土木学会論文報告集
第 257 号・1977 年 1 月

【ノート】

レオロジーモデルの取扱い方法に関する若干の考察

SOME CONSIDERATIONS ABOUT A METHOD OF APPLYING RHEOLOGY MODELS

赤　木　知　之*
By Tomoyuki AKAGI

1. まえがき

著者は色部との共著で，互いに等価な一般化 Voigt モデルと一般化 Maxwell モデルを用いるならば，Maxwell 材料の粘弾性定数がクリープ試験によって定められることを，土木学会論文報告集　第 213 号に発表した[1]．その際，そこで用いた 2 種類のモデルが互いに等価であることの証明は行ったが，用いるべきモデルの必然性については触れなかった．

従来の研究においても，構造物の粘弾性的挙動を解析する手段として様々なレオロジーモデルが提案されているが，そこに用いられたモデルは，いわゆる単なるモデルとしての扱いしか受けていない．D.R. Bland[2] は，ばねとダッシュポットの様々な組み合わせを考え，互いに等価となるモデルが数多く存在することを示すとともに，線形粘弾性の基礎理論を纒めているが，そこで扱われるモデルが物理的必然性をもっているかどうかまでには触れていない．一方，M.A. Biot[3] は，非可逆過程の熱力学に基づいて粘弾性理論を展開し，従来のレオロジーモデルに，ひとつの物理的意味を与え，モデルを取扱ううえにおける，きわめて重要な概念を提示している．

われわれが，レオロジーモデルを実際に応用する場合に重要なことは，材料の実際の挙動に応じてモデル定数が任意に定められるような，きわめて一般的なモデルを形式化することであろう．石原[4]は，実際の材料挙動と一般化レオロジーモデルとの関連性について論ずるとともに，現象に対応するモデル定数が，それぞれの観測時間に応じて定められることを示している．この考え方は，一般化レオロジーモデルに対し，その取扱い方法において具体的な意味を与えたものと解釈することができる．

本論文は，一般化レオロジーモデルに対するこのような扱い方をさらに具体的に論じ，粘弾性体が備えている特性を一般的に考えることによって，前報[1]で用いた一組の互いに等価な一般化レオロジーモデル（本論の図―5）が，基本的なレオロジーモデルとして必然的に考えられるべきであることを提案するとともに，その根拠について論じたものである．

* 正会員　工博　秋田大学助手 鉱山 学部土木工学科

2. レオロジーモデルの具備すべき条件について

いわゆる線形粘弾性体の特性を現象論的に論ずる場合，Boltzmann による記憶積分表示を用いるのがもっとも一般的である．いま，これを一次元の場合について，次のように表わす．

$$\varepsilon(t)=J(0)\sigma(t)-\int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d\tau}\sigma(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

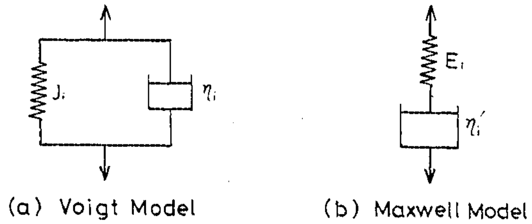
$$\sigma(t)=E(0)\varepsilon(t)-\int_0^t \frac{dE(t-\tau)}{d\tau}\varepsilon(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここに，$J(t)$ および $E(t)$ は，それぞれ，クリープ関数および緩和関数とよばれ，上式からも明らかなように，単位ステップ入力に対する応答の時間的変化を示す粘弾性体の特性関数を表わしている．レオロジーモデルは，これらの特性関数の内容を具体的に表示するものに用いられる．

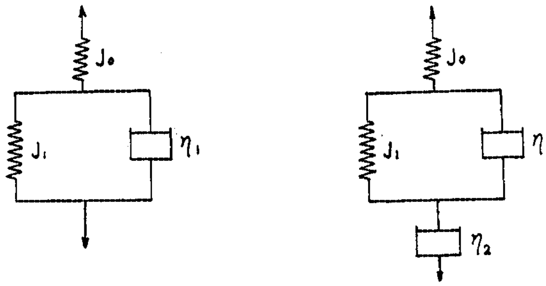
従来から様々なモデルが提案され，種々の問題に応用されているが，材料の粘弾性特性を一般的に評価する場合，導入できるモデルは，次の 3 つの条件を満足するものでなければならないと考えられる．（i）実際の粘弾性材料は，瞬間応答，クリープおよび応力緩和などの特性をともに備えているものであるから，対応するレオロジーモデルも，それらの現象をともに説明できること．（ii）積分方程式 (1) および式 (2) に，一意の解が存在することから次式が得られる[5]が，

$$S\bar{E}(s)=\frac{1}{S\bar{J}(s)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

