければならないから，

$$C_k\geqq T\cdot f_k,\quad k\in K \quad \cdots\cdots(18)$$

を制約条件として満たす必要がある．これはさきの容量増強計画問題で不足量を満たす制約式を全通過交通量に対する容量を満たすように書きかえたものである．カットとアークの接続行列（カット行列）を M とするとその要素 m_{ij} は次のように表わされているとする．

$$M=\{m_{ij}\} \quad \cdots\cdots(19)$$

$$\text{ただし}\left\{\begin{array}{ll} m_{ij}=1 & \text{カット } i \text{ がアーク } j \text{ を含む時} \\ \quad\ \ =0 & \text{カット } i \text{ がアーク } j \text{ を含まない時} \end{array}\right.$$

各アークの容量設定計画ベクトルを x とすると，式(18) は次のように表わされるから，

$$\left.\begin{aligned}\text{制約条件}\quad C=M\cdot x &\geqq T\cdot f\\ x &\geqq 0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

の下で，目的関数

$$Z=\sum_{e} f_e(x)\to\min \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

とする容量設定計画，すなわちこの場合の最適ネットワーク問題が定式化される．f は通過交通（割合）ベクトル，C は容量ベクトルを表わす．各種の費用関数に対する計算方法は **2.(3)** で述べた方法その他が可能である．

次に建設費用が制約条件として課された場合の容量最大のネットワーク構成問題について考えてみよう．ネットワーク容量はカット K_k の処理可能交通量 T_k の中の最小値で制約されるから，この問題はカットの処理交通量 T_k の最小値が最大となるネットワークを求める問題となり，T_k に対する Maxmin 計画問題となる．

この解法として，経験則を導入して線形計画問題とする方法が可能である．すなわち，カットの通過交通割合 f_k の大きい断面ほど容量に余裕がないと考えられるから，f_k の大きさによって大小順にカットを並べかえかつ番号もつけかえて，次式が成り立つようにする．

$$f_1\geqq f_2\geqq f_3\geqq\cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

これに対するカットの処理可能交通量 T_k も f_k の大きい断面ほど容量の割り当てが困難で，f_k の小さい断面では容量の割り当てが少なくても T_k は大きくしやすいから，カットの処理交通量 T_k を次式のように形成することにし，

$$T_1\leqq T_2\leqq T_3\leqq\cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

ただし　$T_k=C_k/f_k$

これを制約条件として加えることにする．すると目的関数としては T_1 を最大にすればよいことになる．

$$Z=T_1\to\max \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

この問題は建設費用関数が線形の時，線形計画問題となる．制約 (23) はそれほど無理な制約とは考えられないので実用的にも利用できる手法と考えられる．また式 (23) の代りに

$$T_k\geqq T(k=1,2,\cdots) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)'$$

とし，式 (24) の代りに

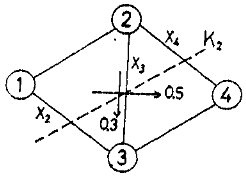
$$Z=T\to\max\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)'$$

とする方法も可能である[11]．

このような最適計画問題は容量増強計画に対しても同様に適用することができる．

(2) 迂回制約の考慮

これまで述べてきた問題定式化におけるカット容量制約はカット断面全体での容量に関する制約を表わすもの



（a）K_2 の通過フロー

フロー＼アーク	e_2	e_3	e_4
p_{14}	1	1	1
p_{23}	0	1	0

注）利用可能の時　1
　　利用できない時　0

（b）f_2 の利用可能アーク

図—7　K_2 における迂回制約

であるが，もし OD ペア i, j 間の最短路 l_{ij} に対して迂回経路の長さに限界 u_{ij} が存在するとすると，OD 間距離が l_{ij} と u_{ij} の間にあるアークで容量が満たされなければならないことになる．ここではこの制約を加える近似的な方法について考えてみよう．

