

表面波の回折散乱に対する有限要素解析法*

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SURFACE
WAVE DIFFRACTION AND SCATTERING

坂井 藤 一**・月岡 康 一***

By Fujikazu SAKAI and Koichi TSUKIOKA

1. ま え が き

一般に平面 2 次元の表面波動を取扱う問題は、その解析対象領域の形状により内部問題と外部問題に分けることができる。前者は湖沼や液体タンクなど閉じた領域における振動現象を取扱うものであるのに対して、後者は海洋などの開いた領域における波動伝播現象を取扱うものである。後者においては解析対象領域が無限領域となるので、定常波動問題の場合には、無限遠方の境界条件として Sommerfeld の放射条件が課せられる。

物体の存在によって生ずる波動の回折散乱現象は外部問題に含まれる。その中には、解析関数を用いて解が得られている古典的問題がいくつかある。すなわち、防波堤による回折散乱問題に対しては、Sommerfeld による光の半無限直線壁による回折問題の厳密解²⁾を応用した研究がある。Penny and Price³⁾はこの厳密解が半無限防波堤による回折散乱問題に適用できることを示し、Puttnam and Arthur⁴⁾はその近似解を提案すると共に実験的検討を行った。また Blue and Johnson⁵⁾はこの解を重ね合わせることによって両翼防波堤による回折散乱問題を解析し、田中⁶⁾は島状防波堤も含めたいろいろな防波堤配置の場合の回折散乱問題を解析した。さらに、最近では三井⁷⁾が一連の研究において海岸構造物不連続部における波高分布を解析し、近似理論なども提案している。

一方、最近海洋構造物への関心が高まるにつれて、柱状構造物による回折散乱問題もますます重要な課題となってきている。これを解析的に取扱うには、Fourier-Bessel 展開を用いることが多い。MacCamy and Fuchs⁸⁾および田中⁹⁾は円柱まわりの波の問題を解析し、Mo-

moi¹⁰⁾ はさらに複雑な問題を buffer domain 法とよぶ手法を用いて解析している。また、楕円柱による回折散乱問題も、散乱波を Mathieu 関数で級数展開することにより解析される。合田¹¹⁾は楕円柱および島状防波堤による回折散乱問題をこの方法によって議論している。これらの方法とは別に、和田¹²⁾は積分方程式を Wiener-Hopf 解法で扱う Jones の方法を用いて、回折散乱問題の解を得る方法を述べている。

以上はいずれも解析関数を用いた古典的な方法といえるものである。これは極めて特殊な場合にしか解を得ることができないので、任意の地形や構造物形状に応じた解を求めるには適さない。その反面、本質的な波動特性を理解する上で有用なアナログ情報を提供するので、現在でもその重要性はいささかも失われていない。

これに対して、コンピュータの発達に伴い離散化手法による数値シミュレーションが考えられるようになった。特に定常波動問題では、Green 関数を利用することにより支配方程式を積分方程式に変換し、それを離散化して解く方法が用いられるようになった。この例として、Biesel et Ranson¹³⁾、Barailler et Gaillard¹⁴⁾、Lee¹⁵⁾、Daubert et Lebreton¹⁶⁾、井島¹⁷⁾および日野¹⁸⁾の研究があげられる。この方法は、任意の地形および構造物形状に対して適用可能であるが、簡単に水深変化を考慮しにくいという難点を有する。ただし、Barailler らの方法はこの点も克服しており、注目に値するものである。

非定常問題では、基礎微分方程式を直接離散化する差分法¹⁹⁾か、変分原理あるいは重みつき残差法に基づく有限要素法²⁰⁾によらざるを得ないのが現状であろう。特に後者は最近発展を遂げた手法であるが、前者よりも一般性があるといつてよいと思われる。また、これらは定常波動問題に対しても有用であるが、その点については従来あまり研究がなされていないようである。ここでは、定常波動の回折散乱現象に対する有限要素解析法について

* 本論文の一部は、文献 1) において発表された。

** 正会員 工博 川崎重工業(株)鉄構事業部開発設計部

*** 正会員 工修 川崎重工業(株)鉄構事業部開発設計部

て述べることにする。なお、議論を進めるにあたっては平面2次元波動を主眼とするが、その手法はより一般的にも通用するものである。

前述したように、無限領域における定常波動問題においては、無限遠で放射条件が課せられる。これは、地形変化や構造物の存在により発生するかく乱波が、かく乱源から十分離れた地点で一様な外向きの進行波となることを示すものである。この放射条件を解析的に満足する関数については、定常波動問題の Green 関数の研究として古くから検討されており、いくつかの関数が提案されている²¹⁾。ところが、差分法や有限要素法のような数値シミュレーション手法においては、この無限遠における境界条件の取扱いがなかなか面倒である。有限要素法においては、Zienkiewicz²²⁾ および Bai²³⁾ によって放射条件をそのまま有限地点における境界条件として用いる考え方が示された。この方法は、散乱波の減衰が幾何級数的に速い場合には問題ないが、2次元および3次元の回折散乱解析においては一般に減衰が遅く、対象領域を大きくとる必要が生じてくる。

これに対して、有限要素法において解析関数を利用する方法が考えられる。これは、無限遠で放射条件を満足する解析解を有限地点に設けられた仮想境界において FEM に接続させることによって、有限要素法で解析する領域をできるだけ小さくしようとするものである。これには吹出しを未知数として積分方程式を用いた Berkhoff²⁴⁾ の研究、固有関数展開を hybrid 変分原理を用いて接続する Chen and Mei²⁵⁾、Bai and Yeung²⁶⁾、瀬戸・山本²⁷⁾ などの研究がある。

本論で示す考え方は、Green 関数を利用することにより積分方程式を導き、これを境界条件として有限要素法解析するものである。この方法は、Berkhoff の方法と等価であるが、無用な吹出しを求めめる必要がない。本論の考え方の特徴は、Lee などの積分方程式法と有限要素法を結びつけた点にあると思われ、後に述べるように積分方程式の変分原理による解法、あるいは別所の変分原理のより一般化した形と見ることができよう。

本報告では、まず本有限要素法の基礎理論を述べ、次にその応用として水中に直立した円柱、楕円柱、長方形柱および平板などによる回折散乱問題を解析し、従来得られている解との比較を行っている。その結果から見て、本手法の妥当性は検証されたものと思われる。

2. 基礎理論

(1) 基礎方程式

非圧縮、非粘性、非回転の仮定の下に平面2次元微小

振幅波を取扱う。現象が時間的に調和であるとする、水面変動の振幅 η は次の Helmholtz 方程式で与えられる。

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0 \text{ in } \Omega \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 Ω は対象領域、 ∇^2 は x - y 平面における Laplacian、 k は角波数である。 k は角振動数 σ および水深 h により次式で与えられる。

