

差分表示を用いた板の非線形解析

NONLINEAR ANALYSIS OF PLATES BY FINITE
DIFFERENCE PROCEDURE

馬場俊介*・梶田建夫**・成岡昌夫***

By Shunsuke BABA, Tateo KAJITA and Masao NARUOKA

1. 序

地震、台風などの、短時間に衝撃的に作用する大きな荷重に対する構造物の応答が、近年問題とされるようになってきた。この種の問題では、構造物の動的非線形応答解析を行い、その構造物の安全性を検討する必要がある。このため、有限要素法、差分法などを用いて、非線形応答に関するいろいろな解析手法が試みられており、板の非線形応答に限ったとしても、これに関する文献は非常に多い。これらのうちで、動的非線形応答解析については、Wilson¹⁾、Shantaram²⁾、Bathe³⁾らの有限要素法による大たわみ弾塑性振動問題の一般的定式化を行ったものや、Bayles⁴⁾らの差分法による板の大たわみ振動問題を解いたものがある。著者らは、これらの手法を用い、DR(Dynamic Relaxation) 的差分表示を用いて、板の動的、静的非線形問題を扱う。DR 的差分表示を用いた論文としては、Rushton⁵⁾が板の大たわみ問題を、Alwar⁶⁾が斜板の大たわみ問題を扱っている。このほか、DR 法による構造非線形解析の一般的手法を示したものに、Brew⁷⁾らの論文がある。

本論文で扱う内容と、その直接的な目的について、以下に示す。

① はりのたて振動：衝撃応答のように、状態が急激に変化するような問題においては、数値解析の精度は一般に悪い。この点を差分表示式の改良（以下、高精度差分と記す）により回避できることを示す。すなわち、時間、場所の一方、あるいは、両方について、普通以上の格子点をとるなどの操作により、精度を高めることができることを示す。

② 板の弾塑性解析：適当な減衰定数の導入により、動的応答の収束値として解が得られる。周辺単純支持、および、周辺固定の正方形板の、弾性、弾塑性解析を行い、精度の検討を行う。場所に関する高精度差分の精度についても検討する。また、適当な弾塑性判定の導入により、ある程度正しい結果が得られることを示す。

③ 板の大たわみを考慮した弾塑性解析：②と同様の条件下で解析を行う。弾塑性による非線形効果が、膜張力による非線形効果により相殺されることを示す。弾性問題ばかりでなく、弾塑性問題においても、大たわみを考慮するか否かにより大きな差が生ずる。

④ 板の弾塑性振動：衝撃荷重に対しても、はりのたて振動の場合のように、変位や応力が急激に変化することはないので、普通精度の差分で（高精度差分を用いなくても）、変位応答、応力応答を十分精度よく追跡できることを示す。

⑤ 板の大たわみを考慮した弾塑性振動：大たわみ効果による振動数の増加傾向と、振幅の減少傾向とを示す。

2. DR 的差分表示法の特徴

本論文では、DR 法的な差分表示、すなわち、動的つまり合い方程式と、応力ひずみ関係式を、それぞれ別途に差分表示するという手法を用いているが、この方式の特徴、ならびに、他の解析法との比較は、次のようである。

まず、一般的な長所としては、

① 動的つまり合い方程式、応力ひずみ関係式を直接用いる。たかだか 2 次の導関数を含むだけの弾性体の基本式を順次並べ、差分表示し、初期値を設定して繰返し解くだけで、結果が得られる。線形でも非線形でも、静的でも動的でも、この操作は同じである。

② 計算式が単純であり、プログラムも非常に簡単で

* 学生会員 工修 名古屋大学大学院工学研究科土木工学科
攻 博士課程

** 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

ある。多元連立方程式を解くことがないので、記憶容量も少なくてすむ。

特に、動的解析、それも、非線形応答の場合には、

③ 変位、応力の各成分が、各繰返しについて、同時に、同精度で求められる。

④ 計算に要する時間が一般に短い。差分法でも有限要素法でも、一般的に、非線形応答解析を直接積分法などにより行う場合には、各時間ステップにおいて連立方程式を解く必要があり、実際の問題に適用する場合には、膨大な計算時間を要することになる。ただし、非線形項を等価な外力として置き換えるとか、質量行列を対角化するというような種々の手法を用いて、各時間ステップごとに連立方程式を解くような手間を回避することが試みられているが、精度上若干不利であるし、いずれにしても、一度は連立方程式を解くことが必要とされる。これに対して、ここでの手法は、各時間ステップで順次数値を代入していくだけの計算であり、また、計算の時間間隔も一般的の手法と同程度のものを用いることができるので、他の手法に比較して、計算に要する時間は少ないとと思われる。

さらに、静的問題への応用性として、

⑤ 動的、静的問題とも同一のプログラムですむ。もともと、静的問題を動的応答の収束状態として求めるのがDR法の精神であるから、当然のことではあるが、減衰定数を変えるだけで、両者を同一のプログラムで扱えるという点は便利である。

