

円管内振動流の滑面摩擦抵抗則

FRICIONAL RESISTANCE LAW FOR AN OSCILLATORY PIPE FLOW WITH SMOOTH BOUNDARIES

沢本正樹*・日野幹雄**

By Masaki SAWAMOTO and Mikio HINO

1. はじめに

振動流の壁面抵抗則は、流れが全サイクルにわたって層流の場合には、境界層流れであっても、円管流であっても純解析的に求められる。層流理論の妥当性は、壁面抵抗に限らず、各種の物理量について理論と実験との合致が確かめられており、問題はない^{9), 9), 13)}。その適用限界は、Stokes のパラメータ λ が、1.5 以上に対して、 $R_0 < 550$ 、1.5 以下に対して、大体、 $R_0 < 2100$ である^{1), 12)}。ここに R_0 、 R_e は、それぞれ、振動流境界層厚さのパラメータ $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ 、および、管径 d を用いて定義した Reynolds 数 $R_0 = \frac{\hat{U}\delta}{\nu}$ 、 $R_e = \frac{\hat{U}d}{\nu}$ であり、 λ は δ と管の半径の比 $\lambda = \frac{d}{2\delta}$ 、 ω は振動の角周波数、 \hat{U} は断面平均流速の振幅である注)。

波、または、潮流による振動乱流境界層の抵抗則を理論的に解析したものは、Kajiura (1964, 1968)^{3), 4)} が最初であろう。彼のモデルは、振動の全サイクルにわたって乱流が続くと仮定し、渦動粘性係数 K_z を導入して、問題を拡散方程式に帰着させ、解析を行うものである。渦動粘性係数の分布は、Kármán 定数などの定常乱流境界層での知識からの直接的類推により滑面、粗面、それぞれの場合について仮定されている。結果は、たとえば、滑面上の振動流境界層に対する Riedel, Kamphuis and Brebner (1972)⁵⁾ による抵抗係数の実測との差は 2 割程度であり、 R_0 による変化の傾向はよく一致して

* 正会員 工博 東京工業大学助手 土木工学科

** 正会員 工博 東京工業大学教授 土木工学科

注) 文献 1) においては、 λ を $\frac{d}{2\delta}$ と定義しているが、その後、各種の文献¹⁰⁾などを比較検討したところ、 $\lambda = \frac{d}{2\delta}$ としたものが多く、本論文では、それらとの関連を容易にするために、この定義 $\lambda = \frac{d}{2\delta}$ を用いる。なお、著者らの他の文献、2), 19) は、この新しい定義を使用している。

いる。また、Jonsson (1963)⁶⁾ による粗度上の振動流の測定結果とも、壁面の極く近傍を除き、よく一致している。

このように渦動粘性係数の分布を仮定して、振動流の流れの場を解析したものに、波動境界層を対象とした Johns (1968)⁷⁾、野田 (1969)⁸⁾、円管流を対象とした安川・田川 (1972)⁹⁾ がある。

この種のモデルの合一不合理性は、いつに、渦動粘性係数の仮定が適切であるか否かにかかっている。実際には、次のようなモデルの不備が実験的に認められている。すなわち、渦動粘性係数が時間とともに大きく変動する一堀川・渡辺 (1968)¹⁰⁾、堀川・水口 (1973)¹¹⁾、定数と仮定したものが、Reynolds 数の関数にしないと現象をうまく説明できない—安川・田川 (1972)⁹⁾、流れは全位相を通じての乱流にはならない—日野・沢本・高須 (1975)¹⁾、などのことが確認されている。しかし、振動流についての実験的な把握が十分なされていない時期に発表されたことを考えると、Kajiura のモデルの提案は、きわめて意義深い。

振動流境界層の壁面抵抗を、直接 shear plate を用いて測定することは、層流-乱流にわたり試みられている。Eagleson (1962)¹²⁾、岩垣・土屋・坂井 (1964)¹³⁾、松梨・川谷 (1965)¹⁴⁾ は、層流域で、Riedel, Kamphuis and Brebner (1972)⁵⁾ は、粗面-滑面、層流-乱流にわたり測定を行っている。特に Riedel らの結果はきわめて系統的で、かつ精度も高いように思われ、その値は高い。この結果を用いれば、振動流境界層については、壁面抵抗の推算が可能である。

一方、円管流については、系統的な実験結果は報告されておらず、また、使い易い形での抵抗則の提案もなされていない。

管路で、工学的に振動流現象が問題となるものに、水撃圧、およびサージングの問題がある。水撃圧が問題となる管路系の設計にあたっては、一般には圧力波の伝播および最大圧力上昇に関心の重点がおかれ、摩擦損失を

無視した計算が行われている^{15),16)}。これは最大圧力上昇が最も重要な問題であることとともに、摩擦を考慮した波動方程式が繁雑となることも大きな理由の一つである¹⁷⁾。そのため、摩擦損失をどのように計算に組み込むかとか、損失係数をいくりにするのが適かなどの点に対し、信頼しうる方法は確立されていない。そして、水撃圧の減衰を問題としなければならない場合には、(i) 基本方程式に摩擦力の効果をいれずに、近似的に境界条件が減衰効果をもつように修正する¹⁷⁾とか、(ii) 定常流での抵抗則を準用するとかの方法がとられる。しかし、(i)の方法はいかにも便宜的で一般性に欠け、(ii)の方法ではしばしば実測とかけ離れた減衰が計算される——荻原(1973)¹⁸⁾など。