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots(2)$$

ここでは、式 (1) を不透過壁 S_W およびかく乱波から十分離れた無限遠とみなせる地点の境界 S_R に囲まれた領域 Ω において解くことにする (Fig. 1)。この場合の境界条件は、それぞれ次式で与えられる。

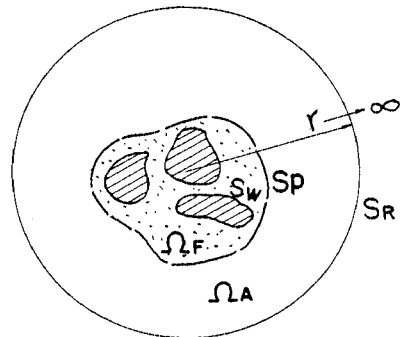


Fig. 1 Analyzed Region

$$\eta_{,n} = 0 \text{ on } S_W \dots\dots\dots(3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (\eta_{s,r} - ik\eta_s) = 0 \text{ on } S_R \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 η_s は散乱波を表わし、 $()_{,n}$ は Ω の境界に対する外向法線方向座標 n による微分を示す。式 (4) は、いわゆる Sommerfeld の放射条件である。

解析にあたっては、全領域 Ω を仮想境界 S_P によって FEM 領域 Ω_F と解析解領域 Ω_A に分割する。前者は地形や水深の変化および任意形状構造物などのかく乱源の存在が許される閉領域であり、後者はそのようなかく乱源のない一定水深の無限領域とする。両者の境界における連続条件は、次のようになる。

$$\eta_F = \eta_A \text{ on } S_P \dots\dots\dots(5)$$

$$\eta_{F,n} = -\eta_{A,n} \text{ on } S_P \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 η_F および η_A はそれぞれ Ω_F および Ω_A における振幅を示す。

(2) 変分原理

η_A を基本波 η_0 と散乱波 η_S の和として次のように表わす。

$$\eta_A = \eta_0 + \eta_S \dots\dots\dots(7)$$

ここで、基本波 η_0 とは地形や構造物などのかく乱源がない場合の波で既知であるから、 η_S を求めれば η_A は決定される。 η_0 は独自に方程式 (1) を満足するので、

η_S も式 (1) を満たさねばならない。

η_F および η_S の満足すべき基礎方程式と境界条件式を整理すると、次のようになる。

$$\nabla^2 \eta_F + k^2 \eta_F = 0 \text{ in } \Omega_F \dots\dots\dots (8)$$

$$\eta_{F,n} = 0 \text{ on } S_W \dots\dots\dots (9)$$

$$\nabla^2 \eta_S + k^2 \eta_S = 0 \text{ in } \Omega_A \dots\dots\dots (10)$$

$$\eta_{S,n} - ik\eta_S = 0 \text{ on } S_R \dots\dots\dots (11)$$

$$\eta_{F,n} = -\eta_{0,n} - \eta_{S,n} \text{ on } S_P \dots\dots\dots (12)$$

$$\eta_F = \eta_0 + \eta_S \text{ on } S_P \dots\dots\dots (13)$$

η を複素表示すると共に、式 (8)~(12) に対して次の汎関数 χ を考える。

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_F} \{(\nabla \eta_F^C)^2 - (k\eta_F^C)^2 \\ & - (\nabla \eta_F^S)^2 + (k\eta_F^S)^2\} d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_A} \{(\nabla \eta_S^C)^2 - (k\eta_S^C)^2 \\ & - (\nabla \eta_S^S)^2 + (k\eta_S^S)^2\} d\Omega \\ & + \int_{S_R} k\eta_S^S \eta_S^C dS \\ & + \int_{S_P} (\eta_{0,n}^C \cdot \eta_S^C - \eta_{0,n}^S \cdot \eta_S^S) dS \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ただし、サフィックス C, S はそれぞれ複素数の実部、虚部を示す。また、式 (13) は付帯条件として課される。第 2 項の部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_F} \{(\nabla \eta_F^C)^2 - (k\eta_F^C)^2 \\ & - (\nabla \eta_F^S)^2 + (k\eta_F^S)^2\} d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_A} \{(\nabla^2 \eta_S^C + k^2 \eta_S^C) \cdot \eta_S^C \\ & - (\nabla^2 \eta_S^S + k^2 \eta_S^S) \cdot \eta_S^S\} d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_R} \{(\eta_{S,n}^C + k\eta_S^S) \cdot \eta_S^C \\ & - (\eta_{S,n}^S - k\eta_S^C) \cdot \eta_S^S\} dS \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_P} \{(\eta_S^C \cdot \eta_{S,n}^C - \eta_S^S \cdot \eta_{S,n}^S) \\ & + 2 \cdot (\eta_{0,n}^C \cdot \eta_S^C - \eta_{0,n}^S \cdot \eta_S^S)\} dS \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

となることから、 η_S として式 (10), (11) を満足する関数をとるならば、上式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_F} \{(\nabla \eta_F^C)^2 - (k\eta_F^C)^2 \\ & - (\nabla \eta_F^S)^2 + (k\eta_F^S)^2\} d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_P} \{(\eta_S^C \cdot \eta_{S,n}^C - \eta_S^S \cdot \eta_{S,n}^S) \\ & + 2 \cdot (\eta_{0,n}^C \cdot \eta_S^C - \eta_{0,n}^S \cdot \eta_S^S)\} dS \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ところで、式 (10) および (11) を満足すべき η_S は、Green 関数を利用して次のように導くことができる。すなわち、Green 関数として、

$$G(P, Q) = H_0^{(2)}(kr) \dots\dots\dots (17)$$

を考える (ただし、 $H_0^{(2)}(kr)$ は 0 次の第 2 種 Hankel

関数、 r は 2 点 P, Q 間の距離である) と、 $G(P, Q)$ は次式を満足する。

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0 \text{ in } \Omega_A \dots\dots\dots (18)$$

$$G_{,n} - ikG = 0 \text{ on } S_R \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{Im}[G] \Big|_{r \rightarrow 0} = - (2/\pi) \cdot \ln(kr) \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $\text{Im}[\]$ は虚部をとることを示す。

領域 Ω_A において次の Green の公式を適用する。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_A} (\eta_S \cdot \nabla^2 G - G \cdot \nabla^2 \eta_S) d\Omega \\ & = \int_{S_R + S_P + S_0} (\eta_S \cdot G_{,n} - G \cdot \eta_{S,n}) dS \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ただし、 S_0 は特異点を囲む微小円の円周である。ここで、 η_S に対する式 (10) および (11)、 G に対する式 (18) および (19) を考慮すれば、特異点の性質 (20) を用いて点 P における振幅 $\eta_S(P)$ は次のように求められる。

$$\eta_S(P) = \frac{i}{4} \int_{S_P} (\eta_S \cdot G_{,n} - G \cdot \eta_{S,n}) dS \text{ in } \Omega_A \dots\dots\dots (22)$$

$$\eta_S(P) = \frac{i}{2} \int_{S_P} (\eta_S \cdot G_{,n} - G \cdot \eta_{S,n}) dS \text{ on } S_P \dots\dots\dots (23)$$