高精度化に関しては、

⑥ 基本式を差分表示するにあたっての数学的近似度を高めるだけで、機械的に高精度差分式を得る。普通の差分法と比較しても、たかだか2次の導関数しか含まれないから、高精度差分式が作りやすく、使いやすい。

次に、一般的な欠点としては、

⑦ 構造物の形状、境界条件などの制約が大きい。このうち、本論文で扱うような長方形板の場合には、境界条件とそれに関して仮想点が問題となる。ただし、高精度差分の場合には、仮想点を必要としない表示法が可能である。境界条件については、特に隅角部での水平変位、ねじりモーメント、膜張力の取扱いに疑問が残る。

他の欠点としては、静的問題への応用に関して、

⑧ 減衰定数、時間間隔の定め方によって、収束に要する回数が大きく左右される。ただし、時間間隔については、理論上の上限値を越さない近傍を選べば、発散することもなく収束も早い。減衰定数については、数回の試行で望ましい定数值の推測が可能であるし、一度決められた減衰定数は、荷重の大きさ、非線形性のいかんにより、あまり変える必要がない。

3. はりのたて振動

この解析法の動的問題への適用性を示すために、まず、はりの衝撃たて振動への応答について述べる。

ここでは、片持ばかりの先端に一定の引張力（ないしは圧縮力）が、時刻 $t=0$ で作用するという状態を考える。軸方向振動状態にあるはりの振動方程式は、 x 方向の変位を u 、 x 方向の単位面積当たり外力を q_x とすると、次のように表わされる。

$$\rho_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_x \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{El}{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q_x \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\rho_x = nr/gl$ (r ：はりの単位体積重量、 g ：重力加速度)、 k_x は減衰定数、 E は弾性係数、 l ははりの長さ、 n はその分割数である。これに、次の関係を導入する (N_x ははりの軸方向力である)。

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

$$N_x = \frac{El}{n} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

これらの新しい変数を用いると、式(1)は次のようになる。

$$\rho_x \frac{\partial \ddot{u}}{\partial t} + k_x \dot{u} = \frac{\partial N_x}{\partial x} + q_x \quad \dots \dots \dots (4.1)$$

DR 法では、式(4.1)を運動方程式、式(2.1)を速度方程式、式(3.1)を弾性方程式という。もし、材料非線形を考慮する場合には、式(2.1)、(4.1)は材料の線形、非線形に無関係に成立するから、式(3.1)で材料の非線形を考慮するとよい。

次に、無次元化を行う。すなわち、

$$\begin{aligned} x &= lx', \quad u = lu', \quad N_x = (El/n)N_x' \\ t &= (nl\rho_x/E)^{1/2}t', \quad k_x = (\rho_x E/nl)^{1/2}k_x' \\ q_x &= (E/n)q_x' \end{aligned}$$

とおくと、式(4.1)、(2.1)、(3.1)は、次のようになる。

$$\frac{\partial \ddot{u}'}{\partial t'} + k_x' \dot{u}' = \frac{\partial N_x'}{\partial x'} + q_x' \quad \dots \dots \dots (4.2)$$

$$\dot{u}' = \frac{\partial u'}{\partial t'} \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

$$N_x' = \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad \dots \dots \dots (3.2)$$

この3つの微分方程式を差分表示すると、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} u'_{k^{r+1}} &= \{(1 - k_x'/2)/(1 + k_x'/2)\} u'_{k^r} \\ &\quad + \{n\Delta t'/(1 + k_x'/2)\} (N_x'_{k^r} - N_x'_{k-1}) \\ &\quad + q_x'_{k^r}/n \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.3)$$

$$u'_{k^{r+1}} = u'_{k^r} + \Delta t' \dot{u}'_{k^{r+1}} \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