サージングの場合、液体振動の減衰は重要な関心事である。この場合には、水撃圧の周期が数秒であるのに対し、周期が数分と現象の時間スケールが長い場合、定常流の抵抗則を準用している。すなわち、設計にあたっては、定常流での Manning の n の値を用いている¹⁵⁾。しかし、これにも問題がないわけではない。現象の時間スケールが長い場合には、確かに定常円管流での抵抗則を使えるわけであるが、では時間が長いとか短いというのは、いったいどの程度のことをいうのであろうか。振動流に対して準定常性がいえるためには、流れの構造が、定常流のそれとよく似ていることが必要である。著者らの実験¹⁾によれば、流れは Stokes のパラメータ λ が、1.5 以上では、乱れのあらわれ方、流速分布などの面ですでに明瞭な非定常の特性を示している。この $\lambda > 1.5$ という限界は周期になおすと $T > \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{\nu \lambda^2}$ であるから、水を例にとってみると、径 1 cm, 10 cm, 50 cm の円管に対し、それぞれ、周期が 35 sec, 1 時間, 1 日以上に対応する。すなわち、われわれが直感的に考えているよりも、はるかに長い周期にまで非定常性の考慮が必要となる。さらに、振動流に定常流の考え方を適用することは、上述のように定常乱流と非定常乱流の構造の違いを無視することになるばかりでなく、非定常流の乱流遷移が、管径 d を用いて定義した Reynolds 数 R_e で説明できず、 R_e が 2100 を越えた相当高い値でも層流状態が成立する¹⁾ため、ややもすると、層流を乱流として取り扱うという過誤をひき起こしやすいといった難点をも内含している。

本研究では、まず層流抵抗則について説明した後で準定常の仮定からどのような抵抗則が得られるかを示し、次に著者らの振動流に関する実験^{1),19)}から得られた知識をもとに指数型の抵抗則を提案する。

さらに、振動流の簡単なモデルとして、U字管内の液柱の振動の問題をとりあげ、その減衰性を解析する。解析結果は、安川・田川(1972)⁹⁾の実験結果と比較され、

提案した抵抗則が妥当であることが検証される。

2. 層流抵抗則

円管内振動流の層流抵抗則は、純解析的に求められる。その解法は文献 1), 9) などに示されている。結果は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} U(r, t) &= \text{Real}\{\hat{U}V_c\} \\ V_c &= -\frac{J_0(\beta_0\eta) - J_0(\beta_0)}{J_0(\beta_0) + \frac{1+i}{\lambda}J_1(\beta_0)} e^{i\omega t} \\ \beta_0 &= \sqrt{2} \lambda e^{\frac{3}{4}\pi i}, \quad \eta = r/\frac{d}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 U は管軸方向の流速、 \hat{U} は断面平均流速 U_m の振幅、すなわち、

$$U_m = \frac{4}{\pi d^2} \int_0^{d/2} U \cdot 2\pi r dr = \text{Real}\{\hat{U}e^{i\omega t}\}$$

r は半径方向の距離、 J_0, J_1 は Bessel 関数である。式(1)を用いれば、壁面せん断応力は容易に求められる⁹⁾。ここでは、文献 9) と異なり次のような抵抗係数を用いた形で抵抗則を表わすことにする。式(1)より複素壁面せん断応力 τ_c 、および複素壁面抵抗係数 f_c は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \tau_c &= 2\rho \frac{\hat{U}^2}{R_e} \frac{\partial V_c}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \\ f_c &= -\frac{8}{\hat{U}^2 e^{i\omega t}} \frac{\tau_c}{\rho} \end{aligned}$$

となる。ここに、せん断応力は管中央部を加速する方向に正と定義してある。実際の壁面せん断応力は τ_c の実部

$$\tau_w = \mu \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=d/2} = 2\rho \frac{\hat{U}^2}{R_e} \frac{\partial \{\text{Real } V_c\}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \dots\dots\dots (2)$$

である。ここで、振動流の壁面抵抗係数 f を

$$f \equiv \frac{8}{\hat{U}^2} \max\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right) \dots\dots\dots (3)$$

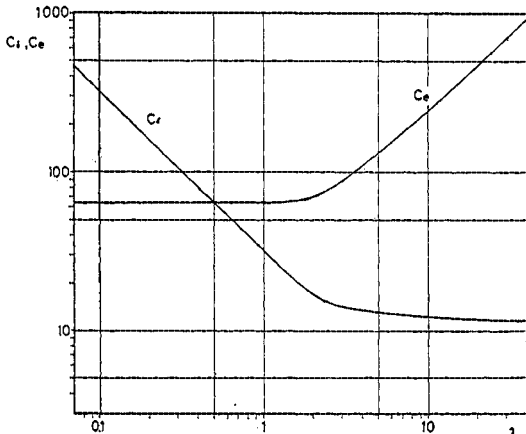
と定義すると、 f は f_c の絶対値と等しくなる。一方、 f_c の偏角 θ は壁面せん断応力 τ_w と平均流速 U_m の位相差を表わしている。

式(1)より f_c を求めると、その絶対値 f については、

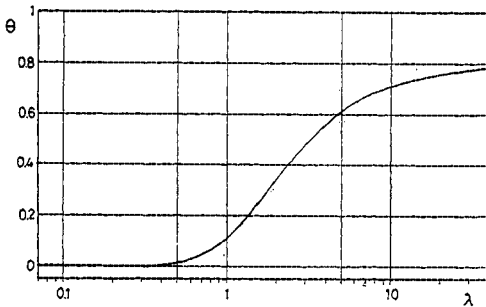
$$f = \frac{C_e(\lambda)}{R_e} = \frac{C_s(\lambda)}{R_s} \dots\dots\dots (4)$$

という関係が得られる。ここに $C_e(\lambda), C_s(\lambda)$ は比例定数で λ のみの関数である。また、偏角 θ は λ のみの関数として得られる。

$C_e(\lambda), C_s(\lambda)$ および f_c の偏角 $\theta(\lambda)$ は、図-1 に示されている。この結果を用いると、層流時の壁面せん断応力は、式(4)、および



(a) $C_e, C_f \sim \lambda$



(b) $\theta \sim \lambda$

図-1

$$\frac{\tau_w}{\rho} = -\frac{f}{8} \hat{U} U_m \left(t + \frac{\theta}{\omega} \right) \dots\dots\dots (5)$$