式 (23) は η_S に関する積分方程式である。これを $\eta_{S,n}$ について逆変換すれば、作用素を P として、

$$\eta_{S,n} = P \cdot \eta_S \text{ on } S_P \dots\dots\dots (24)$$

複素表示すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{S,n}^C &= P^C \cdot \eta_S^C - P^S \cdot \eta_S^S \\ \eta_{S,n}^S &= P_S \cdot \eta_S^C + P_C \cdot \eta_S^S \end{aligned} \right\} \text{ on } S_P \dots\dots\dots (25 \cdot a, b)$$

上式および式 (13) を式 (16) に適用することにより、最終的に次の汎関数が得られる。

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_F} \{(\nabla \eta_F^C)^2 - (k\eta_F^C)^2 \\ & - (\nabla \eta_F^S)^2 + (k\eta_F^S)^2\} d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_P} \{(\eta_F^C - \eta_0^C) \cdot \{P^C \cdot (\eta_F^C - \eta_0^C) \\ & - P^S \cdot (\eta_F^S - \eta_0^S) + 2\eta_{0,n}^C\} \\ & - (\eta_F^S - \eta_0^S) \cdot \{P^S \cdot (\eta_F^C - \eta_0^C) \\ & + P_C \cdot (\eta_F^S - \eta_0^S) + 2\eta_{0,n}^S\}\} dS \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

汎関数式 (26) の停留条件から Euler 方程式として式 (8)、自然条件として式 (9) および式 (12) を得る。特に、 Ω_F 領域がない場合には、自然条件として、

$$P \cdot (\eta_F - \eta_0) + \eta_{0,n} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

すなわち次式を得る。

$$\eta_S = \frac{i}{2} \int_{S_P} (\eta_S \cdot G_{,n} + G \cdot \eta_{0,n}) dS \text{ on } S_P \dots\dots\dots (28)$$

これは、式 (23) で $\eta_{S,n} = -\eta_{0,n}$ とおいたものとなる。

式 (28) のような積分方程式から汎関数を導いて変分

原理を展開する考え方は、航空工学の分野における翼解析問題に利用されている²⁸⁾。また、水波の問題では日野ら¹⁸⁾が Galerkin 法など重みつき残差法の適用を行っているが、対称核の性質を利用した汎関数の存在には触れていない。ここで展開した変分原理はそれらと少し形式が異なるものであり、さらに内部の FEM 領域との接続を考えているので、より一般化したものと見なすことができる*。

なお、汎関数 (26) は式 (25) における対称作用素の性質から導かれるものであり、任意形状の S_P に対しては必ずしもこの対称性は成り立たなくなる。その際には、重みつき残差法などを利用して変分式を導かねばならない。たとえば、Galerkin 法では汎関数 (26) の停留原理の代りに、次の変分式を用いればよい。

$$\int_{\Omega_F} \{ -(\nabla^2 \eta_F^C + k^2 \eta_F^C) \cdot \delta \eta_F^C + (\nabla^2 \eta_F^S + k^2 \eta_F^S) \cdot \delta \eta_F^S \} d\Omega + \int_{S_P} [\{ P^C \cdot (\eta_F^C - \eta_0^C) - P^S \cdot (\eta_F^S - \eta_0^S) + \eta_{0,n}^C \} \cdot \delta \eta_F^C - \{ P^S \cdot (\eta_F^S - \eta_0^S) + P^C \cdot (\eta_F^S - \eta_0^S) + \eta_{0,n}^S \} \cdot \delta \eta_F^S] dS = 0 \dots\dots\dots(30)$$

(3) 有限要素法定式化

こうして得られた汎関数を用いて FEM マトリックス方程式を導く。汎関数 (26) の第 1 項から得られるマトリックスは別論文 31) と同様であるので省略し、第 2

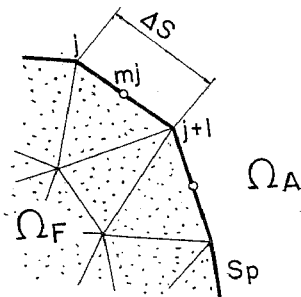


Fig. 2 Discretization in FEM region and on Pseudo Boundary

* 式 (26) の第 1 項がない場合には、汎関数 χ は次の形となる。

$$\chi = \frac{1}{2} \int_{S_P} (\eta_{S,n} \cdot \eta_S + 2\eta_{0,n} \cdot \eta_S) dS \dots\dots\dots(26)'$$

これは、速度ポテンシャル ϕ で表わされた次の別所の変分汎関数²⁹⁾に対応する。

$$J = \frac{1}{2} \int_S (\phi_n \cdot \phi - 2v_0 \cdot \phi) dS \dots\dots\dots(29)$$

ただし、 S は船体表面、 v_0 は S に垂直方向の与えられた速度である。また、このような変分原理の利用については、最近 Zienkiewicz³⁰⁾ も boundary solution procedure と名づけて論じている。

項のマトリックス表示について詳しく述べる。

積分方程式 (23) において Fig. 2 に示すように境界 S_P を NP 個の辺に等分割し、各辺の midpoint m_j をコントロール・ポイントとして近似的に積分を離散化表示する。

$$\eta^S(\xi_{mi}, \zeta_{mi}) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{NP} \{ \eta_S(\xi_{mj}, \zeta_{mj}) \cdot G_{,n}(\xi_{mi}, \zeta_{mi}; \xi_{mj}, \zeta_{mj}) - G(\xi_{mi}, \zeta_{mi}; \xi_{mj}, \zeta_{mj}) \cdot \eta_{S,n}(\xi_{mj}, \zeta_{mj}) \} \cdot \Delta S \dots\dots(31)$$

ここで、 (ξ_{mj}, ζ_{mj}) は第 j 離散化要素 midpoint m_j の座標、 ΔS は要素長であり、また、

$$G = \begin{cases} H_0^{(2)}(kr_{mi,mj}) & (mi \neq mj \text{ の時}) \\ 1 - i \cdot \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{k \cdot \Delta S}{4} - 0.422784 \right) & (mi = mj \text{ の時}) \end{cases} \dots\dots\dots(32)$$

$$G_{,n} = \begin{cases} -k \cdot H_1^{(2)}(kr_{mi,mj}) \cdot \frac{\partial r_{mi,mj}}{\partial n} & (mi \neq mj \text{ の時}) \\ i \cdot \frac{1}{\pi} (X_{II} \cdot Y_I - X_I \cdot Y_{II})_i & (mi = mj \text{ の時}) \end{cases} \dots\dots\dots(33)$$

