

確率過程論による静定構造物の信頼性解析*

RELIABILITY ANALYSIS OF STATICALLY DETERMINATE STRUCTURES
WITH THEORY OF STOCHASTIC PROCESSES

白 木 渡** ・ 高 岡 宣 善***

By Wataru SHIRAKI and Nobuyoshi TAKAOKA

1. ま え が き

構造物に作用する荷重ならびにその部材強度は、構造物の耐用期間中に時間に関して不規則に変動する確率過程である。それゆえに、構造物の信頼性の正しい解は、確率過程論の助けをかりて初めて求められる。確率過程論を用いた構造物の信頼性に関する研究は、単一部材に単一荷重が作用する場合については、二、三発表されている^{1)~3)}。しかしながら、構造物は、通常多数の部材要素からなり、種々の荷重条件を受けるのが普通であるから、構造物を安全に設計するためには、構造物を構成する全部材およびそれに作用する全荷重条件を考慮した構造系全体の信頼性解析を確率過程論を用いて行う必要がある。

以上のような観点から、本論文では荷重および部材強度をともに確率過程と考えた場合の多部材要素からなる構造物の信頼性解析を確率過程論を用いて行った。構造モデルとしては、任意の部材のいずれかが破壊しても構造系の破壊につながる静定構造物のような“weakest-link”モデルを考えて、まず互いに統計的に独立な m 個の荷重を受ける n 部材要素からなる静定構造物で、荷重および部材強度がともに任意の確率分布を有する確率過程であるような一般的な場合の破壊確率の算定式の誘導を、多次元空間の場合の超過の理論⁴⁾を用いて行った。次に部材強度および部材力がともに正規定常確率過程で、各部材の破壊事象の間の相関関係を考慮した場合の n 部材静定トラスに適用できる多次元式を示した。そして、この一般式の適用方法を具体的に示すために、3部材からなる静定トラスを取りあげ、数値計算を行った。

数値計算は、部材強度が正規確率変数である n 部材静

定トラスに正規定常確率過程である単一荷重が作用する場合および部材強度が正規確率変数である 3 部材静定トラスに正規定常確率過程である 2 つの統計的に独立な荷重が作用する場合について行い、構造物の耐用期間、部材強度および荷重の変動係数、部材の中央安全率および各部材の破壊事象間の相関係数などの構造系全体の破壊確率におよぼす影響を明らかにすることによって、本論文で示すような確率過程論に基づく構造物の信頼性解析の必要性を強調した。

2. 一般的な場合の破壊確率の算定

Fig. 1 に示すような“weakest-link”モデルタイプの n 部材静定トラスに任意の分布を有する互いに統計的に独立な確率過程である m 個の荷重 $S_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, m$) が準静的に同時に作用し続ける場合を考える。一般性をそこなうことなしに $S_j(t) > 0$ と仮定する。荷重が準静的に作用する確率過程であるから、各部材の部材力 $X_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) は静力学の構造解析より求めることができ、それらもまた確率過程である。また構造物の各部材強度 $R_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) も耐用期間中に、物理的・化学的・その他の作用を受けるので時間的にランダムに変動する確率過程であるとする。この場合、老朽化ならびに強化 (= 負の老朽化) 現象のいずれもが生じうる可能性がある。そして $R_i(t)$ の分布は、引張りも圧縮も同じであると仮定する。

Fig. 1 に示されるような静定構造系の破壊の確率は、部材 i の破壊の事象 E_i を用いて、

$$P_f(t) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \quad (1)$$

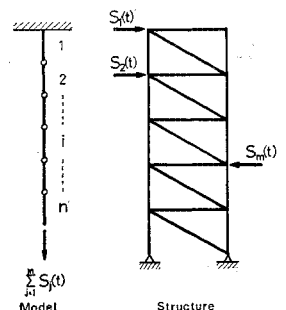


Fig. 1 Weakest-Link System

* 鳥取大学工学部研究報告, 第 6 巻第 1 号, pp. 81-92, 1976 年 3 月および昭和 51 年度土木学会中国四国支部年次学術講演会, I-6 で一部発表。

** 正会員 工修 鳥取大学助手 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部土木工学科

で与えられる。ここに、一般に $\mathbf{P}(E)$ は、事象 E の生起する確率を意味する。式 (1) より静定構造系の破壊とは、少なくとも 1 部材以上において、不等式 $X_i(t) > R_i(t)$ が成立することである。したがって、「強度の余裕」とよばれる補助的な確率過程

$$Z_i(t) = R_i(t) - X_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots (2)$$

を成分に持つ n 次元ランダムベクトル

$$\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t)) \dots\dots (3)$$

を導入すると、系の破壊の事象を考えることは、 n 次元空間でのランダムベクトル $\mathbf{Z}(t)$ の正領域から負領域への超過の問題を考えることになる。

ここで、成分 $Z_i(t)$ の特性値は、確率過程 $X_i(t)$ お

$$p_{-}(\mathbf{0}|t) = - \left[\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} dz_2 dz_3 \dots dz_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 dz_3 \dots dz_n \int_{-\infty}^{\infty} f(0, z_2, z_3, \dots, z_n, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_n | t) \dot{z}_1 dz_1 \right. \\ + \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} dz_1 dz_3 \dots dz_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_3 \dots dz_n \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1, 0, z_3, \dots, z_n, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_n | t) \dot{z}_2 dz_2 + \dots \\ \left. + \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 0, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_n | t) \dot{z}_n dz_n \right] \dots\dots (5)$$

ここに、 $f(z_1, z_2, \dots, z_n, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_n)$ は、与えられた同一時点における $\mathbf{Z}(t)$ とその導関数

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} - \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \dots\dots (6)$$

との同時確率密度である。

一般に、構造物が十分な安全性を有するためには、強度の余裕 $Z_i(t)$ の期待値 $\bar{z}_i(t)$ は $z_i=0$ より十分大きく離れた正の値であり、ゼロから負領域への超過がまれな事象となるものでなければならない。したがって、そのような場合を考えると、ランダムベクトル $\mathbf{Z}(t)$ の負領域への各超過は、ポアソン過程で近似できるので、式 (1) で示される構造系の破壊確率 $P_f(t)$ は、式 (4) で表わされる超過確率の時間密度 $p_{-}(\mathbf{0}|t)$ を用いて、次式で表わされる。

$$P_f(t) = 1 - \exp \left[- \int_0^t p_{-}(\mathbf{0}|t) dt \right] \dots\dots (7)$$

この $P_f(t)$ という値は、時間が t だけ経過する間にランダムベクトル $\mathbf{Z}(t)$ のうち少なくとも 1 つの成分が少なくとも 1 回ゼロの値を負交差する確率を表わしている。

しかし、耐用期間 t の間にランダムベクトル $\mathbf{Z}(t)$ が限界値 0 を超過するために生ずる構造物の破壊の全確率は $P_f(t)$ ではない。全確率は、この上さらに「载荷の最初の時点 $t=0$ において $\mathbf{Z}(t)$ が 0 という値を超過する、すなわち構造物が最初から破壊する」という事象の確率を加えなければならない。この確率は、

$$F_z(\mathbf{0}) = 1 - \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} f_z(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n \dots\dots (8)$$

よび $R_i(t)$ の特性値が既知であれば容易に決定できる。いま、荷重は構造系に対して統計的に独立である場合を考えて、 $X_i(t)$ と $R_i(t)$ との間には相関関係がないものとするれば、 $Z_i(t)$ の期待値、相関関数および分散は、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}_i(t) &= \bar{r}_i(t) - \bar{x}_i(t), \\ K_{z_i}(t_1, t_2) &= K_{r_i}(t_1, t_2) + K_{x_i}(t_1, t_2), \\ \sigma_{z_i}^2(t) &= \sigma_{r_i}^2(t) + \sigma_{x_i}^2(t). \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

n 次元空間でのランダムベクトル $\mathbf{Z}(t)$ の正領域から負領域への超過確率の時間密度 $p_{-}(\mathbf{0}|t)$ は、多次元空間の場合の超過の理論⁴⁾を用いると、次のように表わされる(付録 参照)。