より計算することができる。

図-1によると $\lambda \rightarrow 0$ では $C_e \rightarrow 64$, $\theta \rightarrow 0$ となり、定常層流円管流での値に漸近し、 $\lambda \rightarrow \infty$ では、 $C_e \rightarrow 11.3$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ となり、振動層流境界層、いわゆる、Stokes 流れでの抵抗則に漸近する。すなわち、層流の場合、 $\lambda < 1$ では、定常円管流近似が成り立ち、 $\lambda > 10$ では、振動層流境界層近似が成り立つ。

この層流抵抗則の適用範囲は、Stokes のパラメータ λ が 1.5 以上では、 $R_\delta < 550$ である^{1),2)}。 λ が 0~1.5 では遷移限界は明確ではないが、 $R_e < 2100$ としておけば間違いはない。

3. 滑面乱流抵抗則

(1) 準定常理論

定常円管流の抵抗係数と Reynolds 数 $R_e = \frac{U_m d}{\nu}$ との関係は Moody 図表としてよく知られている。非常に周期の長い (λ が小さい) 流れには、この図表が適用することが容易に推測できる。ではこの図表は一般的な

振動流にも適用しうるのであろうか。

振動流の抵抗係数 f を式 (3) で定義すると、定常流の抵抗則は、 $\frac{\tau}{\rho}$, U_m をそれぞれ、振動流の場合の振幅に置き換えるだけで、見かけ上振動流の抵抗則に拡張できる。これを著者らの実験条件 $\lambda = 3.62^{19)}$ 、および、安川・田川 (1972)²⁰⁾ の実験条件に適用したところ、前者では約 2 倍、後者では約 1.5 倍実測値より大きい抵抗係数を与えることとなった。また、定常流での滑面抵抗則の一つである Blasius の経験則に対応する流速分布形 1/7 乗則は、 $\lambda = 1.91$ ではすでに成り立たないことが確かめられている¹⁹⁾。さらに、遷移 Reynolds 数に関しては、 $\lambda > 1.5$ では管径を用いて定義した Reynolds 数 R_e よりも、 δ を用いて定義した Reynolds 数 R_δ の方が意味があり、非定常の効果が大いことがわかっている^{1),2)}。以上のことから、少なくとも、 $\lambda > 1.5$ 以上の流れに対しては、Moody 図表に基づく壁面せん断応力の算定は不適であると結論できる。

非定常性が大きい場合に重要な意味をもつ Reynolds 数 R_δ の物理的な意味を考えてみよう。いま、平均流速 U_m が時間に関し正弦的に変化する流れ

$$U_m = \hat{U} \sin \omega t$$

を考える。この時 R_δ は

$$R_\delta = \frac{\hat{U} \delta}{\nu} = \left\{ \frac{2 \hat{U}^2}{\nu \omega} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (6)$$

となる。さて、ここで R_δ のほかに流体粒子の転流時からの移動距離 x と、各時刻における平均流速 U_m とで定義した Reynolds 数 R_x を考えてみる。 x は

$$x = \int_0^t U_m dt = \frac{\hat{U}}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

であるから、 R_x は

$$R_x = \frac{U_m x}{\nu} = \frac{\hat{U}^2}{\nu \omega} (\sin \omega t - \sin \omega t \cos \omega t)$$

となる。これと式 (6) とから R_x と R_δ は

$$R_x = 0.5 R_\delta^2 \sin \omega t (1 - \cos \omega t) \dots\dots\dots (7)$$

のように関係づけられる。すなわち、 R_δ は流体粒子の移動距離を用いて定義した Reynolds 数 R_x の最大値と表裏一体の関係にあることがわかる。このことは、次のことからもうなずける。 R_x の最大値は、

$$\{R_x\}_{\max} = 0.649 R_\delta^2$$

となる。振動流の限界 Reynolds 数 $R_\delta = 550$ をこれに代入すると

$$\{R_x\}_{\max} \approx 2 \times 10^5$$

が得られる。これは、定常円管流の入口での限界 Reynolds 数とほぼ一致している²⁰⁾。すなわち、パラメータとして R_δ を用いることは、流れの履歴を流体粒子の移動距離 x を介して考慮したことに対応している。

さて、定常流においては流体粒子の移動距離で定義し

た Reynolds 数で決定されるような流れには平板上の境界層流れがあげられる。ここでは、振動流の流れを平板境界層に近似させて抵抗則を推算する方法を考える。このような近似はもちろん物理的に厳密なものではない。しかし、振動流においても、 λ のある範囲では、転流時以降、流体粒子の流下とともに、壁面から境界層が発達していく流れとなっており、しかも、振動流における乱流構造の知識の不足から、流れを厳密に計算することが不可能であることを考えると、このような流れをまず定常流境界層で近似してみることも、意味のないことではない。以下具体的に説明する。

定常流平板境界層では壁面せん断応力 τ_w は、抵抗係数 c_f と、境界層外縁での流速 U_0 を用いて、

$$\tau_w = -c_f \rho U_0^2 / 2 \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。 c_f と $R_x = \frac{U_0 x}{\nu}$ (x は平板前端からの距離) との関係は、Kármán, Schultz-Grunow などの式や、図表で与えられている。ここでは、一例として扱い易さから滑面に対する次の式²¹⁾を用いて議論を進める。

$$\left. \begin{aligned} c_f &= 0.059 R_x^{-1/5} \\ R_x &< 10^7 \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

式(8)および(9)の関係が U_0 を平均流速 U_m に置き換えるだけで、そのまま振動流にも適用しようと仮定する。代表流速として管軸での流速ではなく平均流速を用いることは、大いに問題の残る点ではあるが、ここでは振動流についての実験的に得られる定数に頼らずに定常流からの類推だけでどの程度のことかといえるのかを確かめることを目的とし、ある程度の誤差を容認した上でこの方法を採用する。