$$N_x'_{k^{r+1}} = n(u'_{k+1} - u'_{k^{r+1}}) \quad \dots \dots \dots (3.3)$$

ここに、下添字 k は場所に関する差分を、上添字 r は

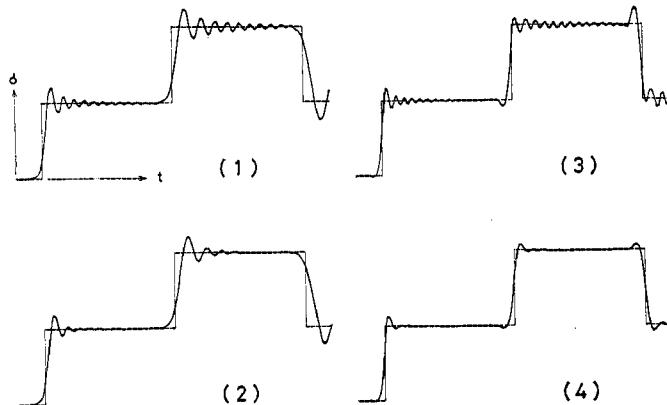


図-1 高精度差分を用いたはりのたて振動

時間に関する差分を意味する。初期値 $u_{k^0} = u_k^0 = N_{xk^0} = 0$ を入れ、式 (4.3), (2.3), (3.3) を繰返し解くことにより、任意の時刻における u, N_x を求めることができる。なお、 $\Delta t'$ は繰返し時間間隔 Δt の無次元化量である。この時間間隔 Δt は、はりの中を応力波が伝播する速度 $C = (E/\rho)^{1/2}$ から $\Delta t < l/nC$ のように選ぶ必要がある。無次元化すると、

$$\Delta t' \leq 1/n \quad \dots \dots \dots \quad (5.1)$$

と表わされる。 $k_x' = 0, \Delta t' = 1/50n$ とし、はりの先端 ($x'=1$) に、大きさ $q_x' = 1$ の力が $t'=0$ より作用する場合を、式 (4.3), (2.3), (3.3) より計算し、はり中央部の N_x' を示すと、図-1 (1) のようになる。結果は、図中に細い実線で示された理論解と比較して、微小振動が止まらないなど、かなりの誤差が存在する。

一般に、差分による解析において精度を高めるためには、高精度の差分表示を用いるとよい。しかし、ここでの問題のように急激な変化の状態を差分で表わすことは、かなり困難なことである。ここでは、重みつき最小2乗法の利用により、衝撃応答の追跡に適した差分表示式をつくり、その精度を検討しよう。

u_i を時刻 t_i における x 方向変位の値、 a_i を u_i' のもつ重みとする。各繰返し段階における差分中心、すなわち、各差分格子での時間原点を t_2' 、次に求めようとする段階の時点を t_1' とする。普通差分では、時刻 $t' = t_1'$ での値 u_1' を求めるにあたって、 $t' = t_2'$ での値 u_2' と、 $t' = t_{1.5}'$ での u' の変化率 ($\partial u_{1.5}' / \partial t'$) が使われている。ある時刻での急激な変化を表示しようすると、 t_2' 以前の t_3', t_4', \dots における値まで考慮に入れる必要がある。普通に考えられる多数点をとった差分展開では、与えられた n 個の点のすべてを通る ($n-1$) 次式により補間が行われるため、次のような拘束が生ずることになる。一つは、強制的に全点を通るように曲線が設置されるため、過大な屈曲をもった曲線が得られる可能性の高いこと、もう一つは、遠い過去の状態と近い過去

の状態とが同一の重要度で扱われることである。このような状態を避けるために、各時刻 t_i' での値 u_i' に重み a_i をつけたうえで、最小2乗近似により、($n-2$) 次式による曲線補間を行い、 t_1' における値 u_1' を推定する。この場合、推定精度を上げるために、 $t' = t_{1.5}'$ における u' の変化率も条件として加える。

$n=5$ とし、 $u_2', \dots, u_5', \partial u_{1.5}' / \partial t'$ から u_1' を求める式を誘導しよう。まず、 $\partial u_{1.5}' / \partial t'$ は、 u_1', \dots, u_5' から、次のように推定される。

$$\begin{aligned} \{\partial u_{1.5}' / \partial t'\} &= \left\{ \frac{\partial D}{\partial t'} \right\}^T [A]^{-1} [B] \{U\} \\ &= \{C\}^T \{U\} \quad \dots \dots \dots \quad (6.1) \end{aligned}$$

ここに、

$$\{D\}^T = \left\{ 1 \frac{\Delta t'}{2} \frac{\Delta t'^2}{4} \frac{\Delta t'^3}{8} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial D}{\partial t'} \right\}^T = \left\{ 0 \ 1 \ \Delta t' \ \frac{3 \Delta t'^2}{4} \right\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \sum a_i & \sum a_i t_i' & \sum a_i t_i'^2 & \sum a_i t_i'^3 \\ & \sum a_i t_i'^2 & \sum a_i t_i'^3 & \sum a_i t_i'^4 \\ & & \text{sym.} & \sum a_i t_i'^5 \\ & & & \sum a_i t_i'^6 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_5 \\ a_1 t_1' & a_2 t_2' & \dots & a_5 t_5' \\ a_1 t_1'^2 & a_2 t_2'^2 & \dots & a_5 t_5'^2 \\ a_1 t_1'^3 & a_2 t_2'^3 & \dots & a_5 t_5'^3 \end{bmatrix}$$

$$\{U\}^T = \{u_1' \ u_2' \ \dots \ u_5'\}, \quad \{C\}^T = \{c_1 \ c_2 \ \dots \ c_5\}$$

そして、求めようとする u_1' は、次のように与えられる。

$$u_1' = \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_{1.5}'}{\partial t'} + \sum_{i=2}^5 \frac{u_i'}{c_i} \quad \dots \dots \dots \quad (6.2)$$