ここで、 $f_z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ は、 $t=0$ でのランダムベクトル $\mathbf{Z}(t)$ の確率密度関数である。

したがって、期間 t における構造物の破壊の全確率 $\hat{P}_f(t)$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{P}_f(t) &= F_z(\mathbf{0}) + \{1 - F_z(\mathbf{0})\} P_f(t) \\ &= 1 - \{1 - F_z(\mathbf{0})\} \exp \left[- \int_0^t p_{-}(\mathbf{0}|t) dt \right] \dots\dots (9) \end{aligned}$$

さらに、次式で与えられる $L(t)$ によって構造物の信頼度を定義する。

$$\begin{aligned} L(t) &= 1 - \hat{P}_f(t) \\ &= \{1 - F_z(\mathbf{0})\} \exp \left[- \int_0^t p_{-}(\mathbf{0}|t) dt \right] \dots\dots (10) \end{aligned}$$

この式からわかるように、構造物の信頼度は、時間の増加とともに低下する。

構造物の耐用期間 T における構造物の信頼度 $L(t) = L(T)$ とその破壊確率 Q とを関係づける式は、

$$1 - Q = \{1 - F_z(\mathbf{0})\} \exp \left[- \int_0^T p_{-}(\mathbf{0}|t) dt \right] \dots\dots (11)$$

のようになる。上式より

$$\int_0^T p_{-}(\mathbf{0}|t) dt = \ln[1 - F_z(\mathbf{0})] - \ln[1 - Q] \dots\dots (12)$$

特に、荷重および部材強度が定常確率過程の場合は、

$$p_{-}(\mathbf{0}) = \frac{\ln[1 - F_z(\mathbf{0})] - \ln[1 - Q]}{T} \dots\dots (13)$$

式 (5) および (8) の積分を行って、構造物の破壊確率 $Q (= \hat{P}_f(t)|_{t=T})$ を見出すのは、部材数の増加に伴

ってかなり困難になる⁹⁾。したがって、一般に静定構造系の破壊の確率は、個々の部材の破壊の事象が統計的に独立、すなわち個々の部材の部材力が互いに統計的に独立であり、各部材の強度も互いに独立であるとして計算される。部材力が互いに独立であるという仮定は明らかに正しくないが、計算が容易に行えるという理由から、この仮定のもとで Q を算出する機会が多い。それを Q^* とする。

もう一つの特別な場合として、個々の部材の破壊の事象が完全相関関係にある場合を考える。この場合の構造系の破壊の確率を Q^{**} とすると、

$$Q^{**} = \max[Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 Q_i は部材 i の破壊確率である。

Q の特別な場合として Q^* および Q^{**} を考えたが、これらの間には、

$$Q^{**} \leq Q \leq Q^* \dots\dots\dots(15)$$

なる不等式が成立する⁹⁾。構造系の破壊の確率 Q の推定値には、上限値 Q^* および下限値 Q^{**} が近似解として用いられるが、これらの限界値が大きく異なっている場合には粗雑な推定値となる。

3. 正規定常確率過程の場合の破壊確率の算定

2. で述べた理論は、任意の分布型を有する確率過程に適用できるものであるが、本論文では、一般に広く用いられる正規定常確率過程について述べる。

構造物に作用する荷重 $S_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, m$) および部材強度 $R(t)$ がいずれも正規定常確率過程であり、かつ互いに非相関である場合を考える。構造物の老朽化の本質からして、 $R(t)$ は非定常であるが、ここでは簡単のために定常確率過程であるとする。そうすると、静定系の構造解析により求まる部材力 $X(t)$ も正規定常確率過程となるので、強度の余裕 $Z(t)$ も正規定常確率過程である。したがって、この場合の結合確率密度 $f(z, \dot{z})$ は、

$$f(z, \dot{z}) = f_z(z) \cdot f_{\dot{z}}(\dot{z}) \dots\dots\dots(16)$$

という形をしている。確率密度 $f_z(z)$ は、

$$f_z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |M|^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2} \{z - \bar{z}\}^T M^{-1} \{z - \bar{z}\}\right] \dots\dots\dots(17)$$

で表わされる。ここに、 $\{z - \bar{z}\}$ は、 $z_i - \bar{z}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) を要素にもつ列マトリックスで、上添字 T の記号その転置を意味する。 M は相関マトリックスであり、 $|M|$ はその行列式である。また、次のような関係式が成り立

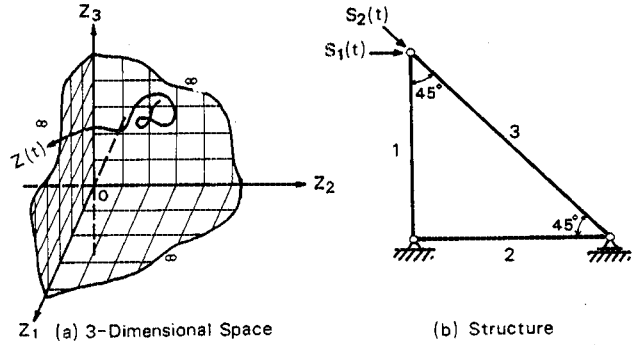


Fig. 2 Three-Member Truss

つ。

$$M = E[\{z - \bar{z}\} \{z - \bar{z}\}^T] \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 E は期待値を求める演算記号である。

同様に、確率密度 $f_{\dot{z}}(\dot{z})$ は、次のように表わされる。

$$f_{\dot{z}}(\dot{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |U|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \dot{z}^T U^{-1} \dot{z}\right] \dots\dots\dots(19)$$

$$U = E[\dot{z} \dot{z}^T] \dots\dots\dots(20)$$

上記の式 (16)~(20) を式 (5) および (8) に適用することにより、式 (9) から n 次元問題における破壊確率の算定式を導くことができるが、ここでは、 n 次元の場合の式を用いて、Fig. 2(b) で示されるような3部材静定トラスに互いに統計的に独立な荷重 $S_1(t)$ および $S_2(t)$ が作用する場合について考える。このような3部材での破壊の問題は、Fig. 2(a) で示される3次元空間でのランダムベクトル $Z(t)$ の正領域から負領域への超過の問題に置き換えられる。

したがって、この場合の超過確率の時間密度 $p_-(0)$ は、式 (5) から次のように表わされる。

$$p_-(0) = - \left[\int_0^\infty \int_0^\infty f_z(0, z_2, z_3) dz_2 dz_3 \times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\dot{z}_2 d\dot{z}_3 \int_{-\infty}^\infty f_{\dot{z}}(\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3) \dot{z}_1 d\dot{z}_1 + \int_0^\infty \int_0^\infty f_z^*(z_1, 0, z_3) dz_1 dz_3 \times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\dot{z}_1 d\dot{z}_3 \int_{-\infty}^\infty f_{\dot{z}}(\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3) \dot{z}_2 d\dot{z}_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty f_z(z_1, z_2, 0) dz_1 dz_2 \times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\dot{z}_1 d\dot{z}_2 \int_{-\infty}^\infty f_{\dot{z}}(\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3) \dot{z}_3 d\dot{z}_3 \right] \dots\dots\dots(21)$$

そして式 (18) で与えられる相関マトリックスとその行列式および式 (20) で与えられる相関マトリックスは、

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & K_{z_1 z_2} & K_{z_1 z_3} \\ K_{z_2 z_1} & \sigma_{z_2}^2 & K_{z_2 z_3} \\ K_{z_3 z_1} & K_{z_3 z_2} & \sigma_{z_3}^2 \end{bmatrix}$$

$$|M| = \sigma_{z_1} \sigma_{z_2} \sigma_{z_3} \begin{Bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{Bmatrix}, \dots\dots\dots (22)$$

$$U = \begin{Bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & K_{z_1 z_2} & K_{z_1 z_3} \\ K_{z_2 z_1} & \sigma_{z_2}^2 & K_{z_2 z_3} \\ K_{z_3 z_1} & K_{z_3 z_2} & \sigma_{z_3}^2 \end{Bmatrix}$$