以上より、各時刻における壁面せん断応力を計算すると、 $0 \leq \omega t \leq \pi$ では

$$\begin{aligned} \frac{\tau_w}{\rho} &= -\frac{1}{8} \hat{U}^2 4 c_f \sin^2 \omega t \\ &= -\frac{1}{8} \hat{U}^2 \cdot 0.271 R_\delta^{-2/5} \\ &\cdot \frac{(\sin \omega t)^{1.8}}{(1 - \cos \omega t)^{0.2}} \dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。 $\frac{(\sin \omega t)^{1.8}}{(1 - \cos \omega t)^{0.2}}$ は 図-2 に示すような $\sin \omega t$ をゆがめたような関数である。

$\pi \leq \omega t \leq 2\pi$ では、符号が逆、すなわち逆方向の応力として同じような時間変化を繰り返す。この方法の適用限界は乱流でかつ式(9)の適用しうる範囲であるから、 R_δ で表わすと

$$550 < R_\delta < 4500$$

限界 Reynolds 数 式(9)の適用限界

である。

式(10)は時間に関しては複雑な形をしており、必ずしも使い易いとはいえない。実際に応用するにあたっては、式(10)の時間変動をさらに正弦関数で近似しなおし、かつ式(3)で定義した抵抗係数 f を用いて、

$$f = 0.271 R_\delta^{-2/5} = 0.358 \lambda^{2/5} R_e^{-2/5} \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = -\frac{1}{8} f \hat{U} U_m \dots\dots\dots (12)$$

の形で使用することも一つの便法であろう。

以上、滑面に対する c_f から振動流の f を求める方法を述べたが、同様の考え方は粗面に対しても可能であることはいうまでもない。

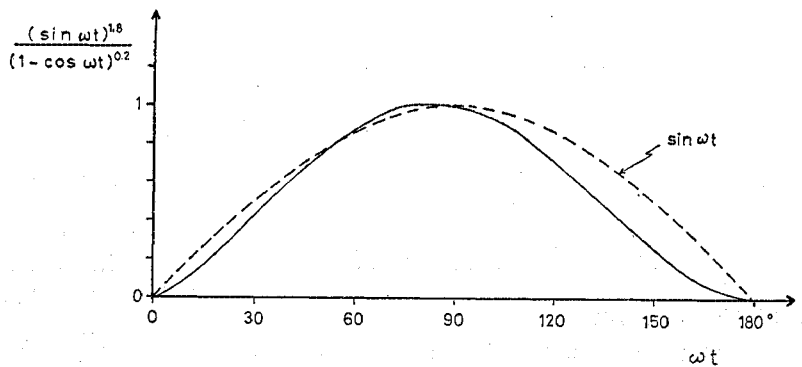
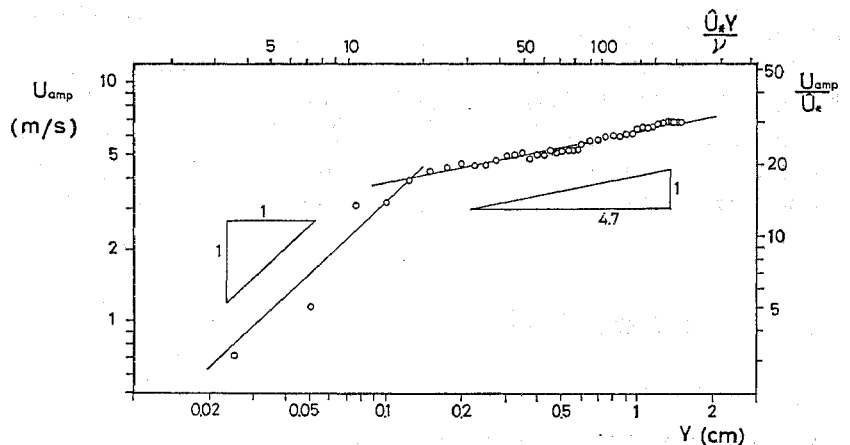


図-2 $\frac{(\sin \omega t)^{1.8}}{(1 - \cos \omega t)^{0.2}} \sim \omega t$



RUN 31
 $\lambda = 3.62$
 $R_\delta = 1360$

図-3 振動流流速の指数分布

(2) 指数型抵抗則

定常流では、流速分布に関する $\frac{1}{7}$ 乗則は滑面抵抗係数 f に対する Blasius の経験則と結びついている。振動流においても、流速分布の指数則が確認できれば、同様の演繹で指数型の抵抗則が得られる。著者の一人は、文献 19) で、熱線流速計を用い空気振動流の詳細な流速分布測定の結果を報告している。それによると、Stokes のパラメータ $\lambda=3.62$ の流れでは、(i) 減速時の乱れの激しい位相において、明瞭な粘性底層の存在が認められる、(ii) 粘性底層内の速度勾配より壁面せん断応力を求めると、それは時間に関し正弦的に変化し、かつ平均流速と同位相である、かつ同じデータを用いて流速の指数分布を調べてみると、(iii) 図-3 に示すように、粘性底層の外側では、壁面からの距離 y の $\frac{1}{4.7}$ 乗に比例する速度分布が存在するなどのことが確かめられた。

これらの事実から振動流の抵抗係数 f を求めてみよう。各点での流速の振幅 U_{amp} の分布は、次のように書き表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{amp}}{\bar{U}} &= c_0 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n} \\ c_0 &= \frac{1}{2} \frac{(2n+1)(n+1)}{n^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 y は壁面からの距離、 c_0 は管軸での流速と平均流速の比をあらわす定数であり、 $n=4.7$ の場合、1.342 となる。粘性底層を考慮すると、 c_0 の値は多少変わるが、その差は小さい。図-3 の測定結果では式 (13) は \bar{U}_* で無次元化すると、

$$\frac{U_{amp}}{\bar{U}_*} = 9.89 \left(\frac{\bar{U}_* y}{\nu} \right)^{1/4.7} \dots\dots\dots (14)$$