いま **図—3** のネットワークに **図—4** の OD パターンをもつフローが流れる場合を考えよう．また迂回限界 u_{ij} は最短路 l_{ij} の 1.5 倍以内とする．いま計画交通量を $T=4$ とすると，**表—1** よりカット K_2 のみで容量不足が生じるが，K_2 を通過するフローは p_{14}, p_{23} の 2 種類である．すべてのアーク長を 1 とすると，p_{14} は 1-2-4, 1-3-4, 1-2-3-4, 1-3-2-4 のすべてのパス (path) が迂回限界以内で利用できるのに対し，p_{23} は 2-3 のパスしか使えない．これをカットを構成するアークと関連づけると **図—7** (a), (b) のように表わせる．したがってこの時の制約条件としては

$$\left.\begin{aligned}x_2+x_3+x_4 &\geqq (p_{14}+p_{23})\cdot T\\ x_3 &\geqq p_{23}\cdot T\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

が必要となる．p_{14} に対しても必要であるが上の制約に含まれるのでとくに書かなくてよい．

迂回制約を加えない場合は上の制約式のみで解くのを，迂回制約を考慮する場合は下の制約式を追加して解くことになる．このような追加する制約式は各通過フローに対して利用可能なアーク群が容量をもつという式とすればよい．

このような迂回制約は容量増強問題に対しても同様に適用できる．

(3) 数値計算例

a) 計算例 1

ここで計画交通量を受け入れることのできる容量をもつ最小費用のネットワーク構成問題の例を考えてみよう．

図—3 のネットワークに示すアークを建設可能アークとし，**図—4** の OD パターンをもつフローで $T=6$ の計画交通量に対する最適ネットワークを求めよう．**図—3** のネットワークに対するカットは **図—5** に示すように 6 種類であり，それぞれの処理可能交通量 T_k が 6 以上となるように最小費用でアーク容量を設定すればよいことになる．

各カットは，したがって式（18）の制約を満たす必要があり，

$$C_k \geqq T\cdot f_k=6\,f_k,\ k=1, 2, \cdots, 6$$

目的関数として総建設費を最小化するアーク建設計画を求める問題となる．費用関数を線形とする場合は線形計画問題となり，この例題に対して次のような問題となる．ただし費用単価は式（27）の係数として示すものとする．

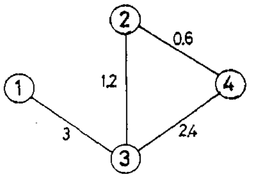
制約条件

$$\left.\begin{array}{llll} \text{カット } K_1 & \text{において} & x_1+x_2 & \geqq 6\times0.5=3 \\ 〃\quad K_2 & 〃 & x_2+x_3+x_4 & \geqq 4.8 \\ 〃\quad K_3 & 〃 & x_1+x_3+x_5 & \geqq 3.6 \\ 〃\quad K_4 & 〃 & x_1+x_3+x_4 & \geqq 1.8 \\ 〃\quad K_5 & 〃 & x_2+x_3+x_5 & \geqq 1.8 \\ 〃\quad K_6 & 〃 & x_4+x_5 & \geqq 3 \\ & & \multicolumn{2}{l}{x_1\geqq0,\ x_2\geqq0,\ x_3\geqq0,\ x_4\geqq0,\ x_5\geqq0} \end{array}\right\} \cdots\cdots(26)$$

目的関数

$$Z=2\,x_1+x_2+2.5\,x_3+2\,x_4+x_5\rightarrow\min \cdots\cdots(27)$$

これをシンプレックス法（双対法）で解くと，図―8 に示すネットワークが得られる．各アークは往復が同容量とすると合計建設費は 19.2 となる．



図―8 最適ネットワーク（例1）

b） 計算例2

次に一定の建設費制約下でネットワークの処理交通量（ネットワーク容量）を最大化する問題を考えてみよう．これを式（22）～（24）で定式化した方法で解いてみよう．

まずカットの通過交通量割合 f の大きいものから並べると 表―1 より

$$f_2\geqq f_3\geqq f_1\geqq f_6\geqq f_4\geqq f_5 \cdots\cdots\cdots(28)$$

となる．これに対して f_k の大きいカットほど処理交通量 T_k を大きくするのが難しいと考え，式（23）に対応するものとして式（29）を制約条件として設定する．