なお、重みは、 $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = a_5 = 0.1$ とした。初期値 $u_2' = u_3' = u_4' = u_5' = u_{1.5}' = 0$ とおき、前記の普通差分表示と同じ条件下ではりの衝撃振動を計算すると、図-1 (2) のようになる。時間に関する差分の改良は、微小振動の周期を大きくし、収束を早める効果がある。

次に、はりの軸方向の差分については、普通の高精度差分を採用する。すなわち、

$$\frac{\partial u_{k+1/2}'}{\partial x'} = \frac{n}{l} (u_{k-1}' - 27 u_k' + 27 u_{k+1}' - u_{k+2}')$$

とする。この場合、時間に関しては、普通精度の差分式を使うと、図-1 (3) のようになる。場所に関して高精度差分を使うことは、微小振動の振幅を減少させる効果がある。

最後に、時間と場所の双方に関して高精度差分を使用すると、図-1 (4) のようにほぼ理論解に近い結果を得る。

4. 板の弾塑性解析

はりの軸方向振動に用いられた考え方を、板の弾塑性動的応答解析に応用する。まず、動的応答解析と同じ式が用いられる静的解析について、その解析手法の検討を行う。

板の動的つり合い式は、3.と同じように、無次元化表示を用いて、次のように表わされる。

$$\frac{\partial \dot{w}'}{\partial t'} + k_z' \dot{w}' = \frac{\partial^2 M_x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 M_y'}{\partial y'^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}'}{\partial x \partial y} + q_z' \quad \dots \dots \dots (7.1)$$

$$\dot{w}' = \frac{\partial w'}{\partial t'} \quad \dots \dots \dots (8.1)$$

$$M_x' = - \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \nu \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} \right) \quad \dots \dots \dots (9.1)$$

$$M_{xy}' = - \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \nu \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} \right) \quad \dots \dots \dots (9.2)$$