となる。ここに、 $\sigma_{z_i}^2$ および $\sigma_{z_i}^2$ は、それぞれ $Z_i(t)$ および $\dot{Z}_i(t)$ の分散で、 $K_{z_i z_j}$ および ρ_{ij} は、それぞれ同一時刻 t における $Z_i(t)$ と $Z_j(t)$ の相関モーメントおよび相関係数である。ただし相関マトリックスの対称性より $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ である。また、 $K_{z_i z_j}$ は同一時刻 t における $\dot{Z}_i(t)$ と $\dot{Z}_j(t)$ の相関モーメントである。

$\sigma_{z_i}^2$, $\sigma_{z_i}^2$ および ρ_{ij} は、 $R_i(t)$, $R_j(t)$, $X_i(t)$ および $X_j(t)$ の各特性値を用いて次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z_i}^2 &= \sigma_{r_i}^2 + \sigma_{x_i}^2, \\ \sigma_{z_i}^2 &= \sigma_{r_i}^2 + \sigma_{z_i}^2 - K_{r_i}''(0) - K_{x_i}''(0), \\ \rho_{ij} &= \frac{K_{z_i z_j}}{\sigma_{z_i} \sigma_{z_j}} = \frac{\rho_{r_i r_j} \sigma_{r_i} \sigma_{r_j} + \rho_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}{\sqrt{\sigma_{r_i}^2 + \sigma_{z_i}^2} \sqrt{\sigma_{r_j}^2 + \sigma_{z_j}^2}}; \end{aligned} \right\} (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $K_{r_i}(\tau)$ および $K_{x_i}(\tau)$ は、それぞれ $R_i(t)$ および $X_i(t)$ の相関関数で、 $\prime\prime$ の記号は τ の 2 階微分を表わす。また、 $\rho_{r_i r_j}$ および $\rho_{x_i x_j}$ は、それぞれ部材 i と部材 j の強度および部材力の相関係数で、 $\rho_{r_i r_j} = \rho_{r_j r_i}$ および $\rho_{x_i x_j} = \rho_{x_j x_i}$ である。

この場合の超過確率の時間密度 $p_-(\mathbf{0})$ および載荷の最初の時点で破壊する確率 $F_z(\mathbf{0})$ は、式 (17) および (19) で $n=3$ として、それぞれ式 (21) および (8) に代入すれば得られるが、その際に次のような記号を導入する。

$$\left. \begin{aligned} V_{r_i}^2 &= (\sigma_{r_i} / \bar{r}_i)^2, \quad V_{x_i}^2 = (\sigma_{x_i} / \bar{x}_i)^2, \\ B_{r_i}^2 &= -K_{r_i}''(0) / (\bar{r}_i)^2, \quad B_{x_i}^2 = -K_{x_i}''(0) / (\bar{x}_i)^2, \\ \nu_i &= \bar{r}_i / \bar{x}_i, \quad z_i^* = z_i / \sigma_{z_i}; \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 V_{r_i} および V_{x_i} は、それぞれ部材 i の強度および部材力の変動係数、 ν_i は、部材 i の中央安全率と呼ばれるものである。

そうすると、 $p_-(\mathbf{0})$ および $F_z(\mathbf{0})$ は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} p_-(\mathbf{0}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{1-\rho_{13}^2}} \sqrt{\frac{B_{r_1}^2 \nu_1^2 + B_{x_1}^2}{V_{r_1}^2 \nu_1^2 + V_{x_1}^2}} \exp\left[-\frac{(\nu_1-1)^2}{2(1-\rho_{13}^2)(V_{r_1}^2 \nu_1^2 + V_{x_1}^2)}\right] \\ &\times \int_0^\infty \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{13}^2)} \left\{ \left(z_3^* - \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \right)^2 + 2\rho_{13} \frac{\nu_1-1}{\sqrt{V_{r_1}^2 \nu_1^2 + V_{x_1}^2}} \left(z_3^* - \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \right) \right\} \right] \\ &\times \left[1 - \Phi \left[\frac{-1}{\sqrt{|A|(1-\rho_{13}^2)}} \left\{ (\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}) \left(z_3^* - \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \right) \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - (\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}) \frac{\nu_1-1}{\sqrt{V_{r_1}^2 \nu_1^2 + V_{x_1}^2}} + (1-\rho_{13}^2) \frac{\nu_2-1}{\sqrt{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \right\} \right] \right] dz_3^* \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{1-\rho_{23}^2}} \sqrt{\frac{B_{r_2}^2 \nu_2^2 + B_{x_2}^2}{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \exp\left[-\frac{(\nu_2-1)^2}{2(1-\rho_{23}^2)(V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2)}\right] \\ &\times \int_0^\infty \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{23}^2)} \left\{ \left(z_3^* - \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \right)^2 + 2\rho_{23} \frac{\nu_2-1}{\sqrt{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \left(z_3^* - \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \right) \right\} \right] \\ &\times \left[1 - \Phi \left[\frac{-1}{\sqrt{|A|(1-\rho_{23}^2)}} \left\{ (\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}) \left(z_3^* - \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \right) - (\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}) \frac{\nu_2-1}{\sqrt{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + (1-\rho_{23}^2) \frac{\nu_1-1}{\sqrt{V_{r_1}^2 \nu_1^2 + V_{x_1}^2}} \right\} \right] \right] dz_3^* + \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{1-\rho_{23}^2}} \sqrt{\frac{B_{r_3}^2 \nu_3^2 + B_{x_3}^2}{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \\ &\times \exp\left[-\frac{(\nu_3-1)^2}{2(1-\rho_{23}^2)(V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2)}\right] \int_0^\infty \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{23}^2)} \left\{ \left(z_2^* - \frac{\nu_2-1}{\sqrt{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \right)^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + 2\rho_{23} \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \left(z_2^* - \frac{\nu_2-1}{\sqrt{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \right) \right\} \right] \\ &\times \left[1 - \Phi \left[\frac{-1}{\sqrt{|A|(1-\rho_{23}^2)}} \left\{ (\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}) \left(z_2^* - \frac{\nu_2-1}{\sqrt{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \right) \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - (\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}) \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} + (1-\rho_{23}^2) \frac{\nu_1-1}{\sqrt{V_{r_1}^2 \nu_1^2 + V_{x_1}^2}} \right\} \right] \right] dz_2^*, \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_z(\mathbf{0}) &= 1 - \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho_{23}^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{23}^2)} \left\{ \left(z_2^* - \frac{\nu_2-1}{\sqrt{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \right)^2 \right. \right. \\ &\left. \left. - 2\rho_{23} \left(z_2^* - \frac{\nu_2-1}{\sqrt{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \right) \left(z_3^* - \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \right) + \left(z_3^* - \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \right)^2 \right\} \right] \\ &\times \left[1 - \Phi \left[\frac{-1}{\sqrt{|A|(1-\rho_{23}^2)}} \left\{ (\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}) \left(z_2^* - \frac{\nu_2-1}{\sqrt{V_{r_2}^2 \nu_2^2 + V_{x_2}^2}} \right) \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + (\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}) \left(z_3^* - \frac{\nu_3-1}{\sqrt{V_{r_3}^2 \nu_3^2 + V_{x_3}^2}} \right) + (1-\rho_{23}^2) \frac{\nu_1-1}{\sqrt{V_{r_1}^2 \nu_1^2 + V_{x_1}^2}} \right\} \right] \right] dz_2^* dz_3^* \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ここに、 $\Phi(r)$ は、

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^r \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \dots\dots\dots(27)$$