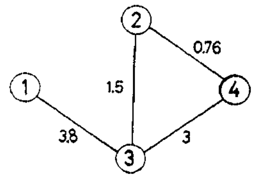
$$\left.\begin{array}{l} T_2\leqq T_3 \\ T_3\leqq T_1 \\ T_1\leqq T_6 \\ T_6\leqq T_4 \\ T_4\leqq T_5 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(29)$$

これは5つの式となり，これらはアーク容量 x を変数として次のように書き換えられる．たとえば $T_2\leqq T_3$ は，

$$\frac{1}{f_2}(x_2+x_3+x_4)\leqq\frac{1}{f_3}(x_1+x_3+x_5)$$

となる．またこのほかに建設費制約があり，線形費用関数の下では次のように表わされる．ただし費用単価は係数で示されるものとする．ただし往復は同容量とするから，（30）の費用制約は実質的には 32 といえる．以上のような制約条件下で

$$2\,x_1+2\,x_2+2.5\,x_3+2\,x_4+x_5\leqq16 \cdots\cdots(30)$$



図―9 最適ネットワーク（例2）

目的関数

$$Z=T_2=\frac{1}{f_2}(x_2+x_3+x_4)\rightarrow\max \cdots\cdots(31)$$

とする最適解を求めると 図―9 に示すようになり，この時の最大フローは $T=7.6$ となる．

4．カット生成法とその他の問題点

本節ではカットの生成アルゴリズムとそのほかの問題点について若干考察しておきたい．

（1） カットセット生成アルゴリズム

ここでカットセットの生成アルゴリズムについて2つの方法を考察してみよう．1つはネットワークの任意のツリーに対して定義される基本カットセット（fundamental cutset）を求め，これらを組み合わせて新しいカットをすべて生成させる方法でその詳細は文献 6）に示す．もう1つは heuristic な方法で，お互いに補な2つの連結な部分ネットワークのすべての組を系統的に求めることにより，その境界線（分離集合）がカットセットをなすことからカット集合を求める方法といえる．

a） 基本カットによる方法[6)]

ネットワークに1つの任意のツリー（spanning tree）を想定する．そのツリーを構成するアークを1つ取り去るとツリーは非連結となり，ツリーに含まれないアークと合せてもとのネットワークも非連結にすることができ，1つのカットセットが生成されることになる．これはツリー上のアークを補ツリー（co-tree）のアークに加えることによってカットセットが生成されると解釈することができる．ツリー上のアークを1つずつ補ツリー上のアークに加えてできるカットセットの組を基本カットセットといい，お互いに他のカットセットに含まれないアークをもっているので互いに独立で，$n-1$ 個存在することになる．ただし n はノード数を表わす．

この基本カットセットを組み合わせることにより新しいカットセットを生成することができる．可能なすべての組み合わせを行いまだ得られていないカットセットを取り出すことによりすべてのカットセットを求めることができる．カット K_i（この記号はそれを構成するアー

ク集合をも表わすとする）とカット K_j を組み合わせるとは

$$K_i * K_j = K_i \cup K_j - K_i \cap K_j \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

の演算を行うことであり，もし $K_i \cap K_j$ が空集合であれば，K_i と K_j は交わらず（共通アークがない），新しいカットは生成されない．交わる場合は1つ以上のカットが生成される．

いま図—5のネットワークにおいて，ノード1,2，ノード2,3，ノード3,4を結ぶアークよりなるツリーを考えれば，これに対する基本カットセットは K_1, K_2, K_6 の3つとなる．いまこれらを組み合わせると次のようになる．

$$\begin{aligned} K_1 * K_2 &= \{e_1, e_2\} \cup \{e_2, e_3, e_4\} \\ &\quad - \{e_1, e_2\} \cap \{e_2, e_3, e_4\} \\ &= \{e_1, e_2, e_3, e_4\} - \{e_2\} \\ &= \{e_1, e_3, e_4\} = K_4 \end{aligned}$$