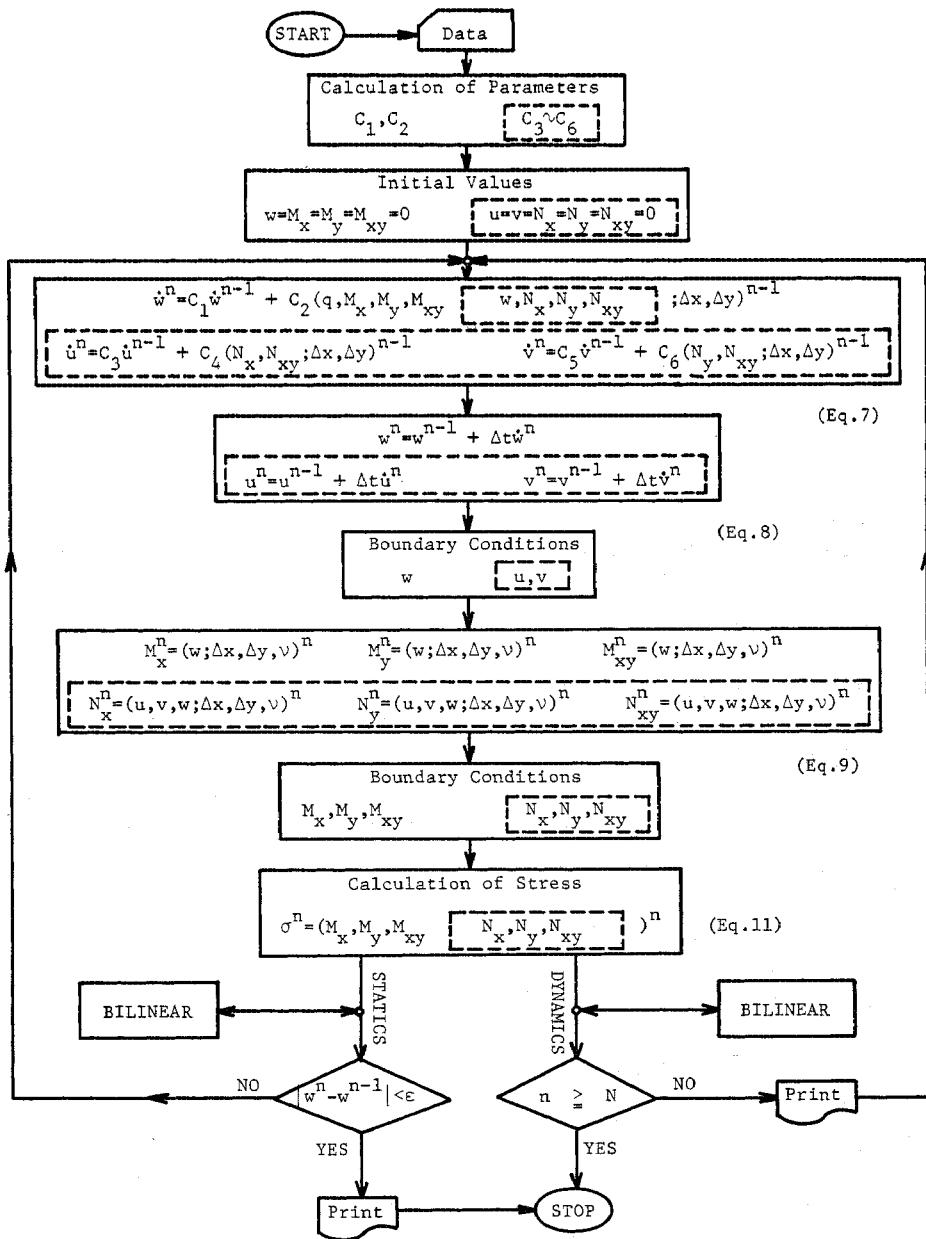


図-2 プログラムのフローチャート

$$M_{xy}' = -(1-\nu) \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial y'} \quad \dots \dots \dots (9.3)$$

ここに、無次元化量と、もとの量との関係は、次のようにある。

$$x = bx', y = by', w = hw'$$

$$M_x = (Dh/b^2) M_{x'}, M_y = (Dh/b^2) M_{y'}$$

$$M_{xy} = (Dh/b^2) M_{xy'}, t = b^2 (\rho_z/D)^{1/2} t'$$

$$k_z = (1/b^2) (\rho_z D)^{1/2} k_z', q_z = (Dh/b^4) q_z'$$

また、 w は板の z 方向変位、すなわち、たわみである。 M_x, M_y は曲げモーメント、 M_{xy} はねじりモーメントである。 q_z は z 方向の単位面積当たり外力である。さらに、 D は板剛度、 b は板の辺長、 h は板厚、 $\rho_z = \tau h/g$ である。ポアソン比 ν は、0.3 としている。

式(7), (8), (9)を差分化し⁵⁾、3. 同様に初期値 $w' = M_x' = M_y' = M_{xy}' = 0$ から繰り返し計算を行う。減衰定数 k_z' は、限界減衰振動状態をつくるように選ぶ。繰り返し時間間隔 $\Delta t'$ は、板の曲げ波速度を上まわらないように、分割数 n を使って次のように表わされる。

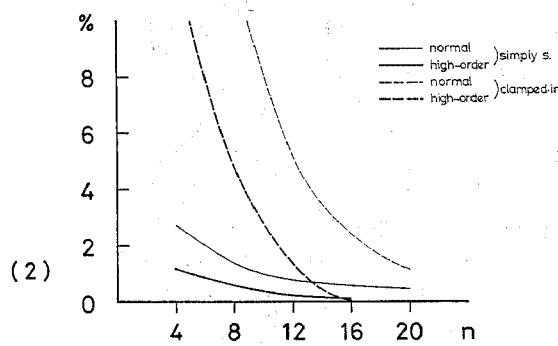
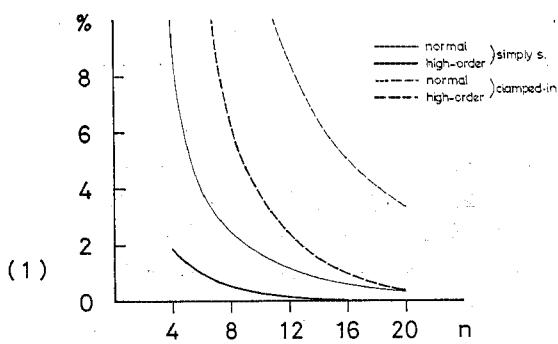


図-3 分割数による精度の比較

$$\Delta t \leq (1/4) (\rho_z/D)^{1/2} (b/n)^2, \Delta t' \leq (1/2n)^2 \dots (5.2)$$

ここで用いられるプログラムのフローチャートを、図-2 に示す。ただし、点線で囲まれた部分は、非線形性を考慮した場合であり、この場合（大たわみを考えない場合）には必要ない。

周辺単純支持、および、周辺固定の正方形板中央のたわみを計算し、理論解との比と、分割数 n との関係を、図-3 (1) に示す。ここでは、減衰定数 $k_z' = 40 \sim 80$ とすると、200～300 回程度の繰返しで、有効数字 5 術程度まで収束した。収束の判定は、繰返し段階の前後における絶対誤差が、基準値を下まわることが 10 回連続して続いたときを収束状態とみている。これは、収束値を間違えないためには必要な操作であろう。計算時間間隔は、 $\Delta t' = (1/2n)^2$ としている。境界条件は、周辺単純支持板の場合、 $w' = M_x' = M_y' = 0$ 、周辺固定板の場合、 $w' = (\partial w'/\partial x') = (\partial w'/\partial y') = 0$ とする。