ただし、

$$\frac{\partial r_{mi,mj}}{\partial n} = -\frac{\xi_{mi} - \xi_{mj}}{r_{mi,mj}} \cdot \left(\frac{\Delta \xi_j}{\Delta S} \right) + \frac{\zeta_{mi} - \zeta_{mj}}{r_{mi,mj}} \cdot \left(\frac{\Delta \zeta_j}{\Delta S} \right) \dots\dots\dots(34)$$

$$(X_I)_i = \left(\frac{\Delta \xi_i}{\Delta S} \right), \quad (Y_I)_i = \left(\frac{\Delta \zeta_i}{\Delta S} \right) \dots\dots\dots(35)$$

$$\left. \begin{aligned} (X_{II})_i &= \frac{\xi_{mi-1} - 2\xi_{mi} + \xi_{mi+1}}{(\Delta S)^2} \\ (Y_{II})_i &= \frac{\zeta_{mi-1} - 2\zeta_{mi} + \zeta_{mi+1}}{(\Delta S)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

$$r_{mi,mj} = \sqrt{(\xi_{mi} - \xi_{mj})^2 + (\zeta_{mi} - \zeta_{mj})^2} \dots\dots(37)$$

ここで、 $\Delta \xi_j, \Delta \zeta_j$ はそれぞれ第 j 要素の ξ, ζ 方向成分長であり、 $H_0^{(2)}(kr_{mi,mj}), H_1^{(2)}(kr_{mi,mj})$ はそれぞれ 0 次および 1 次の第 2 種 Hankel 関数である。

中点 m_j, m_{j-1} と節点 $j, j+1$ において、次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \eta_S(\xi_{mj}, \zeta_{mj}) &= \{ \eta_S(\xi_j, \zeta_j) + \eta_S(\xi_{j+1}, \zeta_{j+1}) \} / 2 \\ \eta_{S,n}(\xi_j, \zeta_j) \cdot \Delta S &= \{ \eta_{S,n}(\xi_{mj-1}, \zeta_{mj-1}) \cdot \Delta S + \eta_{S,n}(\xi_{mj}, \zeta_{mj}) \cdot \Delta S \} / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

式 (31) に式 (38) を適用し、さらに式 (7), (12), (13) を考慮すると、仮想境界 S_P 上での η_F^C, η_F^S の関係式が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \eta_{F,n}^C \\ \eta_{F,n}^S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -P^{CC} & -P^{CS} \\ P^{SC} & P^{SS} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \eta_F^C \\ \eta_F^S \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \eta_0^C \\ \eta_0^S \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \eta_{0,n}^C \\ \eta_{0,n}^S \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(39)$$

ただし、 η_F^C などは節点の η_F^C などを成分とするベクトル (式 (49), (50)) である。また、 P^{CC} などは式 (25) の P^C などに対応するマトリックスであり、次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} P^{CC} & P^{CS} \\ P^{SC} & P^{SS} \end{bmatrix} = K^T \cdot \left(\begin{bmatrix} G^C & G^S \\ G^S & -G^C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} GN^C & -GN^S \\ GN^S & GN^C \end{bmatrix} \right) \cdot K \dots\dots (40)$$

ここで、 G^C, GN^C などは G, G_n により構成されるマトリックスであり、その成分は次式で与えられる。

$$G^C(m_i, m_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot Y_0(kr_{m_i, m_j}) & (m_i \neq m_j) \\ \frac{1}{\pi} \cdot \left(\ln \frac{k \cdot \Delta S}{4} - 0.422784 \right) & (m_i = m_j) \end{cases} \dots\dots (41 \cdot a)$$

$$G^S(m_i, m_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot J_0(kr_{m_i, m_j}) & (m_i \neq m_j) \\ \frac{1}{2} & (m_i = m_j) \end{cases} \dots\dots (41 \cdot b)$$

$$GN^C(m_i, m_j) = \begin{cases} N(m_i, m_j) \cdot Y_1(kr_{m_i, m_j}) & (m_i \neq m_j) \\ -\frac{1}{2\pi} (X_{Ij} \cdot Y_{Ij} - X_{Ij} \cdot Y_{Ij})_i \cdot \Delta S - 1 & (m_i = m_j) \end{cases} \dots\dots (42 \cdot a)$$

$$GN^S(m_i, m_j) = \begin{cases} N(m_i, m_j) \cdot J_1(kr_{m_i, m_j}) & (m_i \neq m_j) \\ 0 & (m_i = m_j) \end{cases} \dots\dots (42 \cdot b)$$

ただし、

$$N(m_i, m_j) = -\frac{k}{2} \cdot \left\{ -\frac{\xi_{m_i} - \xi_{m_j}}{r_{m_i, m_j}} \cdot \Delta \zeta_j + \frac{\zeta_{m_i} - \zeta_{m_j}}{r_{m_i, m_j}} \cdot \Delta \xi_j \right\} \dots\dots (43)$$

($m_i, m_j = 1, \dots, NP$)

であり、 J_0, J_1 はそれぞれ 0 次および 1 次の Bessel 関数、 Y_0, Y_1 はそれぞれ 0 次および 1 次の Neumann 関数である。

また、 K は中点 (m_j) 関係式から節点 (j) 関係式への変換マトリックス式であり、次式で与えられる。

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \dots\dots (44 \cdot a)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1/2 \\ & & & 1/2 \end{bmatrix} (NP \times NP) \dots\dots (44 \cdot b)$$

基本波ベクトルは次式で与えられる。

$$\eta_0^C = \{\eta_0^C(j)\}^T = \{a_I \cdot \cos k\rho(j)\}^T \dots\dots (45 \cdot a)$$

$$\eta_0^S = \{\eta_0^S(j)\}^T = \{a_I \cdot \sin k\rho(j)\}^T \dots\dots (45 \cdot b)$$

$$\eta_{0,n}^C = \{\eta_{0,n}^C(j)\} \cdot \Delta S \}^T = \{-a_I k \rho_{,n}(j) \cdot \sin k\rho(j) \cdot \Delta S \}^T \dots\dots (46 \cdot a)$$

$$\eta_{0,n}^S = \{\eta_{0,n}^S(j)\} \cdot \Delta S \}^T = \{a_I k \rho_{,n}(j) \cdot \cos k\rho(j) \cdot \Delta S \}^T \dots\dots (46 \cdot b)$$