とも書き表わすことができる。ここに \bar{U}_* は

$$\bar{U}_* = \sqrt{\nu \left. \frac{dU_{amp}}{dy} \right|_{y=0}}$$

で定義された摩擦速度であり、粘性底層内での流速測定結果より計算される。

式 (13), (14) に $y=\delta$ を代入し、 λ として 3.62 を用いて \bar{U}_* について解くと

$$\bar{U}_* = 0.1533 R_0^{-1/5.7} \bar{U}$$

が得られる。 $-\frac{\tau_w}{\rho}$ の極大値は \bar{U}_*^2 であるから、式 (3) で定義した抵抗係数 f は

$$\begin{aligned} f &= 8 \frac{\bar{U}_*^2}{\bar{U}^2} = 0.188 R_0^{-1/2.85} \\ &= 0.240 \lambda^{1/2.85} R_e^{-1/2.85} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

となる。また、壁面せん断応力は式 (12) と同じく、

$$\frac{\tau_w}{\rho} = -\frac{1}{8} f \bar{U} U_m \dots\dots\dots (16)$$

で計算できる。この抵抗則の適用範囲については 5. で考察する。

4. U 字管振動

図-4 に示すような U 字管内の液柱振動は、振動流の簡単なモデルとしてしばしば解析が行われている。ここでは前章で提案した抵抗則を用いて、このような流体運動の減衰性を調べる。

U 字管振動の運動方程式は、摩擦損失に比べて曲りによる損失などが無視できるとすると、

$$\rho \frac{\pi d^2}{4} l \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \tau_w \pi d l - 2 \xi \rho g \frac{\pi d^2}{4}$$

と表わされる。ここに、 ξ, l は、それぞれ液柱の変位および長さである。両辺を $\rho \frac{\pi d^2}{4} l$ でわると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{4}{d} \frac{\tau_w}{\rho} + \omega_0^2 \xi &= 0 \\ \omega_0^2 &= 2g/l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となる。式 (17) の解は減衰振動となる。これに前章までの振動流抵抗則を適用し、層流、乱流、それぞれの場合の減衰性を求める。

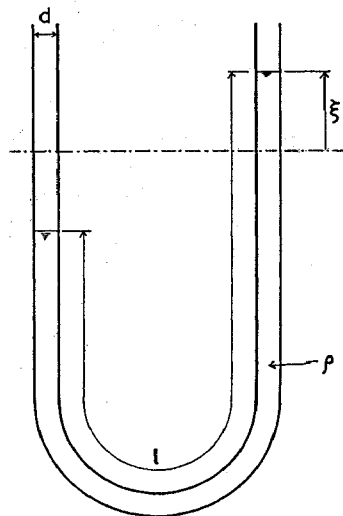
a) 層流

層流の場合の減衰振動は安川・田川 (1972)⁹⁾ にも示されており、ここではその結果のみを示す。

減衰振動を

$$\xi = \xi_0 e^{\beta(t-t_0)} \cos \omega(t-t_0) \dots\dots\dots (18)$$

と表わすと、 ω, β は次のようになる。



$$\omega_0 = \sqrt{2g/l}$$

図-4 U 字管振動

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_0} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C_\delta}{8\lambda} \sin \theta + \frac{\left(\frac{C_\delta}{8\lambda}\right)^2 \cos^2 \theta}{2 + \frac{C_\delta}{8\lambda} \sin \theta} - \left(\frac{\frac{C_\delta}{8\lambda} \cos \theta}{2 + \frac{C_\delta}{8\lambda} \sin \theta}\right)^2}} \\ \frac{\beta}{\omega_0} &= \frac{\frac{C_\delta}{8\lambda} \cos \theta}{2 + \frac{C_\delta}{8\lambda} \sin \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

は式(18)の形の解を持ち、 ω, β はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_0} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{256} \left(\frac{fR_\delta}{\lambda}\right)^2}} \\ \frac{\beta}{\omega_0} &= \frac{-\frac{1}{16} \frac{fR_\delta}{\lambda}}{\sqrt{1 + \frac{1}{256} \left(\frac{fR_\delta}{\lambda}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

となる。これより一周期間の減衰比は

$$\frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} = e^{\beta \frac{2\pi}{\omega}} = \exp\left(-\frac{\pi}{8} \frac{fR_\delta}{\lambda}\right) \dots\dots\dots (23)$$

振動の一周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の間の振幅の減衰比は、 ξ_{i+1}/ξ_i と書くと

$$\frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} = e^{\beta \frac{2\pi}{\omega}} = \exp\left(-\frac{\frac{C_\delta}{8\lambda} \cos \theta}{2 + \frac{C_\delta}{8\lambda} \sin \theta} 2\pi\right) \dots\dots (20)$$

となる。

b) 乱流

前章の抵抗則より、式(12)または式(16)を式(17)に代入すると、

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + f \frac{R_\delta \omega}{8\lambda} \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0 \dots\dots\dots (21)$$

が得られる。振動の一周程度程度の時間では R_δ は一定であると仮定すると、式(21)はよく知られた減衰振動の式となり、その解は容易に求められる。すなわち、式(21)

抵抗係数 f として式(11)、(15)を用いると、定常境界層抵抗則による準定常理論では、

$$\frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} = \exp\left(-0.101 \frac{1}{\lambda} R_\delta^{3/5}\right) \dots\dots\dots (24)$$

流速分布形に基づく指数型抵抗則では

$$\frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} = \exp\left(-0.0738 \frac{1}{\lambda} R_\delta^{1/1.54}\right) \dots\dots\dots (25)$$

となる。

参考のために、定常円管流での f を用いた場合の減衰比を求めてみると、層流では式(23)と、

$$f = \frac{64}{R_e} = \frac{32}{\lambda R_\delta}$$

とより大体 $R_e = 2\lambda R_\delta$ が 2100 以下²³⁾で、

$$\frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} = \exp\left(-\frac{4\pi}{\lambda^2}\right) \dots\dots\dots (26)$$