次に、 x, y に関して高精度差分を用いる場合について検討する。差分格子は、 x 方向 5 点、 y 方向 5 点の計 25 点とする。たわみ w' 以外の M_x', M_y', M_{xy}' については、境界線外の仮想点を差分格子に含めない (w' については、単純支持、固定の区別をつけるために仮想点を使う)。すなわち、格子は板内部に限定する。そのためには、差分の展開中心が格子点の任意の場所にある場合について、それぞれ差分係数を計算する必要がある。差分係数の計算には、3. と同様に、重みつき最小 2 乗法を利用する。

w_{ij}' を場所 (x_{ij}', y_{ij}') におけるたわみの値、 a_{ij} を w_{ij}' のもつ重みとする。この場合、 5×5 の差分格子であるから、任意点のたわみ $w'(x', y')$ を、 x, y に関する最高次数 4 次の多項式で近似させている。計算に必要とされる $(\partial^2 w'/\partial x'^2), (\partial^2 w'/\partial y'^2), (\partial^2 w'/\partial x' \partial y')$ は、 w_{ij}' により次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} &= \left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial x'^2} \right\}^T [A]^{-1} [B] \{W\} \\ \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} &= \left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial y'^2} \right\}^T [A]^{-1} [B] \{W\} \\ \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial y'} &= \left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial x' \partial y'} \right\}^T [A]^{-1} [B] \{W\} \end{aligned} \dots (10)$$

ここに、求めようとする点の座標を (\bar{x}, \bar{y}) とする（ただし、これらの座標の原点は、各差分格子の展開中心である）と、

$$\{D\}^T = \{1 \ \bar{x} \ \bar{y} \ \bar{x}^2 \ \bar{x}\bar{y} \ \bar{y}^2 \ \bar{x}^3 \ \bar{x}^2\bar{y} \ \bar{x}\bar{y}^2 \ \bar{y}^3 \ \bar{x}^4 \ \bar{x}^3\bar{y} \ \bar{x}^2\bar{y}^2 \ \bar{x}\bar{y}^3 \ \bar{y}^4\}$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial x'^2} \right\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 6\bar{x} \ 2\bar{y} \ 0 \ 0 \ 12\bar{x}^2 \ 6\bar{x}\bar{y} \ 2\bar{y}^2 \ 0 \ 0\}$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial y'^2} \right\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 2\bar{x} \ 6\bar{y} \ 0 \ 0 \ 2\bar{x}^2 \ 6\bar{x}\bar{y} \ 12\bar{y}^2\}$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial x' \partial y'} \right\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2\bar{x} \ 2\bar{y} \ 0 \ 0 \ 3\bar{x}^2 \ 4\bar{x}\bar{y} \ 3\bar{y}^2 \ 0\}$$

となる。また、

$$[A] = \begin{bmatrix} \sum \sum a_{ij} & \sum \sum a_{ij}x_{ij}' & \sum \sum a_{ij}y_{ij}' & \sum \sum a_{ij}x_{ij}'^2 & \cdots & \sum \sum a_{ij}y_{ij}'^4 \\ \sum \sum a_{ij}x_{ij}'^2 & \sum \sum a_{ij}x_{ij}'y_{ij}' & \sum \sum a_{ij}x_{ij}'^3 & \cdots & \sum \sum a_{ij}x_{ij}'y_{ij}'^4 \\ & \sum \sum a_{ij}y_{ij}'^2 & \sum \sum a_{ij}x_{ij}'^2y_{ij}' & \cdots & \sum \sum a_{ij}y_{ij}'^5 \\ & & \sum \sum a_{ij}x_{ij}'^4 & \cdots & \sum \sum a_{ij}x_{ij}'^2y_{ij}'^4 \\ & & & & \ddots \\ & & & & \sum \sum a_{ij}y_{ij}'^8 \end{bmatrix}$$

sym.

$$[B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{55} \\ a_{11}x_{11}' & a_{12}x_{12}' & a_{13}x_{13}' & \cdots & a_{55}x_{55}' \\ a_{11}y_{11}' & a_{12}y_{12}' & a_{13}y_{13}' & \cdots & a_{55}y_{55}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}y_{11}'^4 & a_{12}y_{12}'^4 & a_{13}y_{13}'^4 & \cdots & a_{55}y_{55}'^4 \end{bmatrix}$$

$$\{W\} = \{w_{11} w_{12} w_{13} \cdots w_{55}\}$$

曲げモーメントについても、同様に高精度差分が誘導される。重みは、差分展開中心からの距離の2乗に反比例するようにつける。

周辺単純支持、固定の正方形板の中央でのたわみを求め、理論解との比と、分割数 n との関係を、図-3 (1) に示す。普通精度の差分と比較し、より少ない分割数で精度が保たれている。