$K_1 * K_6 =$ 交差せず

$$K_2 * K_6 = \{e_2, e_3, e_5\} = K_5$$

$$K_1 * K_2 * K_6 = K_4 * K_6 = \{e_1, e_3, e_5\} = K_3$$

すなわち基本カットセットより他のすべてのカットセットが生成される．

b）部分ネットワーク探索による方法

次にもう1つの組み合わせ論的なカット生成法について考察してみよう．

カット K_k はネットワークのノード集合 N を2つの排他的な空でない部分集合 X_k, $\overline{X}_k$ に分割する．したがってカットを求めることは X_k あるいは $\overline{X}_k$ の可能なすべての場合を求めることになり，X_k あるいは $\overline{X}_k$ は N に対して互いに補集合をなすからどちらか一方を求めればよい．

いまノード1を含む部分集合を X_k と定義すると，ノード1を含む連結な部分集合のうち，残りの $\overline{X}_k$ が空でなくかつ連結なすべての場合を求めればよいことになる．

X_k に含まれるノードの個数を E_k で表わすと，$E_k=1$ の場合すなわち $X_k=\{1\}$ から，$E_k=2, 3, \cdots$, の集合を求めるため順次その連結している隣接点へと広がる連結部分ネットワークをつくり，以前に得られていないもののみを残していく．この時残りの $\overline{X}_k$ が1つの連結ネットワークとなっていなければならなく，2つ以上の連結成分に分れる場合は，X_k と $\overline{X}_k$ を分離する集合は極小カット（その部分集合にカットを含まないもの）を構成しないから，その X_k は除く必要がある．これを $E_k=n-1$ の集合まで順次求めればよいことになる．以上のような方法を系統的に行うアルゴリズムは比較的容易に記述することができる．

（2） そのほかの諸問題

ここでカットを利用する解法の実用性，問題点について触れておきたい．

n 個のノードよりなるネットワークのカットセットの理論的上限は n 個の点を2つの部分に分割する組み合わせの数 $2^{n-1}-1$ 通りであるが，フロー問題で意味のあるカットセットは2つの連結な部分ネットワークに分けるもので極小カットセット（カットセットの中にカットセットを含まないもの，すなわちネットワークを3つ以上に分割しないもの）といわれるものであるがその数はネットワークの接続行列より求められる．この極小カットの数も n が大きくなると急激に多くなり実用に供し得なくなるため，計算に用いるカット数を減少させる工夫が必要となる．

カット数をどのように減少させるかあるいは逆にどのようなカットを取り上げるかは実用的解法とするために重要な問題であるが，理論的に精度を低下させずに検討すべきカット数を減少させる一般的方法は開発されていないため，経験的に行わざるを得ない．既存の交通網においては混雑区間が経験的にわかるためこれらを多く含むカットを取り上げるという指針が考えられる．またカットの形態的特徴からみて，直線状形態のカット（カット形態が直線で表わされ，それによって分割された部分ネットワーク内の内部フローの希望路線（desire line）がそのカットと交差しないようなもので，理論的には $n(n-1)/2$ 個存在する[10]），環状形態のカット（カット形態が閉曲線で表わされ，閉曲線の内部の点に出入するフローの容量をみるためのもの），などはカットの意味も考え易く，取り上げる優先順位を高くすべきであろう．実用性に重点をおく近似解法としては経験的判断を加えて計算に用いるカットを選択する必要があるが，取りあげるカット数が制約条件の数をきめ，問題の規模をきめることになり，これが大きくなり実用的に解ける範囲を超えると利用できなくなるため，取り上げるカットを計算精度との関係から判断すべきであるが，これについては一般的に議論できる段階にいたっていないため，n が大きい場合の実用性に関しては今後の課題として残されている．

次にカットを2度以上通るパスの問題があるが，最大ODフローを求める場合は，カットで分断されるODペアのみで，本来あるかも知れない需要を入れないで計算するために生じるカット容量に対する過大評価につながり，容量増強計画，最適ネットワーク問題に対しては逆に過小評価につながる面をもっている．このような問題を少しでも回避するための試みが式 (5),(6) で示す方法である．