で与えられる正規確率積分で、 $|A|$ は、式 (22) における相関係数マトリックスの行列式で、 $|A|=1-\rho_{12}^2-\rho_{13}^2-2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}$ である。そして相関係数 ρ_{ij} は、次式で表わされる。

$$\rho_{ij} = \frac{\rho_{r_i r_j} \nu_i \nu_j V_{r_i} V_{r_j} + \rho_{x_i x_j} V_{x_i} V_{x_j}}{\sqrt{V_{r_i}^2 \nu_i^2 + V_{x_i}^2} \sqrt{V_{r_j}^2 \nu_j^2 + V_{x_j}^2}} \dots\dots\dots(28)$$

したがって、Fig. 2(b) に示す3部材トラスに関する破壊確率の算定式は、式 (25) および (26) を式 (13) に代入することによって得られる。

ところで、Fig. 2(b) に示される静定トラスの各部材力は、簡単な構造解析より求まり次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= S_1 && \text{(引張り)} \\ X_2 &= S_1 + (1/\sqrt{2})S_2 && \text{(引張り)} \\ X_3 &= \sqrt{2}S_1 + S_2 && \text{(圧縮)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

荷重 $S_1(t)$ および $S_2(t)$ は、正規定常確率過程で互いに統計的に独立であるから、 $V_{x_i}^2$ 、 $B_{x_i}^2$ および $\nu_i (i=1, 2, 3)$ は、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} V_{x_1}^2 &= V_{s_1}^2, \quad V_{x_2}^2 = \frac{2V_{s_1}^2 + \beta_{21}^2 V_{s_2}^2}{(\sqrt{2 + \beta_{21}})^2} \\ V_{x_3}^2 &= \frac{2V_{s_1}^2 + \beta_{21}^2 V_{s_2}^2}{(\sqrt{2 + \beta_{21}})^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{x_1}^2 &= B_{s_1}^2, \quad B_{x_2}^2 = \frac{2B_{s_1}^2 + \beta_{21}^2 B_{s_2}^2}{(\sqrt{2 + \beta_{21}})^2} \\ B_{x_3}^2 &= \frac{2B_{s_1}^2 + \beta_{21}^2 B_{s_2}^2}{(\sqrt{2 + \beta_{21}})^2} \\ \nu_1 &= \frac{\bar{r}_1}{\bar{s}_1}, \quad \nu_2 = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2 + \beta_{21}})} \frac{\bar{r}_2}{\bar{s}_1} \\ \nu_3 &= \frac{1}{(\sqrt{2 + \beta_{21}})} \frac{\bar{r}_3}{\bar{s}_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

ここに、 $V_{s_1} = \sigma_{s_1} / \bar{s}_1$ 、 $V_{s_2} = \sigma_{s_2} / \bar{s}_2$ 、 $B_{s_1}^2 = -K_{s_1}''(0) / (\bar{s}_1)^2$ 、 $B_{s_2}^2 = -K_{s_2}''(0) / (\bar{s}_2)^2$ 、 $\beta_{21} = \bar{s}_2 / \bar{s}_1$ である。 V_{s_1} および V_{s_2} は、それぞれ荷重 $S_1(t)$ および $S_2(t)$ の変動係数である。

いま、荷重が1つ、たとえば $S_1(t)$ のみが作用する場合を考えると、式 (30) の関係は、 $V_{x_1}^2 = V_{x_2}^2 = V_{x_3}^2 = V_{s_1}^2$ 、 $B_{x_1}^2 = B_{x_2}^2 = B_{x_3}^2 = B_{s_1}^2$ となる。したがって、3つのすべての部材の中央安全率、部材強度の変動係数および部材強度の導関数に関するパラメーター、さらに各部材強度間の相関係数および各部材力間の相関係数がそれぞれ同一である場合、すなわち、 $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$ 、 $V_{r_1} = V_{r_2} = V_{r_3} = V_r$ 、 $B_{r_1}^2 = B_{r_2}^2 = B_{r_3}^2 = B_r^2$ 、 $\rho_{r_1 r_2} = \rho_{r_1 r_3} = \rho_{r_2 r_3} = \rho_r$ 、および $\rho_{x_1 x_2} = \rho_{x_1 x_3} = \rho_{x_2 x_3} = \rho_x$ である場合を考えると、この場合の構造物の破壊確率 Q の算定式は、比較的簡単に次のようになる。

$$\begin{aligned} Q &= 1 - \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \{(z_2^* - \bar{z}^*)^2 - 2\rho(z_2^* - \bar{z}^*)(z_3^* - \bar{z}^*) + (z_3^* - \bar{z}^*)^2\}\right] \\ &\times \left[1 - \Phi\left[\frac{-1}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-3\rho^2-2\rho^3)}} \{\rho(1-\rho)(z_2^* + z_3^* - 2\bar{z}^*) + (1-\rho)\bar{z}^*\}\right]\right] dz_2^* dz_3^* \\ &\times \exp\left[\frac{-3T}{\sqrt{(2\pi)^3(1-\rho^2)}} \sqrt{\frac{B_r^2 \nu^2 + B_{s_1}^2}{V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2}} \exp\left[-\frac{\bar{z}^{*2}}{2(1-\rho^2)}\right] \int_0^\infty \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \{(z^* - \bar{z}^*)^2\}\right] \right. \\ &\left. + 2\rho\bar{z}^*(z^* - \bar{z}^*)\right] \left[1 - \Phi\left[\frac{-1}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-3\rho^2-2\rho^3)}} \{\rho(1-\rho)(z^* - \bar{z}^*) + (1-\rho)\bar{z}^*\}\right]\right] dz^* \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}^* &= \frac{\nu - 1}{\sqrt{V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2}}, \\ \rho &= \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \frac{\rho_r \nu^2 V_r^2 + \rho_x V_{s_1}^2}{V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

式 (31) において $\rho=0$ ($\rho_r = \rho_x = 0$)、すなわち個々の部材の破壊の事象が統計的に独立な場合の破壊確率 $Q = Q^*$ は、次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} Q^* &= 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{1-\nu}{\sqrt{V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2}}\right)\right]^3 \\ &\times \exp\left\{\frac{-3T}{2\pi} \sqrt{\frac{B_r^2 \nu^2 + B_{s_1}^2}{V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2}}\right\} \\ &\times \exp\left[\frac{-(\nu-1)^2}{2(V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2)}\right] \left[1 - \Phi\left(\frac{1-\nu}{\sqrt{V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2}}\right)\right]^2 \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

この式は、式 (16)~(20) を考慮して n 部材静定トラスに容易に拡張できる。すなわち

$$\begin{aligned} Q^* &= 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{1-\nu}{\sqrt{V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2}}\right)\right]^N \\ &\times \exp\left\{\frac{-NT}{2\pi} \sqrt{\frac{B_r^2 \nu^2 + B_{s_1}^2}{V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2}} \exp\left[\frac{-(\nu-1)^2}{2(V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2)}\right]\right\} \\ &\times \left[1 - \Phi\left(\frac{1-\nu}{\sqrt{V_r^2 \nu^2 + V_{s_1}^2}}\right)\right]^{N-1} \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

ここに、 N は部材数である。この式において $N=1$ とすると、A.P. Ржаницын の式^{1),7)} に一致する。そしてその時の Q^* の値がこの場合の Q^{**} の値になる。

4. 数値計算例および考察

(1) 単一荷重が作用する場合

3. で導いた式 (31)~(34) を用いて、Fig. 2(b) に示した3部材静定トラスで、単一荷重 $S_1(t)$ が作用す

る場合の破壊確率 Q , Q^* および Q^{**} の計算を行う。例として、すべての部材の部材強度が同一の変動係数 V_r を有する正規確率変数であり、荷重 $S_1(t)$ は、相関関数 $K_{S_1}(\tau) = \sigma_{S_1}^2 \exp(-\alpha_1 \tau^2)$ を有する正規定常確率過程である場合を考える。この場合、部材強度を確率変数としているので、部材強度の導関数に関するパラメータ B_r は、 $B_r = 0$ となる。さらに荷重 $S_1(t)$ の相関関数が $K_{S_1}(\tau) = \sigma_{S_1}^2 \exp(-\alpha_1 \tau^2)$ と与えられているから、 $B_{S_1} = 2\alpha_1 V_{S_1}^2$ になる。この計算においては、 $\alpha_1 = 1/\text{day}^2$ であるとした。また、各部材の部材力は、静定系の構造解析より求まるから、これらの部材力は、互いに完全相関関係にあるので $\rho_x = 1.0$ とし、各部材強度の相関係数は、 $\rho_r = 0, 0.1$ の2つの場合を考えた。そして耐用期間 T は、 $T=0$ と $T=1000(\text{days})$ とした。