レオロジーモデルから求められるクリープ関数および緩和関数も，式 (3) の関係を満足するものでなければならないこと．なお，関数の上に付けた－は，その関数のラプラス変換を意味し，S は変換パラメーターである．（iii）レオロジーモデル定数は，材料の実際の挙動に応じて決められるが，その場合，特定の材料の特別な挙動

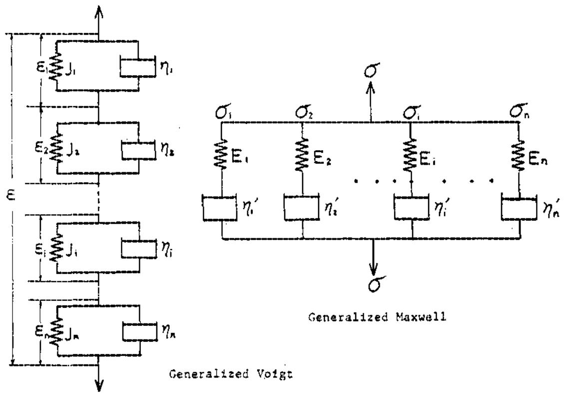


図—1 基本的なレオロジーモデル

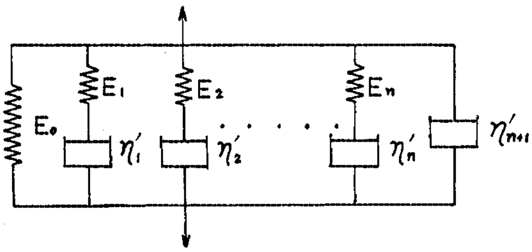


(a) Zener モデル　　(b) Bürger モデル

図—2



図—3 一般化レオロジーモデル



図—4 Biot による一般化 Maxwell モデル

に限定されることなく，任意の現象を一般的に評価できるモデルであること．

以上，3つの条件に沿って従来からのモデルを考えてみよう．たとえば，図—1 に示した Voigt モデルおよび Maxwell モデルは，レオロジーモデルの基本となるものであるが，モデルについて成立する微分方程式を解くと明らかなように，得られる特性関数は，3つの条件をいずれも満足しない．これらのモデルは，特定の現象を説明するには用いてもよいが，材料の粘弾性挙動を一般的に評価するには不適当であると思われる．図—2 に示した Zener モデルおよび Bürger モデルは，少なくとも条件 (i) および (ii) を満足している．そのために，これらのモデルは，多くの研究者によってきわめて頻繁に用いられているようである．しかし，条件 (iii) に相当する一般性を備えていない．

条件 (iii) はきわめて概念的であるが，モデルの物理的意味を考える上で，非常に重要な条件となる．この条件を満足するモデルは，さらに，一般的なモデルを考えることによって得られる．Biot[3] は熱力学的な解釈に基づいて，そのような一般化レオロジーモデルを形式化したが，その概念は，さらに，粘弾性挙動に寄与する材料内部の様々な変形機構を考えることによって具体化できる．たとえば，コンクリート，土および岩など，いわゆる複合体をなす材料の粘弾性挙動は，それらを構成する種々の岩片あるいは鉱物粒，および，粒間を埋める非晶質体あるいは流体など，それぞれの特性が重なり合って現われるものと考えられるから，そのような特性に対応させるレオロジーモデルも，実際の材料挙動に応じて種々の特性を任意に与えることのできる Voigt モデルあるいは Maxwell モデルの重ね合わせとして形式化されるべきであろう．そのようなモデルを図—3 に示す．もちろん，考えられるあらゆる特性を重ね合わせてもよいから，特別の特性値として，たとえば，∞の緩和時間をもつばね要素と零の緩和時間をもつダッシュポット要素を連結した図—4 のようなモデルを考えてもよい．なお，緩和時間 (T_i') はモデル定数 E_i および η_i' によって，$T_i'=\eta_i'/E_i$ と定義され，粘弾性体の緩和挙動を特性づけるきわめて重要なパラメーターである．クリープ現象を特性づける遅延時間 (T_i) は，$T_i=\eta_iJ_i$ と定義される．図—4 のモデルは，Biot によって形式化された粘弾性体の応力-ひずみ関係式[3]に対応する．