次に OD 間のルートの最短経路に対して どこまで迂回させるルートを選んでよいかという問題がある．この問題はカット全断面における容量と需要の関係を考慮していると扱えないが，**3.(2)** に 1 例を示したように，迂回制約が設定されると各 OD ペアごとに利用可能なアークのみで容量が満たされるように制約条件を設定することができる．

5. む　す　び

容量増強問題にしろ最適ネットワーク問題にしろ，制約条件，目的関数の設定のしかたによって多様な定式化が可能である．ここではネットワークのカットセットを利用することにより，これらの問題を線形費用関数下では線形計画問題として定式化できることを示したが，カットを利用しなければ問題はもっと複雑になると考えられる．カットを利用する場合の欠陥の 1 つは大幅な迂回が可能という前提に立っているが，迂回路制約がある場合にはさらに制約条件を追加することにより処理可能である．

これらの問題の解法は容量増強の費用関数の形によって変わるが，0-1 変数計画法，混合整数計画法等を使えば不連続点をもつ線形費用関数に対しても解くことができるといえよう．

ネットワーク容量増強問題は既存アークの増強のみでなく，アークの新設をも含むことができる．これは新設可能な候補アークをリストアップし，接続行列 $\overline{M}$，増強計画 x に含めればよい．容量増強問題としては一般的には，計画交通量と処理できる最小費用の増強計画や，建設費制約下でのネットワーク容量を最大化する容量増強計画などが実用的に有用と考えられる．とくに建設費制約下で容量を最大にする問題は容量増強計画であれ最適ネットワーク問題であれ，最小のカットができるだけ大きくなるようにする必要があり，これは maxmin 計画問題といえる．

最適ネットワーク問題も同様に計画交通量を処理できる建設費用最小のネットワークや，建設費制約下での最大容量のネットワーク形成問題は実用的に有用といえよう．

これらの問題をフローの便益や走行費用をも計算に取り入れて考慮することも重要と考えられるが，ここでは触れなかった．

また以上のように最適計画問題としてではなく，実用的な近似計算法も必要であるが，このような解法として従来のフローシミュレーションによる方法が考えられる．容量増強計画は計画 OD 交通量のフロー配分によって容量不足区間を探し，その不足容量を増強するという一般的に行われている方法で計画立案が行える．あるいは増強計画とフロー配分による検討を何回か繰り返せば実用的には十分な計画をつくることができよう．

最適ネットワーク問題についても逐次改良法（近似解法）が従来より多くの研究者によって研究されているが，この問題は計算量が多いので，近似計算法でもすぐに簡単になるとはいいがたい面をもっている．

参 考 文 献

1) 西村　昴：道路網の最大フローの存在範囲について，第 23 回土木学会年次学術講演概要集，第 4 部，1968．
2) Fulkerson, D.R. : Increasing the Capacity of a Network, The Parametric Budget Problem, Management Science Vol. 5, pp. 472～483, 1959.
3) Hu, T.C. : Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley, 1970.
4) Christofides, N. & P. Brooker : Optimal Expansion of an Existing Network, Mathematical Programming Vol. 6, pp. 197～211, 1974.
5) 西村　昴：道路網容量からみた交通制御の考え方について，第 28 回土木学会年次学術講演概要，第 4 部，1973．
6) 西村 昴・岡村治子：ネットワークにおけるカットに関する一考察，土木学会関西支部年次学術講演概要，1972．
7) 西田俊夫・児玉正憲・青沼龍雄：数理計画システム入門，ビジネス社，1971．
8) Hammer, P.L. & S. Rudeanu : Boolean Methods in Operations Research and Related Areas, Springer-Verlag, 1968
9) 西村 昴・日野泰雄：最適ネットワーク構成に関する一考察，第 30 回土木学会年次学術講演概要，第 4 部，1975．
10) Môri, M. & T. Nishimura : One Approach to Analyzing Highway Network Capacity, Memoirs of the Faculty of Engineering, Osaka City Univ. Vol. 7, 1965.
11) 伊理正夫：線形計画法，白日社，1972．

（1975.10.31・受付）