最後に、材料非線形性について検討する。

材料非線形性としては、準線形関係を仮定する。

基本式は、式 (7), (8), (9) を使うのであるが、降伏判定式には、次の式を用いる。

$$(M_x'^2 + M_y'^2 + 3M_{xy}'^2 - M_x'M_y')^{1/2} \geq 2(1-\nu^2)(b/h)^2(\sigma_{yield}/E) \geq \sigma_{yield}' \quad \dots \dots \dots (11.1)$$

そして、非線形による影響は、式 (9) の無次元化量とともに量との関係に含まれる。繰返しの各段階で式 (11.1) により応力状態を調べ、降伏に達していなければ弾性係数 E を、降伏値 σ_{yield}' を越えた場合には、 σ_{yield}' を越えた分についてのみ、準線形の弾性係数 E' を使用する。また、降伏判定は、安全側の値を得るために、板の断面中応力最大となる板表面で行い、 $\sigma_{yield} = 2500 \text{ kg/cm}^2 (\sigma'_{yield} = 0.00119)$ とする。

$E' = E/5$, $(h/b) = 0.01$ とし、荷重 q_z' を漸増させるときの降伏域の進展を、図-4 (1), 図-5 (1) に示す。さらに、板中央のたわみと、荷重の関係を、図-6 (1), (2) に示す。たわみ、荷重とも、弾性限（降伏域が始まることを弾性限とした）でのたわみ、荷重で除してある。

図-4, 6 により、全面降伏時の荷重に関しての、理論解との照合が可能である。すなわち、周辺単純支持板の場合、全面降伏時の荷重 $q_a = 24M_p/b^2 = 4\sigma_{yield} h^2$ は、無次元化されて、 $q'_a = 48(1-\nu^2)(b/h)^2\sigma_{yield}'$ となり、 $\nu = 0.3$, $(h/b) = 0.01$, $\sigma_{yield}' = 0.00119$ より、 $q'_a =$