ここで、

$$\rho(j) = \xi_j \cos \alpha + \zeta_j \sin \alpha \dots\dots (47)$$

$$\rho_{,n}(j) = -\left(\frac{\Delta \xi_j}{\Delta S} \right) \cdot \cos \alpha + \left(\frac{\Delta \zeta_j}{\Delta S} \right) \cdot \sin \alpha \dots\dots (48)$$

ただし、 a_I, α はそれぞれ入射波振幅絶対値および入射角 (x 軸から反時計回りを正にとる) である。

また、先に述べたように、

$$\eta_F^C = \{\eta_F^C(j)\}^T \dots\dots (49 \cdot a)$$

$$\eta_F^S = \{\eta_F^S(j)\}^T \dots\dots (49 \cdot b)$$

$$\eta_{F,n}^C = \{\eta_{F,n}^C(j)\} \cdot \Delta S \}^T \dots\dots (50 \cdot a)$$

$$\eta_{F,n}^S = \{\eta_{F,n}^S(j)\} \cdot \Delta S \}^T \dots\dots (50 \cdot b)$$

($j = 1, \dots, NP$)

式 (39) と式 (25) の対応を考えると、汎関数 (26) の第 2 項は結局次のようになる。

$$\chi_P = \{\eta_F^{CT}, \eta_F^{ST}\} \cdot \left(\begin{bmatrix} P^{CC} & P^{CS} \\ P^{SC} & P^{SS} \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \eta_F^C \\ \eta_F^S \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \eta_0^C \\ \eta_0^S \end{Bmatrix} \right) - \begin{Bmatrix} \eta_{0,n}^C \\ \eta_{0,n}^S \end{Bmatrix} \right) \dots\dots (51)$$

最終的に変分原理を適用すれば次の汎関数 χ の停留条件、

$$\frac{\partial \chi}{\partial \eta_F^C(m)} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta_F^S(m)} = 0 \dots\dots (52)$$

($m = 1, \dots, M$) M : 全節点数

から、次のマトリックス方程式が得られる。

$$\left(\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^{CC} & P^{CS} \\ P^{SC} & P^{SS} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \eta_F^C \\ \eta_F^S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{CC} & P^{CS} \\ P^{SC} & P^{SS} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \eta_0^C \\ \eta_0^S \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \eta_{0,n}^C \\ -\eta_{0,n}^S \end{Bmatrix} \dots\dots (53)$$

ここで、 D は汎関数 (26) の第 1 項から得られるマトリックスである。

これを解くことにより全節点における $\eta_F^C(m), \eta_F^S(m)$ が求まり、最終的に $\eta_F(m)$ が定められる。 S_P 上における η_F を知れば、式 (13) および式 (22) から Ω_A 内の η_S を求めることができる。

3. 数値計算例

(1) 円柱による回折散乱波の解析

円柱による波の回折問題は、平面 2 次元波の回折問題の中で最も基本的なものである。これに対しては古くから、音波の回折問題として Fourier-Bessel 展開法を用いた解析が行われており、これを水波に応用した Mac

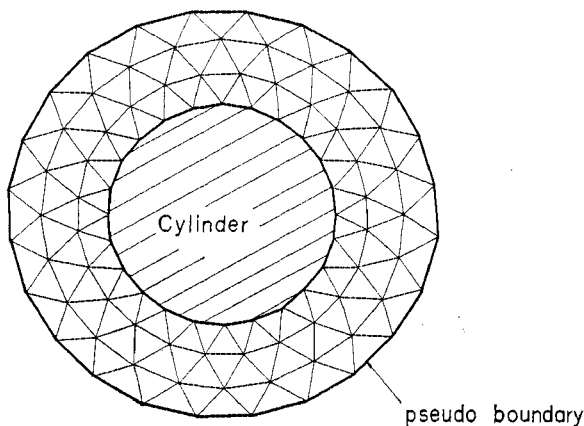


Fig. 3 Mesh Division around a Cylinder

Camy and Fuchs⁸⁾ や田中⁹⁾の研究がよく知られている。これに対して、ここでは FEM による解析を行い、前記の級数展開法と比較することによりその妥当性を検討

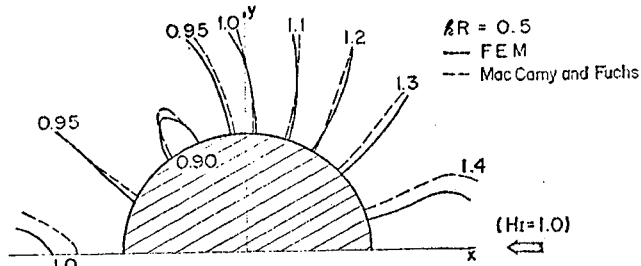


Fig. 4 Comparison between FEM and Fourier-Bessel Expansion Solutions of Wave Amplitude ($kR=0.5$)

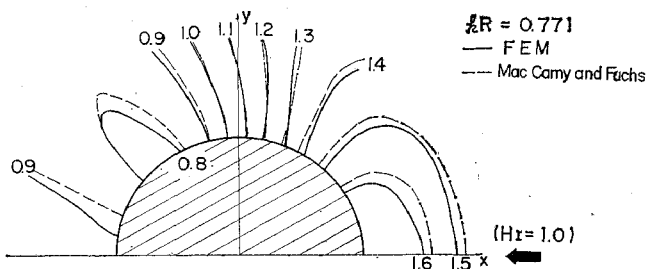


Fig. 5 Comparison between FEM and Fourier-Bessel Expansion Solutions of Wave Amplitude ($kR=0.771$)

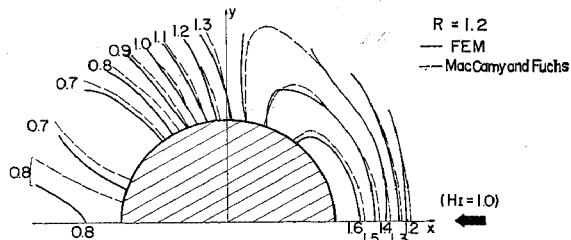


Fig. 6 Comparison between FEM and Fourier-Bessel Expansion Solutions of Wave Amplitude ($kR=1.2$)