以上の概念に基づいて得られた図—3 および図—4 の一般化モデルは，いずれも条件 (iii) を満足している．しかし，条件 (i) および (ii) を満足しているかどうかは，いまのところわからない．一般化モデルに対する微分方程式は，微分演算子 $D=d/dt$ を用いて，

一般化 Voigt モデル：

$$\varepsilon(t)=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{J_i}{T_i\left(D+\frac{1}{T_i}\right)}\right]\sigma(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

一般化 Maxwell モデル：

$$\sigma(t)=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{E_iD}{D+\frac{1}{T_i'}}\right]\varepsilon(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

と与えられるが，これらを直接解いて条件 (i) および (ii) を確かめることは，きわめて困難である．ところが，たとえ問題にする微分方程式が任意の条件に対して直接解けなくとも，もし，物理的に意味のある解の存在が示され，それらが条件式 (3) を満足することさえ明らかにされるならば，対応するモデルは，すべての条件を備えたモデルになるはずである．その詳しい内容を次節で述べる．

3．必然的に考えられる一般化レオロジーモデル

一般化モデルの微分方程式 (4) および (5) を通分整理すると，それらは一般的に次のように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned} &P(D)\sigma(t)=Q(D)\varepsilon(t)\\ &P(D)=\sum_{k=0}^{r}a_kD^k,\quad Q(D)=\sum_{k=0}^{p}b_kD^k \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ただし，a_k および b_k はモデル定数の整式で表わされる[1]．いま，式 (6) にラプラス変換を施し，次のような初期条件

$$\sum_{k=1}^{r}a_k\left[S^{k-1}\sigma(0)+\cdots+\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\sigma(0)\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{p}b_k\left[S^{k-1}\varepsilon(0)+\cdots+\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\varepsilon(0)\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

を仮定すると，次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} &\bar{P}(s)\bar{\sigma}(s)=\bar{Q}(s)\bar{\varepsilon}(s)\\ &\bar{P}(s)=\sum_{k=0}^{r}a_kS,^k\quad \bar{Q}(s)=\sum_{k=0}^{p}b_kS^k \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

なお，初期条件式 (7) の意味は，Y.C. Fung の本[6]に詳しく説明されている．

一方，Boltzmann による粘弾性体の一般式 (1) および (2) にラプラス変換を施すと，次式が得られる．

$$\bar{\varepsilon}(s)=S\bar{J}(s)\bar{\sigma}(s)\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\bar{\sigma}(s)=S\bar{E}(s)\bar{\varepsilon}(s)\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

したがって，式 (8) が $\bar{\varepsilon}(s)=\{\bar{P}(s)/\bar{Q}(s)\}\bar{\sigma}(s)$,および，$\bar{\sigma}(s)=\{\bar{Q}(s)/\bar{P}(s)\}\bar{\varepsilon}(s)$ といずれにも解かれ，それらの逆変換が存在して，次式

$$\bar{J}(s)=\frac{\bar{P}(s)}{S\bar{Q}(s)}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\bar{E}(s)=\frac{\bar{Q}(s)}{S\bar{P}(s)}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

が同時に成立するのは，$\bar{P}(s)$ と $\bar{Q}(s)$ の次数が等しいとき，すなわち，$r=p$ のときに限られることがわかる．式 (11) および式 (12) で定義されるクリープ関数および緩和関数が，式 (3) を満足していることは明らかであろう．結局，微分方程式が式 (6) の形式において $r=p$ となるようなモデルを形式化すれば，それは，本論におけるいわゆる必然的なモデルであるといえよう．

いま，$(n+1)$ 個の Voigt モデルからなる一般化 Voigt モデルの微分方程式を考え，それを式 (6) の形式に整理ししてみよう．それは次のように表わされる．

$$(a_0+a_1D+\cdots+a_nD^n)\sigma(t)$$
$$=(b_0+b_1D+\cdots+b_nD^n+b_{n+1}D^{n+1})\varepsilon(t)\cdots\cdots\cdots(13)$$