各部材の破壊の事象の間の相関性を表わす相関係数 ρ および部材強度の変動係数 V_r が、どのように構造物の全破壊確率 Q に影響をおよぼすかを調べるために、中央安全率 ν と破壊確率 Q との関係を図.3 および図.4 に示した。図.3 は、 $V_{S_1} = 0.2$, $V_r = 0.13$ の場合で、図.4 は、 $V_{S_1} = 0.2$, $V_r = 0.17$ の場合である。2つの図からわかるように、中央安全率 ν が 1.0 から 2.0 の小さな値では、破壊確率 Q は、 ρ の影響を

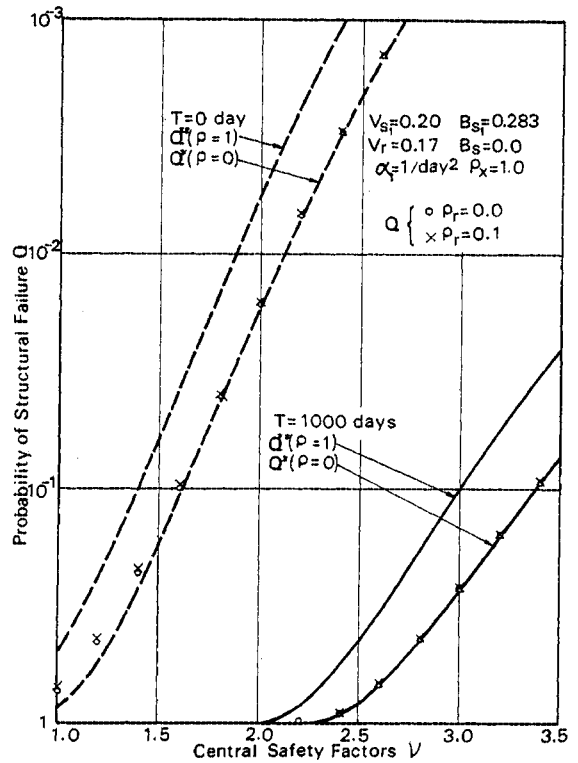


Fig. 4 Influence of Coefficient of Correlation for the Member Failures on Probability of Structural Failure ($V_r=0.17$)

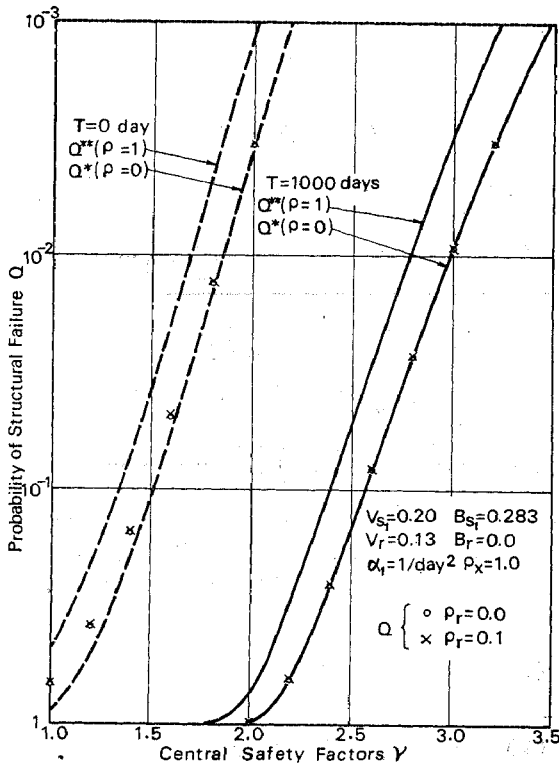


Fig. 3 Influence of Coefficient of Correlation for the Member Failures on Probability of Structural Failure ($V_r=0.13$)

Table 1 Value of Probability of Structural Failure Q

V_r	ρ_r	ν	$T=0(\text{day})$			$T=1000(\text{days})$		
			1.2	1.6	2.0	2.0	2.2	2.4
0.13	0	0	0.5166*	0.0553*	0.0034*	0.981*	0.649*	0.252*
		0.1	0.3829	0.0458	0.0033	0.978	0.644	0.251
	0.1	0	0.3733	0.0472	0.0033	0.976	0.641	0.250
		0.1	0.2152**	0.0188**	0.0011**	0.732**	0.295**	0.092**
0.17	0	0	0.5644*	0.1091*	0.0168*	1.000*	0.997*	0.924*
		0.1	0.4535	0.0986	0.0164	1.000	0.997	0.922
	0.1	0	0.4410	0.0958	0.0161	1.000	0.996	0.921
		0.1	0.2419**	0.0378**	0.0056**	0.990**	0.856**	0.577**

$V_{S_1} = 0.2$, $B_{S_1} = 0.283$, $B_r = 0.0$, $\alpha_1 = 1/\text{day}^2$, $\rho_x = 1.0$
ただし、* および ** の値は、それぞれ $Q^*(\rho_x = \rho_r = 0)$ および $Q^{**}(\rho_x = \rho_r = 1)$ の値である。

Table 2 Value of Coefficient of Correlation ρ

ν	ρ_r	$V_r = 0.13$		$V_r = 0.17$	
		0	0.1	0	0.1
1.0		0.703	0.733	0.581	0.622
1.2		0.622	0.660	0.490	0.541
1.6		0.480	0.532	0.351	0.416
2.0		0.372	0.435	0.257	0.331
2.2		0.328	0.396	0.222	0.300
2.4		0.291	0.362	0.194	0.274

$V_{S_1} = 0.2$, $B_{S_1} = 0.283$, $B_r = 0.0$, $\alpha_1 = 1/\text{day}^2$, $\rho_x = 1.0$

けて $Q^*(\rho=0)$ と $Q^{**}(\rho=1)$ の間にあり、式 (15) の関係を満たしていることがわかる。 ν が 2.0 以上になるとその影響もなくなりほとんど Q^* の曲線と一致する。したがって、 $T=1000(\text{days})$ の場合の Q の値は、ほとんど Q^* の値に一致する。この傾向は、 V_r の値が大きいほど顕著である。具体的な数値は、Table 1 に示す。このような傾向は、従来の解析結果⁹⁾ においても見られるが、これは式 (32) で示される $-\rho$ の値が Table 2 に示すように、 ν と V_r の増大にともなって小さくなるからである。また、Fig. 3 および Fig. 4 からわかるように、破壊確率の値は、 $T=0$ の場合より $T=1000(\text{days})$ の方がかなり大きい。そして T の値にかかわらず V_r の値が大きいほど破壊確率は大きくなるが、その傾向は $T=0$ より $T=1000(\text{days})$ の場合の方がより顕著である。

以上は、部材数 $n=3$ の場合の結果であるが、このような傾向は n が増加しても必ず認められるものと考えられる。したがって、本論文で考えているような静定トラスの確率過程論による信頼性解析においては、各部材間の破壊事象の間の相関性を考慮しなくてもある程度の精度で破壊確率の算定が可能である。そこで、これ以後の数値計算は、各部材間の破壊事象が統計的に独立な場合で、 n 部材静定トラスに適用できる式 (34) を用いて行うことにし、その他の条件は、この節のはじめに示したものを採用することにする。