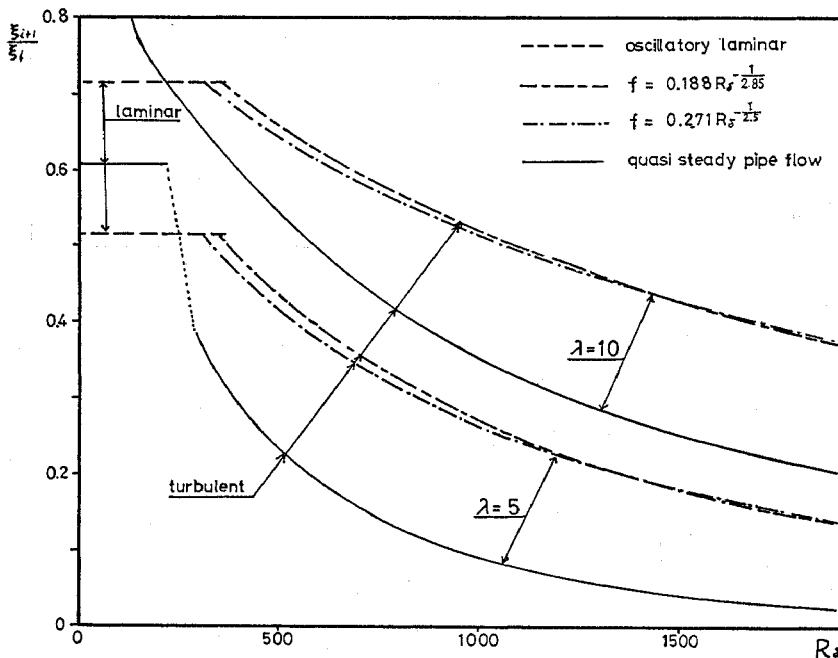
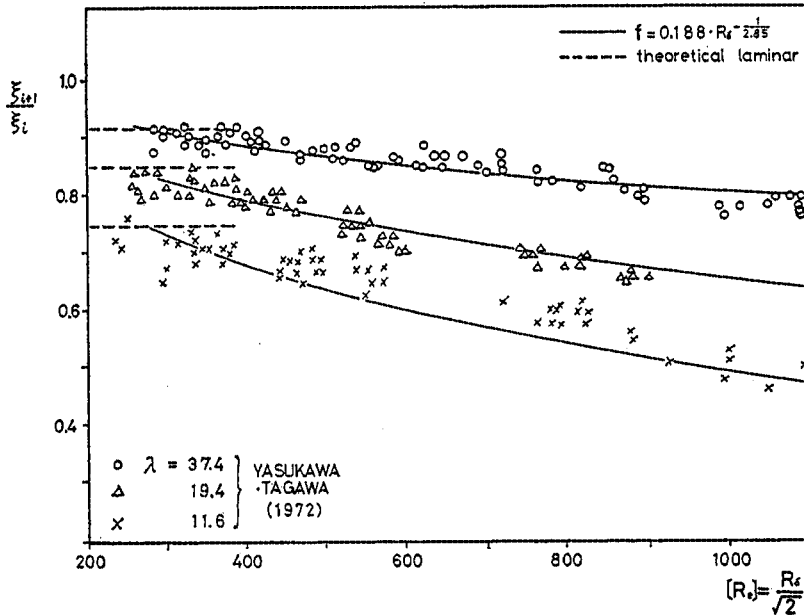


図-5 U字管振動の減衰比、各種抵抗則の比較



図一六 U字管振動の減衰比. 今回提案された抵抗則による結果と安川・田川の実験結果との比較

乱流では、式 (23) と Blasius の経験則

$$f = 0.316 R_0^{-1/4} = 0.266 \lambda^{-1/4} R_0^{-1/4}$$

とから、大体 $R_0 = 2\lambda R_s$ が 2900 以上²³⁾で、

$$\frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} = \exp(-0.104 \lambda^{-5/4} R_0^{3/4}) \dots \dots \dots (27)$$

となる。

以上の計算例を図一五に示す。図中、実線は式 (26)、(27) を表わし、他の曲線は式 (20)、(24)、(25) を表わす。これによると、提案された2つの抵抗則、式 (11)、(15) を用いた結果は、互いにきわめて近い値を与えている。定常円管流での抵抗則を準用した場合の結果は、振動流抵抗則を用いた計算結果とは大きくはずれ、 R_0 が小さいときは過小の減衰を、 R_0 が大きい場合には、過大の減衰を計算したことになっている。

安川・田川 (1972)⁹⁾ は、U字管振動の解析と実験を行っている。実験結果は減衰比の形で、Reynolds 数と振幅のパラメータ r とで整理している。彼らが定義した Reynolds 数 $[R_e]$ と r とは、それぞれ、次のように R_0 と λ とに書き直すことができる。

$$[R_e] = R_0 / \sqrt{2}, \quad r = \sqrt{2} \lambda$$

この実験結果と上述の計算結果のうち、指数型抵抗則の結果とを比較したものを図一六に示してある。ここに示してあるものは、 $\lambda = 37.4, 19.4, 11.6$ の3種である。用いている抵抗則、式 (15) は、もともと $\lambda = 3.62$ の実測の流速分布形から導いたものであり、 λ の他の値に対しての適用性は何ら保証されていない。にもかかわらずここに示した例では、3種とも λ が 3.62 とは大きくか

け離れているが、計算値と実測値との一致はよい。このことは、式 (15) の抵抗則が、少なくとも $\lambda = 37.4$ までは適用しうることを示唆している。

5. ま と め

前章までの抵抗則をまとめると次のようになる。

- 層流の場合 式 (4)、(5) および 図一1
 - 乱流の場合 式 (16) と、式 (11) または式 (15)
- これらの結果は 図一7 に示されている。図にはあわせて、