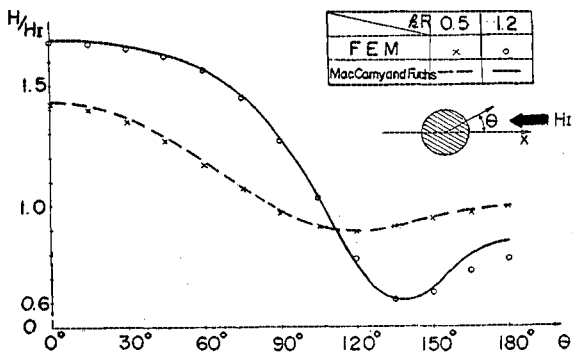


Fig. 7 Wave Amplitude Around the Cylinder

する。Fig. 3 に円柱周囲のメッシュ分割を示す。仮想境界 S_P は円柱の周囲の適当な位置に設けられている。 S_P の外側は無限に広がる open sea であり Q_A に相当する。 S_P と円柱に囲まれた領域が Q_F であり、有限要素分割されている。前述したように S_P 形状は一般に任意であるが、ここでは円形とすることにより慣用変分原理の適用が可能となり、マトリックスは対称となる。また Q_F 内では任意の水深変化を考慮できるが、ここでは全領域で水深一定とする。

解析結果を Fig. 4, 5 および 6 に示す。これらは、波高 1.0、角波数 k の入射波が矢印の方向に進行した場合の半径 R の円柱周辺波高分布について、FEM 解と MacCamy and Fuchs の解を比較したものである。これらを見ると、いずれの場合も両者はほぼ良く一致していることがわかる。Fig. 7 は、 kR が 0.5 および 1.2 の場合の円柱壁面に沿った波高について FEM 解と MacCamy and Fuchs 解を比較したものである。これより、 kR が 0.5 の場合のように入射波長が円柱径に比して長い時には両者は良く一致しているが、 kR が 1.2 の場合のように入射波長が相対的に短くなると、円柱後方に若干の差がみられることがわかる。

以上により、FEM 解は十分妥当な値を与えることがわかる。ただし、Fig. 3 のようなメッシュ分割の場合、 kR が 1.2 程度になると円柱後方に乱れが生ずるので、波長とメッシュ分割の関係には十分注意が必要である。

(2) 楕円柱による回折散乱波の解析

楕円柱による波の回折問題においても、級数展開法が用いられる。この場合には楕円筒座標を用いることから、円柱の場合の Hankel 関数に対応するものとして Mathieu 関数が現われる。この方法は音波の回折問題の研究において古くから用いられていたが、合田・吉村・伊藤¹¹⁾は船体およ

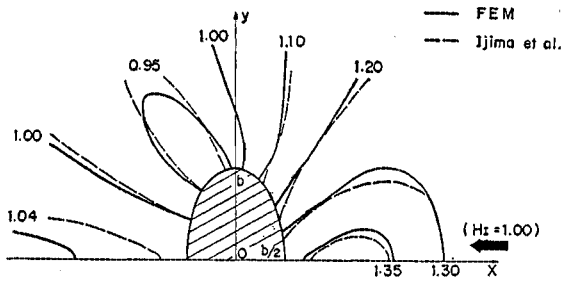


Fig. 8 Comparison between FEM and Integral Equation Solutions of Wave Amplitude ($kb=0.522$)

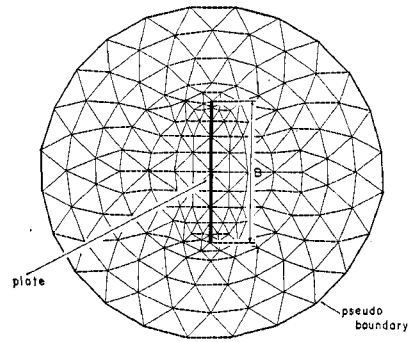


Fig. 11 Mesh Division around a Rectangular Pile

向に進行するものとする。Fig. 8 および 9 は kb が 0.522 の場合の波高分布の FEM 解を井島らの解と比較して示したものである。これより、両者はかなり良く一致していることがわかる。円柱の場合と同様、楕円柱の後方に若干のずれが見られる。両図を比較すると、波が楕円長軸に直角に入射する場合の方が、 $\pi/4$ で入射する場合よりも波高が大きくなることが確認される。Fig. 10 は、 kb が 1.044 の場合の波高分布である。Fig. 8 と比較して入射波長が短くなっているため、回折散乱現象がより顕著に現われている。

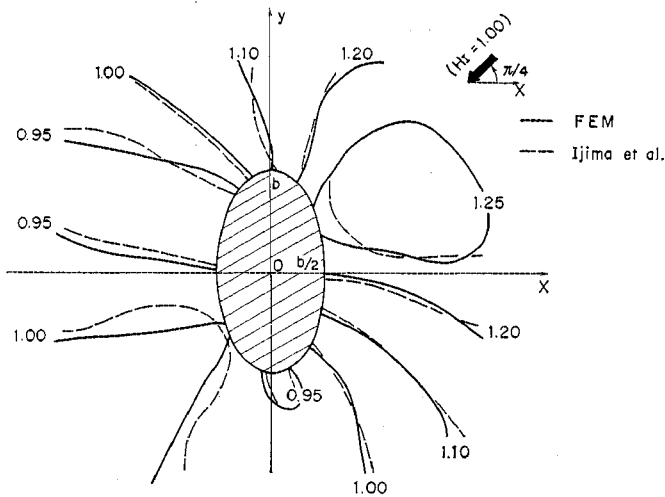


Fig. 9 Comparison between FEM and Integral Equation Solutions of Wave Amplitude ($kb=0.522$)

(3) 長方形柱による回折散乱波の解析

円柱および楕円柱の問題に対しては、それぞれ円筒および楕円筒座標を用いることにより、変数分離の後に級数展開を行う解析方法が適用できた。しかし、その他の任意形状の柱に対しては、 ϕ はやこのような解析的方法は適用不可能である。これに対して、積分方程式法は任意形状柱による回折問題に適用可能であり、長方形柱に対しても井島らの解析例がある。この場合、長方形隅角部のような不連続部に対しては、積分方程式の離散化を細かくする必要がある。

び島堤周辺の波動解析に適用している。これに対して、最近では積分方程式を離散化して解を求める井島ら¹⁷⁾の解析結果も得られている。この場合には、Mathieu 関数のような複雑な関数を用いずに解析することができる。

ここでは FEM によりこの問題を解析し、井島らの結果と比較検討することとする。一定水深の水中に設置された長径 $2b$ 、短径 b の楕円柱に対する解析結果を Fig. 8 以下に示す。入射波は波高 1.0、角波数 k で矢印の方

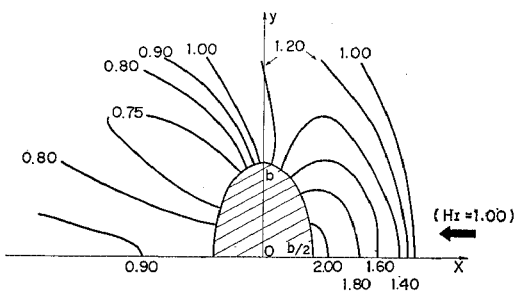


Fig. 10 Comparison between FEM and Integral Equation Solutions of Wave Amplitude ($kb=1.044$)