まず Fig. 5 は、風あるいは地震のように荷重の変動係数が強度の変動係数を大きく上まわっているような場合の構造物の破壊確率 Q^* が部材数 N および耐用期間 T とどのような関係にあるかを調べるために、 $V_{s1}=0.3$ 、 $V_r=0.05$ 、 $T=0, 1000(\text{days})$ 、 $N=1, 10, 50, 100$ の場合の中央安全率 ν と破壊確率 Q^* の間の関係を示したものである。Fig. 6 は、死荷重載荷の場合のように強度の変動性が優位を占めるような場合の構造物の破壊確率 Q^* が N および T とどのような関係にあるかを調べるために、 $V_{s1}=0.2$ 、 $V_r=0.15$ とし、Fig. 5 と同様なグラフを示す。2つの図からわかるように、 V_{s1} が V_r よりも優位を占める場合は、 $Q^*=0.5 \times 10^{-3}$ の値を得るためには、中央安全率 ν は、 $T=0$ で $N=1$ のとき $\nu=2.05$ 、 $N=10$ のとき $\nu=2.25$ であればよいが、 V_r が V_{s1} よりも優位を占める場合は、 $N=1$ のとき $\nu=2.2$ 、 $N=10$ のとき $\nu=2.8$ が必要となる。この傾向は、 T と N の増加にともなって顕著になる。この傾向を詳細に調べるために、 $Q^*=0.5 \times 10^{-3}$

にするために必要な $N=1$ の場合の中央安全率 $\nu(1)$ に対する任意の部材数 N の場合の中央安全率 $\nu(N)$ の比、すなわち相対安全率と部材数 N との関係は $T=0$ と $T=1000(\text{days})$ の場合について Fig. 7 に示す。この図から明らかなように、強度の変動性が優位を

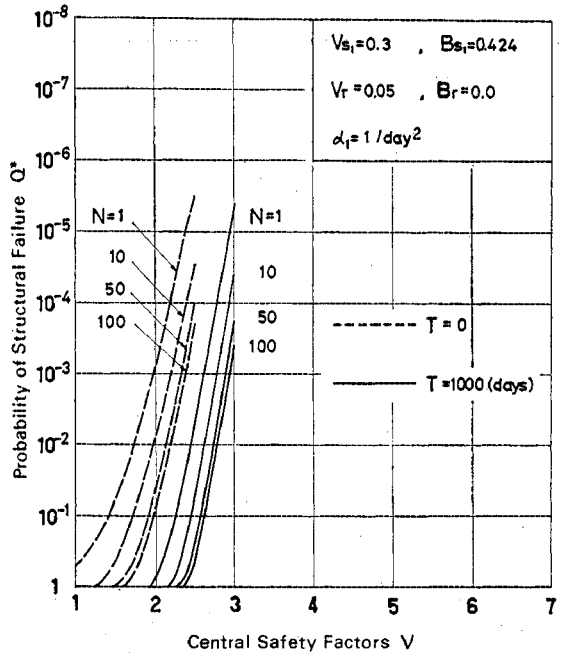


Fig. 5 Probability of Structural Failure for the Case of Load Variability Dominance

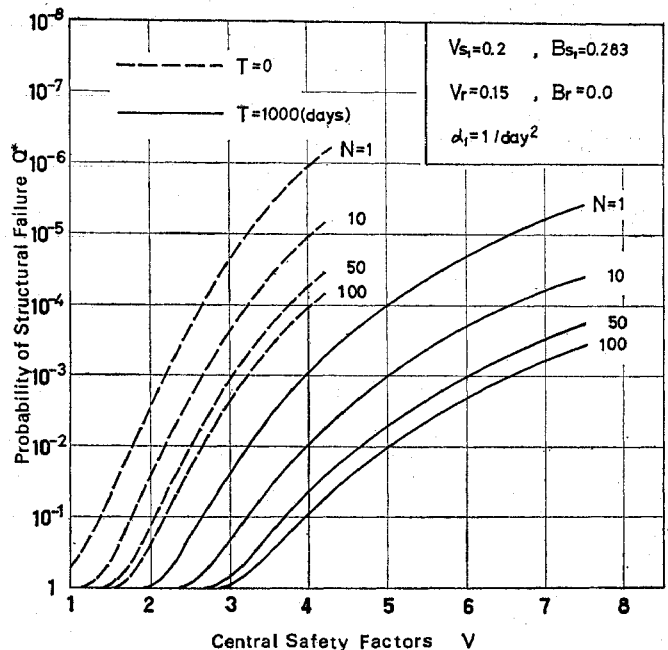


Fig. 6 Probability of Structural Failure for the Case of Strength Variability Dominance

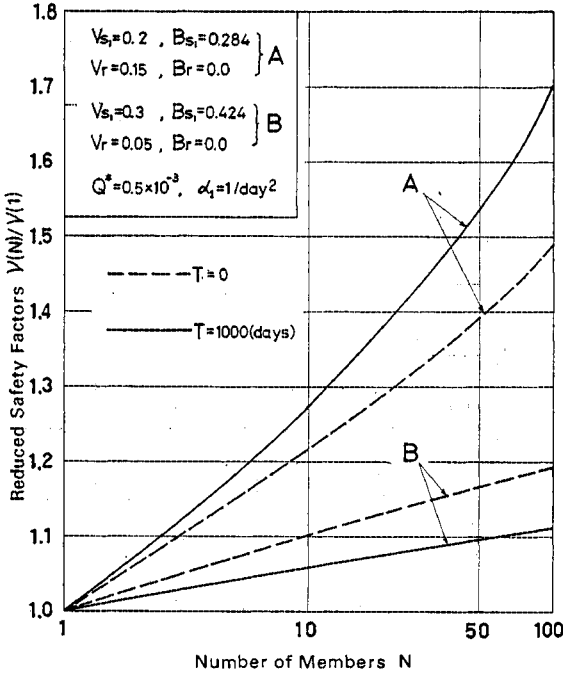


Fig. 7 Reduced Safety Factor versus Number of Elements

占める場合は、部材数 N の増加に伴って中央安全率 ν をかなり増加させなければならない。すなわち相対安全率を 1.0 以上にとらなければならない。荷重の変動性が優位を占める場合は、 N が増加しても部材数が 1 の場合の中央安全率に近い値でよい。すなわち相対安全率が 1.0 に近い値でよい。またこれらの傾向は、 $T=0$ の場合よりも $T=1000$ (days) の場合の方がより顕著である。以上の結果から、本論文で述べたような耐用期間 T を考慮した確率過程論に基づく構造物の信頼性解析の重要性が強調される。

構造物の耐用期間 T の破壊確率 Q^* におよぼす影響の大きさを示すために、 $\nu=2.5 \sim 4.5$ と変化させた場合の Q^* と T の間の関係を Fig. 8 に示す。ただし、 $V_{s1}=0.2$ 、 $V_r=0.15$ 、 $N=10$ の場合を考えることにする。図からわかるように、 Q^* は $\nu=3.5$ の値では $T=0$ から $T=1000$ (days) の間で 10^{-3} から 10^{-1} のオーダーに急激に増加し、それ以後もなめらかに増加している。 Q^* の値は、 T の増加に伴ってかなり大きくなることがわかる。したがって、前述したように構造物を安全に設計するためには、確率過程論に基づいた信頼性解析が必要であることは、この図からも明らかである。

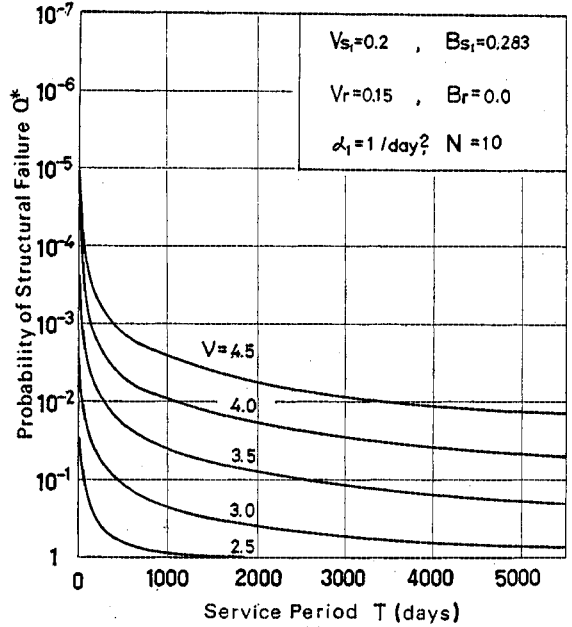


Fig. 8 Relationship between the Probability of Structural Failure and Service Period