- Riedel et al. (1972) の実験のうち滑面のもの、 $\lambda = \infty$
 - Kajiura (1968) のモデルのうち滑面のもの、 $\lambda = \infty$
 - 著者らの実験、滑面、 $\lambda = 3.62, 3.90$
- ものせてある。

層流抵抗則の適用範囲は $\lambda > 1.5$ では $R_0 < 550$ ⁹⁾、 $\lambda < 1.5$ では明確ではないが、 $R_0 < 2100$ としておけば間違いはなさそうである。この抵抗則は理論的に厳密に求められたものであり、 λ についての制限はない。

式 (11) の準定常近似は平板境界層の抵抗則を円管内振動流に適用したものである。しかし、これを振動流境界層 $\lambda \rightarrow \infty$ にそのまま適用するには難点がある。なぜならば、この近似は断面内での流速の位相差が無視しうるような状況の下で行われているからである。Jonsson (1963)⁹⁾ の棧粗度上の流速測定では、減速時に流れの位相差があまり問題とならないのは、壁から δ の 50 倍程度の範囲までにおいてである。よって、この近似が有

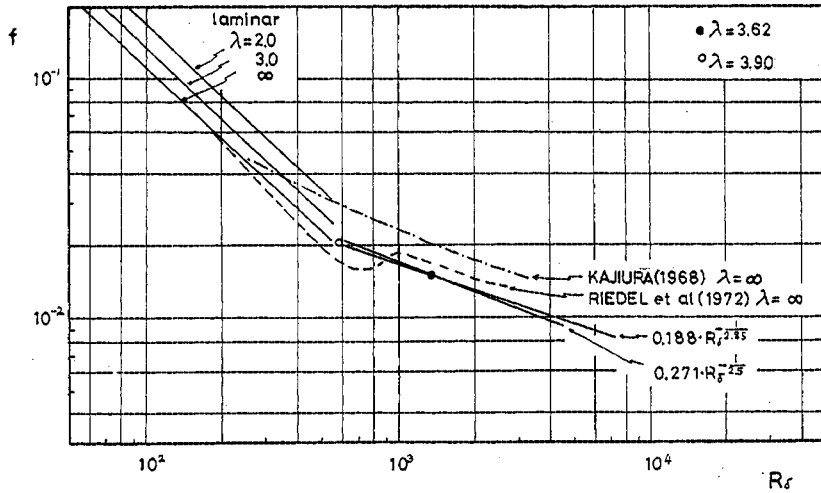


図-1 $f \sim R_e$

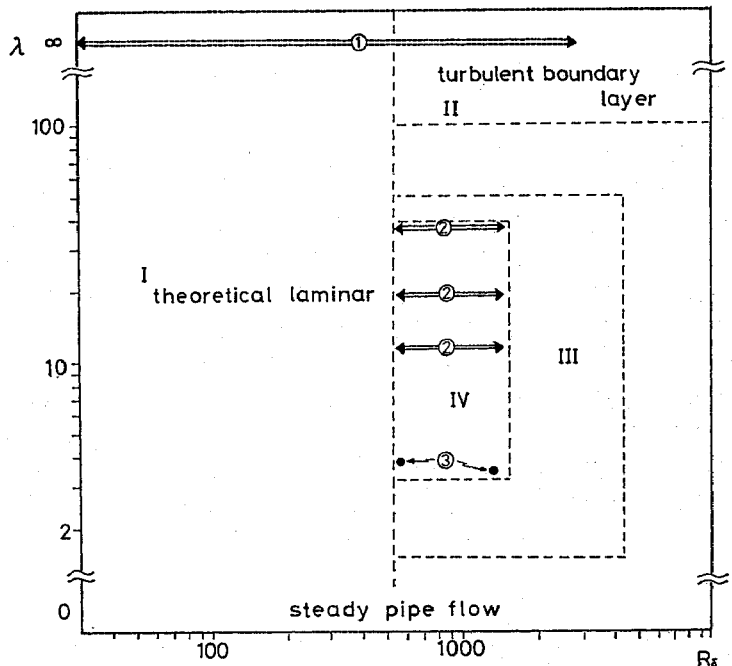
意となるのは、 $\lambda < 50$ 程度であろう。 λ の下限については確かな根拠はないが、遷移実験りなどから推察すると、 $\lambda = 1.5$ が一応の目安になる。 R_e についての制限は前述の通りである。しかし、それは式 (9) を採用した場合のことであり、平板境界層の $c_f \sim R_x$ の図表を用いれば、より広い範囲の R_e でも $f \sim R_e$ の関係を導くことは可能である。

式 (11) の抵抗則はある程度の誤差を容認する立場で導いたものであるが、結果的には式 (15) と非常に近い値を与える。このことは、必ずしも式の誘導過程が適切であったことを示すものではなく、むしろ、準定常性の仮定が含むいくつかの誤差が互いに打ち消し合ったためと思われる。

式 (15) の抵抗則は、もともと $\lambda = 3.62$ の実験結果から導かれたものである。よって、本来適用範囲は $\lambda = 3.62$ に限られるはずである。しかし、図-6 に示したように、 $\lambda = 11.6, 19.4, 37.4$ においても精度よい結果を与えることが確かめられた。また、式 (15) と式 (11) はきわめて近い値を与えている。よって、式 (15) の適用範囲は、式 (11) と同じと考えてさしつかえなからう。

図-8 には、上述の抵抗則の有効範囲が図示されている。図中 I は層流理論が成り立つ範囲、II は、振動流境界層として取り扱うことができる範囲である。式 (11), (15) が適用しうると推測される範囲は III の領域である。III の中で、実験

的に検証されているのが IV である。 $\lambda = 0$ では、定常流での抵抗則が成り立つことはいうまでもない。これ以外の領域、すなわち、 λ が 1.5 以下、および λ が 50 以上 100 以下の領域、また、 R_e が十分に大きい領域については、今のところ実験、解析ともに十分には行われては