すなわち，左辺の次数 r は n であり，右辺の次数 p は $(n+1)$ となって $r=p$ を満足していないことがわかる．そこで，両辺の次数を等しくするために，便宜的に D^{n+1} の係数 b_{n+1} を 0 と置くことにする．微分方程式は単純に次のようになる．

$$(a_0+a_1D+\cdots+a_nD^n)\sigma(t)$$
$$=(b_0+b_1D+\cdots+b_nD^n)\varepsilon(t)\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

ところで，b_{n+1} の内容は，各 Voigt モデルの遅延時間の積として，$b_{n+1}=T_1\cdot T_2\cdot\cdots\cdot T_n\cdot T_{n+1}$ と表わされるから，$b_{n+1}=0$ と置くことは，いずれかの遅延時間を 0 とすることに相当する．そして，Voigt モデルの遅延時間が 0 であるということは，それがばね要素に退化することを意味するから，式 (14) に対応するモデルは，図―5(a) のように表わされる．

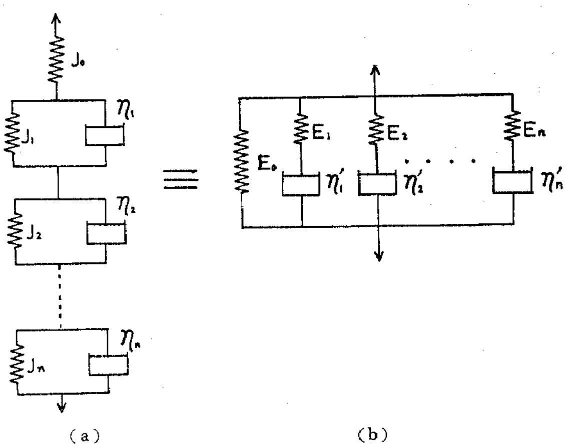
次に，$(n+1)$ 個の Maxwell モデルからなる一般化 Maxwell モデルの微分方程式を考えると，次のように表わされる．

$$(a_0'+a_1'D+\cdots+a_{n+1}'D^{n+1})\sigma(t)$$
$$=(b_1'D+b_2'D^2+\cdots+b_{n+1}'D^{n+1})\varepsilon(t)\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

上式を D で割り，$a_0'=0$ と置くと次式が得られる．

$$(a_1'+a_2'D+\cdots+a_{n+1}'D^n)\sigma(t)$$
$$=(b_1'+b_2'D+\cdots+b_{n+1}'D^n)\varepsilon(t)\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

式 (16) は式 (14) と全く同等である．このことは，$r=p=n$ を満足する 1 つの微分方程式に対し，互いに等価な 2 つのモデルが存在することを意味している．a_0' の内容は，各 Maxwell モデルの緩和時間の逆数の積として，$a_0'=1/(T_1'\cdot T_2'\cdot\cdots\cdot T_n'\cdot T_{n+1}')$ と表わされるから，$a_0'=0$ と置くことは，いずれかの緩和時間を ∞，すなわち，1 個の Maxwell モデルをばね要素に退化さ



図―5　粘弾性体の一般的特性を備えるモデル (1)

せることに相当する．したがって，式（16）に対応するモデルは，図―5(b) のように表わされる．

次数が $r=p=n$ となる微分方程式は，形式的にもう1組作ることができ，それに対し，互いに等価な1組のモデルが存在する．すなわち，n 個の Maxwell モデルからなる一般化 Maxwell モデルの微分方程式は，

$$(a_0'+a_1'D+\cdots+a_n'D^n)\sigma(t)$$
$$=(b_1'D+b_2'D^2+\cdots+b_n'D^n)\varepsilon(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