部材強度の変動係数 V_r の破壊確率 Q^* におよぼす影響については、単一部材の場合にはすでに研究され^{2),3)}、 Q^* は V_r に非常に敏感であることがわかっているが、ここでは多部材要素からなる構造物についてもその影響がどのようになるかを調べるために、 $V_{s1}=0.2$ 、 $T=1000$ (days)、 $N=1, 10$ で $V_r=0.0, 0.1, 0.15$ と変化

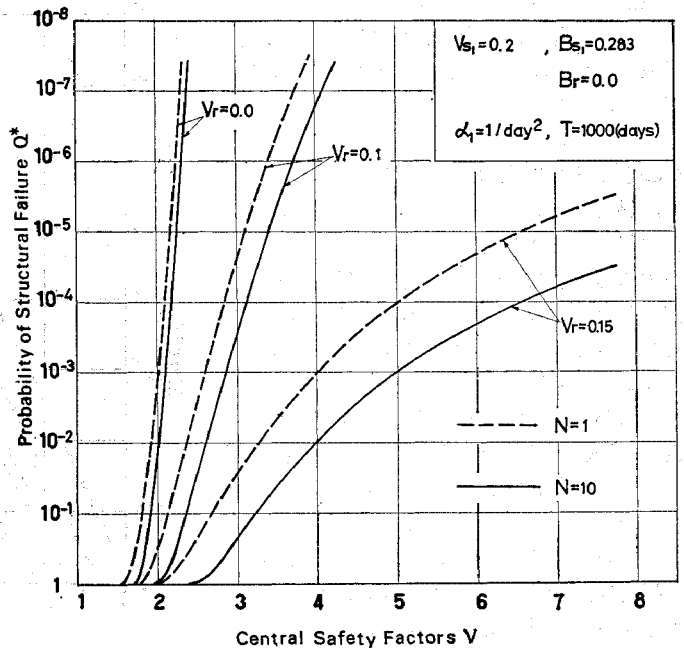


Fig. 9 Influence of Coefficient of Variation of Strength on Probability of Structural Failure

させた場合の Q^* と ν の間の関係を Fig. 9 に示す. ここに $V_r=0.0$ の場合とは, 強度が確定値である場合で, その特性値として \bar{v} を用いた場合である. すなわち本来確率量であるべき強度を確定値として, その平均値を用いた場合である. 図から明らかなように, ν が大きくなるに従って上記の3つの V_r の値に対応する曲線群は互いに大きく離れてくる. これは ν の増加に伴って破壊確率 Q^* の算定誤差が著しく増加することを意味している. この傾向は, 部材数が大きい場合の方が著しい. また V_r が 0.1 から 0.15 とわずか 0.05 増加しただけで, $N=10$, $\nu=3.5$ の場合において Q^* は 10^{-5} のオーダーから 10^{-1} のオーダーに増加している. すなわち Q^* は, V_r に非常に敏感であることがわかる. この傾向をさらに詳しく調べるために, $V_{s_1}=0.2$, $T=1000(\text{days})$, $N=10$ の場合で $\nu=2.5\sim 4.0$ と変化させた場合の Q^* と V_r の間の関係を Fig. 10 に示す. この図からわかるように, Q^* は ν が 3.5, 4.0 と大きくなると強度の変動係数 V_r に非常に敏感になる. すなわち単一部材の構造物の場合と同様に, 多部材要素からなる構造物の場合にも安全性を高めるために ν を大きくするほど強度の変動性に留意する必要があることがわかる.

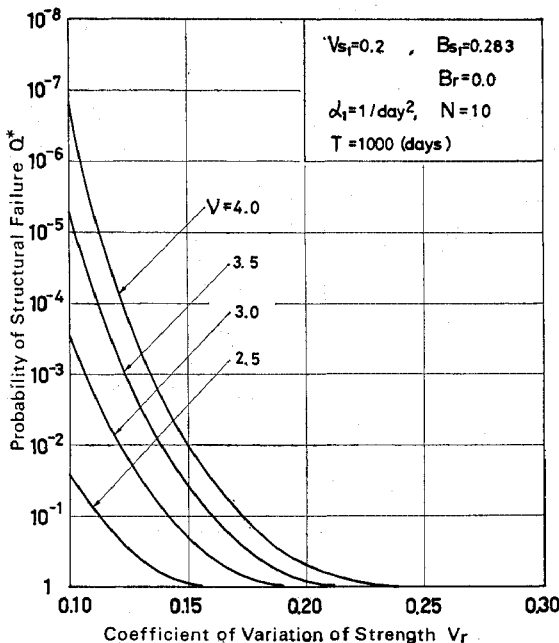


Fig. 10 Relationship between Probability of Structural Failure and Coefficient of Variation of Strength

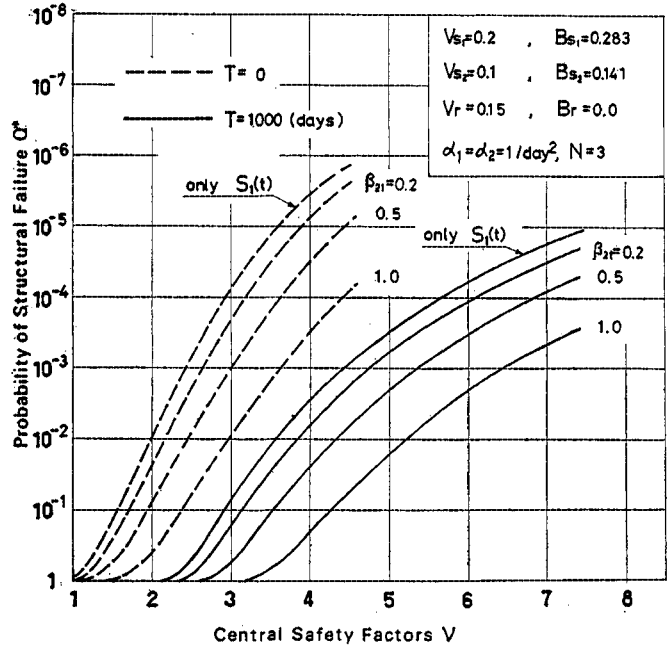


Fig. 11 Probability of Structural Failure subject to Two Loads

(2) 2つの荷重が作用する場合

Fig. 2 に示されているような3部材静定トラスに荷重 $S_1(t)$ および $S_2(t)$ が作用する場合で, 各部材の破壊事象が統計的に独立な場合の破壊確率 Q^* の計算を行う. 例として, 強度が3部材とも同一の変動係数 V_r を有する正規確率変数であり, 荷重 $S_1(t)$ および $S_2(t)$ は, それぞれ相関関数 $K_{s_1}(\tau)=\sigma_{s_1}^2 \exp(-\alpha_1 \tau^2)$ および $K_{s_2}(\tau)=\sigma_{s_2}^2 \exp(-\alpha_2 \tau^2)$ を有する互いに統計的に独立な正規定常確率過程である場合を考える. この場合も前節と同様, 強度の導関数に関するパラメーター B_r は, $B_r=0$ となる. さらに荷重 $S_1(t)$ および $S_2(t)$ の導関数に関するパラメーターは, それぞれ $B_{s_1}^2=2\alpha_1 V_{s_1}^2$ および $B_{s_2}^2=2\alpha_2 V_{s_2}^2$ となる. 前節と同様に, この場合も常に $\alpha_1=\alpha_2=1/\text{day}^2$ としておく. また, 部材強度は荷重の数が増加しても変化しないものとする. この場合の各部材の中央安全率と $S_1(t)$ のみが作用した前節の場合の部材の中央安全率 ν との関係は, $\nu_1=\nu$, $\nu_2=\nu_3=\sqrt{2}\nu/(\sqrt{2}+\beta_{21})$ となる ($\beta_{21}=\bar{s}_2/\bar{s}_1$).