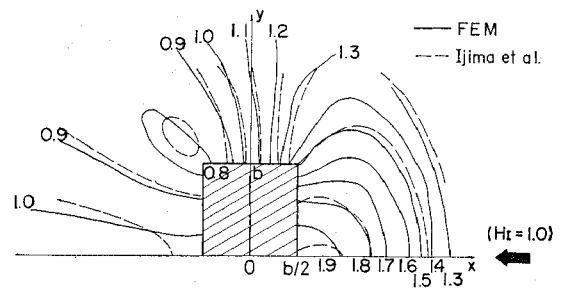


Fig. 12 Comparison between FEM and Integral Equation Solutions of Wave Amplitude ($kb=0.771$)

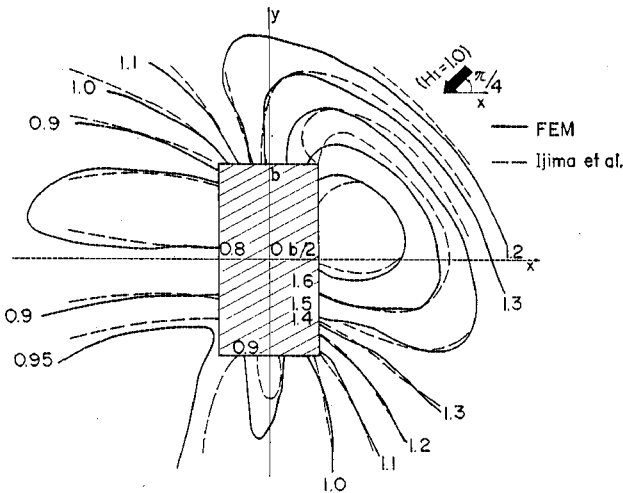


Fig. 13 Comparison between FEM and Integral Equation Solutions of Wave Amplitude ($kb=0.771$)

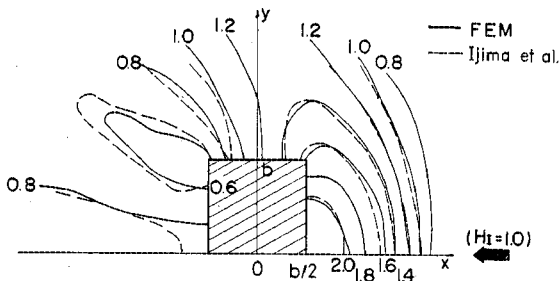


Fig. 14 Comparison between FEM and Integral Equation Solutions of Wave Amplitude ($kb=1.2$)

ここでは、1 辺 b 、他辺 $2b$ の長方形柱の問題を FEM 解析する。Fig. 11 にメッシュ分割を示す。この場合隅角部においては、積分方程式法と同様に回折波を十分表現し得るよう局部的に分割を細かくした。Fig. 12, 13 および 14 に長方形柱周辺波高分布の FEM 解析結果を、積分方程式法による井島らの解と比較して示す。いずれの場合も、両者はかなり良く一致していることがわ

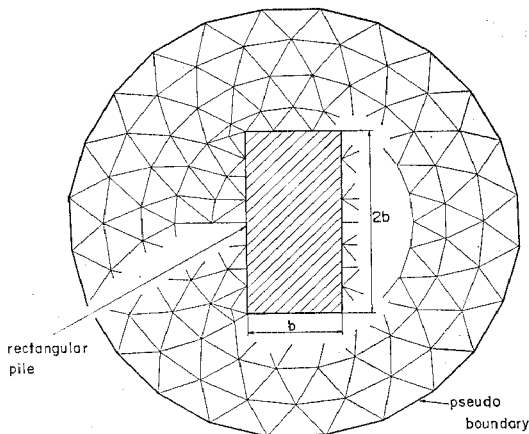


Fig. 15 Mesh Division around a Plate

かる。また、当然のことながら、直角入射の場合および入射波長が短い場合に長方形柱前面波高が高くなり、完全反射の場合の波高 2.0 に近づくことなどが確認され、結果は妥当なものと思われる。

(4) 平板による回折散乱波の解析

この問題は、楕円柱の場合の級数解法において、楕円柱の厚さを 0 にすることにより解析解が得られる。この方法は、古くりボンによる音波の回折問題を解析するのに用いられているが、合田・吉村¹¹⁾はこの方法を用いて離岸堤による波の回折問題を検討している。

ここでは、Fig. 15 に示すような平板モデルを FEM により解析することとした。平板端部の特異性を考慮して、この付近のメッシュ分割を相当に細かくした。Fig. 16 および 17 に解析結果を示す。これは、平板長 B と入射波長 L の比 B/L が 0.166 の場合の回折状況を示すものである。楕円柱および長方形柱の場合と同様、直角入射の場合の方が波高が全体的に

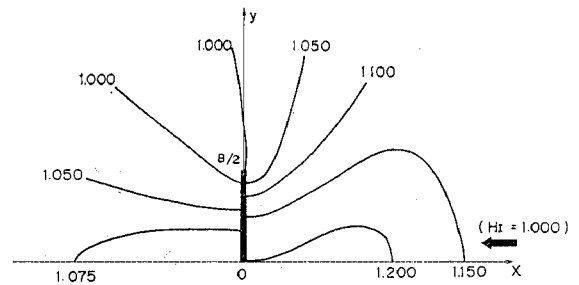


Fig. 16 Wave Diffraction Around the Plate ($B/L=0.166$)

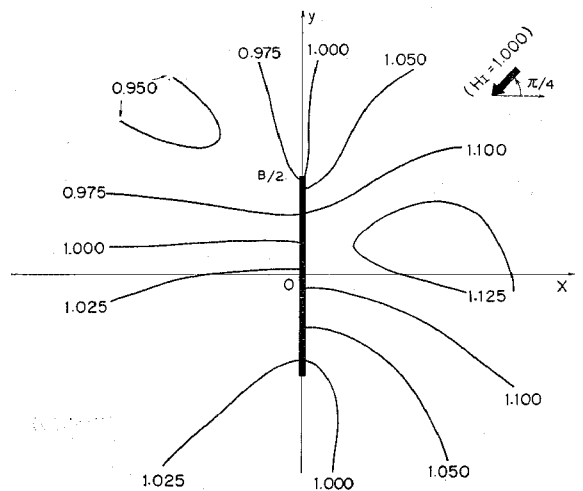


Fig. 17 Wave Diffraction Around the Plate ($B/L=0.166$)

大きい。平板裏側ではいずれもほぼ一様で入射波高 1.0 に近い。一般に離岸堤は、堤長の 2 倍以上の波長の波に対してはしゃへい効果がないといわれているが、本解析結果はこれに符合している。また、直接の比較は行っていないが、傾向は合田らの結果とよく似ている。