- ① Riedel et al(1972)
- ② Yasukawa-Tagawa(1972)
- ③ RUN 9,31 Authors(1975)

I：層流抵抗則、II：振動流境界層、III：今回提案した抵抗則、IV：Ⅲの中で実験的に確かめられた領域

① Riedel et al., ② 安川・田川, ③ 著者の実験

図-8 抵抗則の適用範囲

いず、今後の成果を待たなければならない。

謝辞：本研究を進めるにあたり、東京工業大学 吉川秀夫教授をはじめ、水工研究室の諸氏から有益な助言をいただいた。ここに深く謝意を表します。なお、本研究に対し、著者の一人沢本は、土木工学科より奨学金を受けた。記して謝意を表します。

記 号

- C_e : 抵抗係数 f をあらわす係数, 式 (4).
- C_δ : 抵抗係数 f をあらわす係数, 式 (4).
- c_0 : 指数型流速分布形の係数, 式 (13).
- c_f : 平板境界層の壁面抵抗係数.
- d : 管径
- f : 振動流の抵抗係数, 式 (3) で定義
- f_c : 複素抵抗係数
- g : 重力の加速度
- J_0, J_1 : Bessel 関数
- l : 液柱の長さ
- n : 流速分布形の指数の逆数
- R_e : 管径で定義した Reynolds 数 $\frac{\hat{U}d}{\nu}$
- R_δ : δ で定義した Reynolds 数 $\frac{\hat{U}\delta}{\nu}$
- R_x : Reynolds 数 $\frac{U_m x}{\nu}$
- [R_e] : 安川・田川(1972)の用いている Reynolds 数
- r : 半径方向の距離
- T : 振動の周期
- U : 管軸方向の流速
- U_m : 断面平均流速
- U_0 : 境界層外縁での流速
- \hat{U} : U_m の振幅
- \hat{U}_* : U_{amp} の勾配より求めた摩擦速度
- U_{amp} : U の振幅
- V_c : 複素無次元流速
- V : 無次元流速 $\frac{U}{\hat{U}}$
- x : 流体粒子の移動距離
- y : 壁面からの距離
- β_0 : $\sqrt{2} \lambda e^{\frac{3}{4}\pi i}$
- β : 減衰振動の指数, 式 (18)
- δ : 振動流境界層厚さのパラメータ $\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$
- η : $r/\frac{d}{2}$
- θ : 壁面せん断応力と平均流速の位相差
- λ : Stokes のパラメータ $\frac{d}{2\delta}$
- μ : 粘性係数
- ν : 動粘性係数

- ξ : 液柱の変位
- ξ_i : ξ の極大値
- ρ : 流体の密度
- τ_w : 壁面せん断応力
- τ_c : 複素壁面せん断応力
- ω : 角振動数
- ω_0 : 液柱の固有振動数 $\sqrt{2g/l}$

参 考 文 献

- 1) 日野幹雄・沢本正樹・高須修二：円管内振動流の乱流遷移に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第237号，1975.
- 2) Hino, M., Sawamoto, M. and Takasu, S. : Experiments on transition to turbulence in an oscillatory pipe flow, Jour. Fluid Mech. 75, 193-207, 1976.
- 3) Kajiura, K. : On the bottom friction in an oscillatory current, Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. Tokyo, Vol. 42, 1964.
- 4) Kajiura, K. : A model of the bottom boundary layer in water wave, Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. Tokyo, Vol. 46, 1968.
- 5) Riedel, H.P., Kamphuis, J.W. and Brebner, A. : Measurement of bed shear stress under waves, Proc. 13th Coastal Engineering (Vancouver), 1972.
- 6) Jonsson, I.G. : Measurements in the turbulent wave boundary layer, Proc. 10th IAHR (London), Vol. 1, 1963.
- 7) Johns, B. : The damping of gravity waves in shallow water by energy dissipation in a turbulent boundary layer, Tellus, Vol. XX, 1968.
- 8) 野田英明：波動による乱流境界層の発達，第16回海岸工学講演会，1969.
- 9) 安川 浩・田川昌宏：管内自由振動流の減衰性に関する研究，土木学会論文報告集，第208号，1972.
- 10) 堀川清司・渡辺 晃：表面波による振動流境界層に関する実験的研究，第15回海岸工学講演会，1968.
- 11) 堀川清司・水口 優：振動流境界層に関する実験，第20回海岸工学講演会，1973.
- 12) Eagleson, P.S. : Laminar damping of oscillatory waves, Proc. ASCE, Vol. 88, No. HY 3, 1962.
- 13) 岩垣雄一・土屋義人・坂井順行：海底摩擦による波高減衰に関する基礎的研究 (2)，第11回海岸工学講演会，1964.
- 14) 松梨順三郎・川谷 健：波による海底変形に関する基礎的研究，第12回海岸工学講演会，1965.
- 15) 土木学会編：水理公式集，1971.
- 16) 日本機械学会編：機械工学便覧，1961.
- 17) 石原藤次郎・本間仁編：応用水理学 中一・II，丸善，1966.
- 18) 荻原能男：利水管路の流量変動にともなう水理学的問題の研究，東京工業大学，学位論文，1973.
- 19) 沢本正樹：円管内振動乱流の流速分布およびエネルギー過程，東京工業大学土木工学科研究報告 No. 19, 1975.
- 20) Hinze, J.O. : Turbulence, McGraw-Hill, 1959.
- 21) Daily, J.W. and Harleman, D.R.F. : Fluid Dynamics, Addison- Wesley, 1966.
- 22) Von Kerczek, C. and Davis, S.H. : Linear stability theory of oscillatory Stokes layers, Jour. Fluid Mech., 62, 753, 1974.
- 23) Patel, V.C. and Head, M.R. : Reversion of turbulent to laminar flow, Jour. Fluid Mech., 34, 371, 1968.