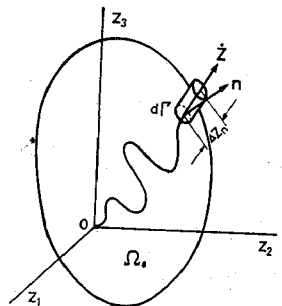


Fig. 12 Threshold Crossing in Multidimensional Space

以上より, 式 (25) お

および (26) において $\rho=0$ として式 (13) に代入して求められる破壊確率 Q^* と前節の場合で $N=3$ として求められる破壊確率 Q^* を $S_1(t)$ のみが作用したときの部材の中央安全率 ν を横軸にとって示したのが Fig. 11 である。ただし、 $V_r=0.15, V_{s_1}=0.2, V_{s_2}=0.1, \beta_{21}=0.2, 0.5, 1.0, T=0, 1000(\text{days})$ とした。図からわかるように、 β_{21} が 0.2, 0.5, 1.0 と増加するごとに、すなわち $S_2(t)$ の荷重の平均値が増大するごとに、荷重 $S_1(t)$ および $S_2(t)$ がともに作用した場合の破壊確率は、当然荷重 $S_1(t)$ のみが作用した場合の破壊確率よりもかなり大きくなっている。また、この傾向は、 $T=1000(\text{days})$ の場合になるとより顕著である。

5. あとがき

多くの荷重の作用を受ける多部材要素からなる“weakest-link”モデルタイプの静定構造物の信頼性解析を確率過程論を用いて行った。その結果をまとめると次のようである。

(1) 多次元空間の場合の超過の理論を用いて、荷重および部材強度がともに任意の確率分布を有する確率過程であるような一般的な場合の静定構造物の破壊確率の算定式を誘導した。

(2) (1) で誘導した式を2つの荷重作用を受ける3部材静定トラス構造物に適用し、荷重および部材強度がともに正規定常確率過程で、各部材の破壊事象の間の相関性を考慮した場合の構造物の破壊確率の算定式を誘導した。

(3) (2) で誘導した式において、荷重作用が単一で、構造物を構成するすべての部材の中央安全率、部材強度の変動係数、部材強度の導関数に関するパラメーター、各部材強度および部材力間の相関係数がすべて同一であるとして式の簡略化を行った。また各部材の破壊事象が統計的に独立であると考えると、その式は、正規確率積分を用いてさらに簡単化され、容易に n 部材静定トラスの場合に拡張できることを示し、その場合の式を誘導した。

(4) (2) および (3) で誘導した式を用いて数値計算を行い、多部材要素からなる静定構造物の破壊確率におよぼす構造物の耐用期間、荷重および部材強度の変動係数、部材の中央安全率、部材数および各部材間の破壊に関する相関係数などの影響を明らかにした。すなわち本論文で示したような確率過程論を用いて求めた破壊確率の値の方が、従来の静的信頼性理論による値よりも大きくなり、その傾向は、部材強度の変動係数、構造物の耐用期間、部材の中央安全率および部材数が大きくなるほど顕著であることがわかった。また部材強度の変動係

数の大きさにかかわらず、部材の中央安全率が 2.0 以上になると各部材の破壊事象の間の相関性を考慮しなくてもある程度の精度で破壊確率の算定が可能である。

本研究で取り扱った荷重は、構造物の耐用期間を通じて作用する荷重、すなわち長期的な変動をする荷重である。たとえば橋梁に作用する風や交通荷重、海中構造物に作用する波浪荷重などである。これらの荷重は単に1日とか2日間だけ作用するのではなくて、構造物の使用期間中（断続的ではあるにせよ）ずっと作用し続けるものである。本論文ではこのような荷重を対象とし、これらの不規則変動量の特性を期待値と相関関数とによって特徴づけている。このような時間領域内で長期にわたって変動する荷重作用を受ける構造物の信頼性解析は（確率変数論ではなくて）本論文に示したようは確率過程論のたすけをかりてはじめて可能となる。

本研究における数値計算には、鳥取大学工学部計算機センターの TOSBAC-3400/21 を使用した。式 (31) の数値積分に際しては、Lagurre-Gauss の多点法⁹⁾ のうちの 26 点法を採用した。

最後に、本研究を遂行するにあたり数値計算そのほかにご協力いただいた当研究室の大学院学生山根和弘君ならびに学部学生松岡和己君（現在大阪大学大学院学生）に謝意を表わす次第である。なお、本研究の一部は昭和 51 年度の文部省科学研究費（一般研究 C、課題番号 155164）によった。

【付録】 $p_-(0|t)$ の誘導

n 次元空間において、ランダムベクトル $Z(t)$ が許容領域 Ω_0 の境界 Γ を外向きの法線方向で超過する確率の時間密度 $p(\Gamma|t)$ は、一次元空間の場合と同様な議論を行うことによって、次式で与えられる。

$$p(\Gamma|t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P_1(\Gamma|t)}{dt} \dots\dots\dots (A.1)$$

ここに、 $P_1(\Gamma|t)$ は、十分小さなインターバル dt の間に、表面 Γ と過程 $Z(t)$ とが内から外への交差を1回行うという不規則事象の確率である。式 (A.1) は、 $Z(t)$ とその第1次導関数 $\dot{Z}(t)$ との間の結合確率密度 $f(z, \dot{z}|t)$ を用いて次式で示される (Fig. 12 参照)。

$$p(\Gamma|t) = \int_{\Gamma} d\Gamma \int_{z_n > 0} f(z_r, \dot{z}|t) \dot{z}_n dz \dots\dots\dots (A.2)$$

- ここに
- z_r : $Z(t)$ の境界面 Γ 上での値、
- \dot{z}_n : $Z(t)$ の第1次導関数の法線方向成分、すなわち $\dot{z}_n(\dot{z}, n)$,
- n : 外向きの法線の単位ベクトル。

この式 (A.2) が文献 4) で示されている n 次元空間でのランダムベクトル $Z(t)$ が許容領域を内から外へ超過する確率の時間密度である。

本論文では、ランダムベクトル $Z(t)$ の正領域から負領域への超過確率の時間密度 $p_{-}(0|t)$ が必要である。したがって、式 (A.2) の積分で $Z(t)$ の正領域から負領域への超過の場合だけを取り出して成分表示すると、本文中の式 (5) となる。

参 考 文 献

- 1) А.Р. Ржаницын : Определение коэффициента запаса при нагрузках, представляющих собой случайные процессы. Строительная механика и расчет асчет сооружений, No. 3, pp. 7~11, 1971-6.
- 2) 中山隆弘 : 不規則振動における first-passage probability について, 第 25 回土木学会中国四国支部学術講演会概要集, 1975, pp. 1~2.
- 3) 中山隆弘 : 不規則振動における first-passage probability について, 土木学会第 30 回年次学術講演会概要集, pp. 611~612.
- 4) В.В. Болотин : Применение методов теории вероятностей и теории надежности расчетах сооружений. Стройиздат, Москва, 1971, pp. 206~214.
- 5) Moses, F. and Kinser, D.E. : Analysis of Structural Reliability, Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 93, No. ST 5, Oct., 1967, pp. 147~164.
- 6) Ang, H.-S.A. and Amin, M : Reliability of Structures and Structural Systems, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM 2, Apr., 1968, pp. 671~691.
- 7) 高岡直善 : 構造物の設計・安全性・信頼性, 土木学会誌, 第 61 卷第 3 号, pp. 33~41, 1976 年 3 月.
- 8) Moses, F. : Reliability of Structural Systems, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST 9, Sept., 1974, pp. 1813~1820.
- 9) 一松 信・宇野利雄・山口二郎共編 : 電子計算機のための数値計算法Ⅲ, 培風館, 1972, pp. 302~308.

(1976.7.16・受付)