なお、平板端は本報で採用した理論上では本来無限大の波高を持つ特異点である。しかし、FEM のような近似解ではこれを厳密に表現することはできない。これに関する注意は後述する。

4. あとがき

本論文は、地形および構造物による波の回折散乱現象を、FEM 解析する方法について述べたものである。ここで問題となることは、解析領域が無限領域になる点である。これに対してここでは、解析関数を FEM に接続させて、FEM 解析領域を有限化することにした。両者の接続にあたっては、Green の公式から導かれる積分方程式を境界条件とする変分原理が用いられた。

本手法の妥当性を検討するために、まず円柱による回折散乱問題を解析した。結果を級数解と比較することにより、十分満足できる解が得られることを示した。続いて、槽円柱、長方形柱および平板による回折散乱問題を FEM 解析し、積分方程式法による井島らの解と同じ結果が得られることを示した。

本手法の特徴は、地形および任意形状構造物による波の回折散乱挙動を、水深変化を忠実に考慮しつつ、簡便に解析し得ることである。一方、今後改善が望まれる点として、精度向上および自由度低減があげられるが、これに対しては高精度要素の利用が考えられる。また、防波堤端部のような特異点の取扱い方も問題になる。このような特異性の表現においては、FEM のような近似解よりも、その特異性を含み得る解析解の方が好ましい。この点から、Chen and Mei²⁴⁾ のように、外部領域ばかりでなく内部領域においても解析解を利用することが考えられる。その際にも、本論の変分原理の適用によって、FEM と解析解をつなぐことが可能である。

参考文献

- 1) 坂井藤一・月岡康一：波動解析への有限要素法の適用(第 3 報)―地形および構造物による波の散乱について―, 第 22 回海岸工学講演会論文集, 1975.
- 2) Stoker, J.J. : Water Waves, Interscience Publishers, 1957.
- 3) Penny, W.G. and Price, A.T. : Diffraction of Sea Waves by Breakwaters, Artificial Harbors, Dire. Misc. Weapon Develop. Tech. Hist., No. 26, 1944.
- 4) Puttnam, J.A. and Arthur, A.T. : Diffraction of Water Waves by Breakwaters, Trans. A.G.U., Vol. 29, No. 4, 1948.
- 5) Blue, F.L. and Johnson, J.W. : Diffraction of Water

Waves Passing through a Breakwater Gap, Trans. A.G.U., Vol. 30, No. 5, 1949.

- 6) 田中 清：防波堤の水理, 水工学の最近の進歩, 土木学会, 1953.
- 7) 三井 宏ほか：海岸構造物不連続部の波高分布について(第 1 報～第 6 報), 第 13 回～22 回海岸工学講演会論文集, 1966～1975.
- 8) MacCamy, R.C. and Fuchs, R.A. : Wave Force on Piles; Diffraction Theory, Tech. Memo. No. 69, BEB, 1954.
- 9) 田中 清：円形島による波浪の回折, 第 3 回海岸工学講演会論文集, 1956.
- 10) Momoi, T. : A Long Wave around a Breakwater (Case of Perpendicular Incidence)[III], Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. of Tokyo, 46, 1968.
- 11) 合田良実・吉村知司：島堤および大型円柱体による波の散乱と波力について, 土木学会論文報告集, 第 205 号, 1972 年 9 月.
- 12) 和田 明：回折問題の一解法について, 第 11 回海岸工学講演会論文集, 1964.
- 13) Biesel, F. et Ranson, B. : Calcul de la Diffraction de la Houle, AIRH, Dubrovnik, 1961.
- 14) Barailler, L. et Gaillard, D. : Evolution Récente des Modèles Mathématiques d'agitation due a la Houle; Calcul de la Diffraction en Profondeur non Uniforme, La Houille Blanche, No. 8, 1967.
- 15) Lee, J.J. : Wave Induced Oscillation in Harbors of Arbitrary Geometry, J. Fluid Mech., Vol. 45, Part 2, 1971.
- 16) Daubert, A. et Lebreton, J.C. : Diffraction de la Houle sur des Obstacles a Parois Verticales, La Houille Blanche, Vol. 20, No. 4, 1965.
- 17) 井島武士・周 宗仁・湯村やす・田淵幹修：任意形状の透過および不透防波堤による波の散乱と波力, 第 20 回海岸工学講演会論文集, 1973.
- 18) 日野幹雄・宮永洋一：グリーン関数および仮想法による波力と波の回折計算, 土木学会論文報告集, 第 237 号, 1975.
- 19) 伊藤喜行・谷本勝利：数値波動解析とその応用―構造物周辺の波―, 第 18 回海岸工学講演会論文集, 1971.
- 20) 坂井藤一・河合三四郎：波動解析への有限要素法の適用, 第 20 回海岸工学講演会論文集, 1973.
- 21) Wehausen, J.V. and Laitone, E.V. : Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Vol. IX, Springer Verlag, 1960.
- 22) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method and Boundary Solution Procedures as General Approximation Method for Field Problems, Advanced Topics in Finite Element Analysis, Chap. 9, Mark Analysis Res. Corp., 1975.
- 23) Bai, K.J. : A Variational Method in Potential Flows with a Free Surface, Rep. No. NA 72-2, Univ. of California, Berkeley, Sept. 1972.
- 24) Berkhoff, J.C.W. : Computation of Combined Refraction-Diffraction, Proc. of 13th Coastal Eng., Vol. 2, 1972.
- 25) Chen, H.S. and Mei, C.C. : Oscillations and Wave Forces in a Man-Made Harbor in the Open Sea, 10th Symp. in Naval Hydro., Office of Naval Res. 1974.
- 26) Bai, K.J. and Yeung, R. : Numerical Solutions of Free-Surface and Flow Problems, 10th Symp. in Naval Hydro., Office of Naval Res. 1974.
- 27) 瀬戸秀幸・山本善之：有限要素法による定常波動問題の

- 基礎的研究, 日本造船学会論文集, 第 136 号, 1974.
- 28) 鷲津久一郎・池川昌弘 : 有限要素法の揚力面理論への応用, マトリックス構造解析法研究発表論文集, 1973.
- 29) Bessho, M. : Variational Approach to Steady Ship Wave Problem, 8th Symp. in Naval Hydro., 1970.
- 30) Zienkiewicz, O.C. and Bettess, P. : Infinite Elements in the Study of Fluid-Structure Interaction Problems, 2nd Int. Symp. on Computing Methods in Applied Science and Engineering, Versailles, Dec. 1975.
- 31) 坂井藤一・月岡康一 : 湾水振動の有限要素解析法, 土木学会論文報告集 (投稿準備中).

(1976.7.22・受付)