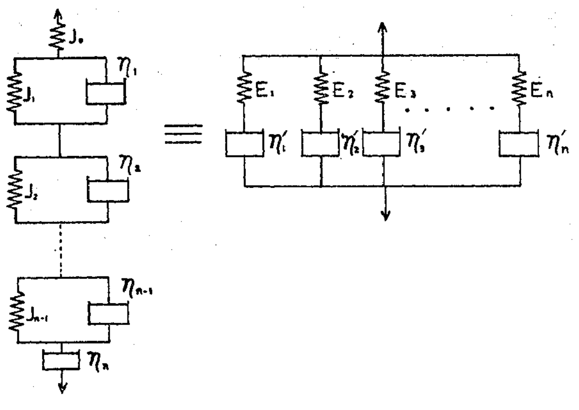
と表わされ，両辺の次数が等しく $r=p=n$ を満足している．また，一般化 Voigt モデルの微分方程式（13）において，$b_0=0$ および $b_{n+1}=0$ と置くと，式（17）と全く同等な次式が得られる．

$$(a_0+a_1D+\cdots+a_nD^n)\sigma(t)$$
$$=(b_1D+b_2D^2+\cdots+b_nD^n)\varepsilon(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

b_0 は各 Voigt モデルの遅延時間の逆数の積で表わされるから，$b_0=0$ と置くことは，いずれの遅延時間を∞，すなわち，Voigt モデル1個をダッシュポットに退化させることに相当する．$b_{n+1}=0$ と置くことは，さきに述べたように，Voigt モデルをばねに退化させることであるから，式（17）および式（18）に対応するモデルは，図―6 の（a）および（b）のようになる．

以上の結果，本論で主張した条件を満足する一般化レオロジーモデルは4種類存在し，2種類ずつ互いに等価な組を形成していることがわかった．これらのほかには考えられないはずである．Biot による図―4 のモデルは，条件（i）および（ii）を満足していないことになる．

ところで，ここに形式化されたモデルを実際に応用する場合，われわれは，まず，モデル定数を実際の材料挙動に応じて決定しなければならないが，もし，定数決定の方法論だけから考えるならば，図―6 のモデルは図―5 のモデルに含めて扱うことができる．すなわち，モデル定数の決定とは，実際の材料が備えている種々の遅延機構を，その種類（遅延時間），強さ（ばね定数）および数（n の値）として評価することであるから，図―6 のモデルのように，∞ の遅延時間，あるいは，0 の緩和時間を持つ機構を特別に強制する必要はなく，仮に ∞ の遅延時間で評価されるような挙動を示す材料があっても，図―5 のモデルにおいて，Voigt モデル1個にそのような特性を与えて処理できるのである．



（a）　（b）

図―6　粘弾性体の一般的特性を備えるモデル（2）

結局，レオロジーモデルによって粘弾性論を展開する場合，われわれは図―5 に示したモデルだけを考えればよく，従来の研究に見られる様々なモデルは，どこのモデルの定数決定の過程で現われるにすぎないことがわかる．

図―5 のモデルから導かれるクリープ関数および緩和関数は，式（3）の関係を満足するから，一方の関数さえ求められるならば，他はその関係によって一意的に定まる．普通は，クリープ試験からクリープ関数を求めてから緩和関数を定め，それを解析的に応用する方法がとられる．レオロジーモデルに対するこのような取扱い方は，きわめて明快であると思う．

4. あとがき

本論で主張するように，モデルを一般的に取扱うためには，付随して，慣用的なモデル定数の決定法を考えておかなければならない．従来において，この種の方法は，わずか石原の論文[4]に見られるだけである．著者は，さらに簡便な方法を考えているが，その説明は次の機会に譲ることにする．

参考文献

1) 色部　誠・赤木知之：Maxwell 材料における粘弾性定数の一決定法，土木学会論文報告集，No. 213，pp. 81～85，1975-2.
2) Bland, D.R. : The Theory of Linear Viscoelasticity, Pergamon Press, pp. 3～5, 1960.
3) Biot, M.A. : Theory of Stress-Strain Relation in Anisotropic Viscoelasticity and Relaxation Phenomena, J. Appl. Phys., Vol. 25, No. 11, pp. 1385～1391, 1954.
4) Ishihara, K. : Effect of Rate of Loading on the Modulus of Deformation of Materials Exhibiting Viscoelastic Behaviors, 土木学会論文報告集, No. 117, pp. 35～50, 1965-5.
5) Gurtin, M.E. and E. Sternberg : On the Linear Theory of Viscoelasticity, Archive Rat. Mech. Analy., 11, pp. 291～356, 1962.
6) Fung, Y.C. : Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, 1965.

（1976.7.1・受付）