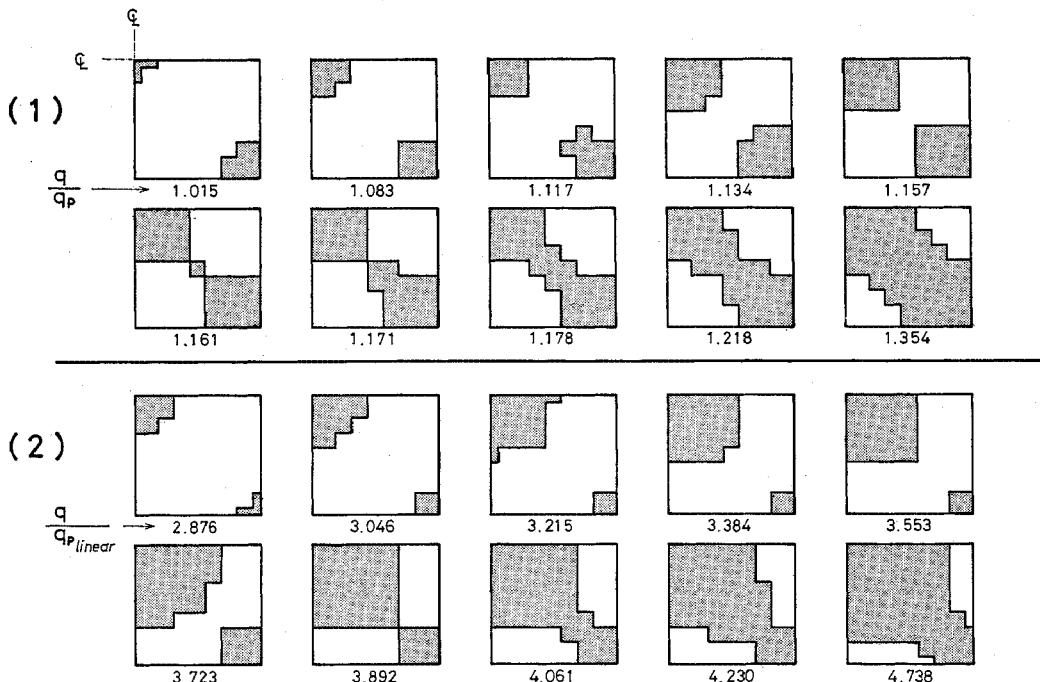


図-4 降伏領域の進展（単純支持）

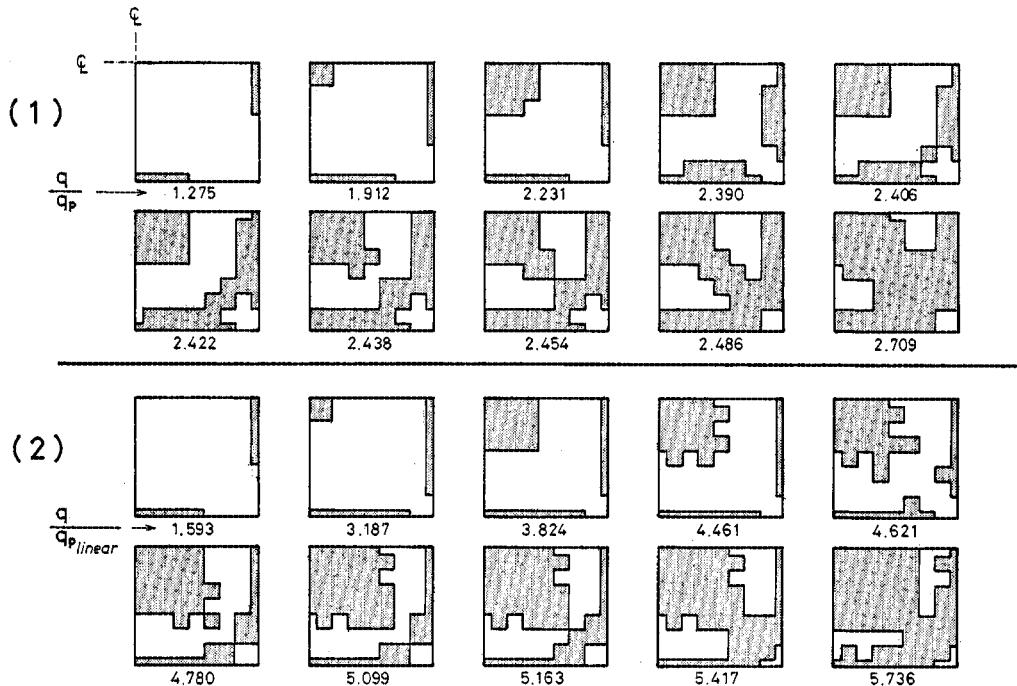


図-5 降伏領域の進展（固定）

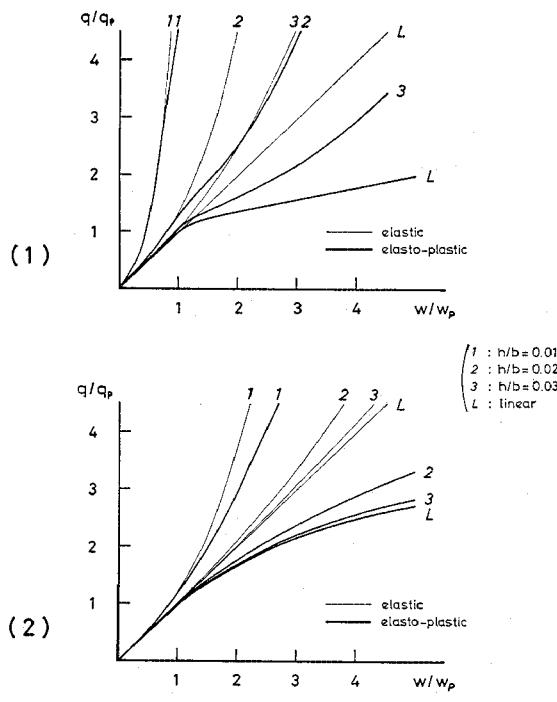


図-6 荷重-最大たわみ曲線

520 となる。一方、図-4 (1) より、全面降伏時の q_a' として、 $q_a' = 522 \sim 525$ が推定される。また、図-6 (1) の（たわみ-荷重）曲線で、E と \bar{E} の両部分の直線の交点を調べることにより、 $q_a' = 515 \sim 530$ と推定される。ともに、理論解にはほぼ等しく、このような簡単な降伏判

定だけで、ある程度の精度が得られることが確認された。

5. 板の大たわみを考慮した弾塑性解析

4. で用いられた基本式 (8), (9), (10) に、大たわみを考慮した式を含めると、4. と同様にして、大たわみを考慮した板の弾塑性静的解析を行うことができる。

この場合、式 (8.1), (9.1) ~ (9.3) を、そのまま利用する。このほかに、次の式を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{w}'}{\partial t'} + k_z' \dot{w}' &= \frac{\partial^2 M_x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 M_y'}{\partial y'^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}'}{\partial x' \partial y'} \\ &+ q_z' + N_x' \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + N_y' \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} \\ &+ 2 N_{xy}' \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \left(\frac{\partial N_x'}{\partial x'} + \frac{\partial N_{xy}'}{\partial y'} \right) \\ &+ \frac{\partial w'}{\partial y'} \left(\frac{\partial N_y'}{\partial y'} + \frac{\partial N_{xy}'}{\partial x'} \right) \quad \dots \dots \dots (7.2) \end{aligned}$$

$$\frac{\rho_x}{\rho_z} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \frac{\partial \dot{u}'}{\partial t'} + k_x' \dot{u}' = \frac{\partial N_x'}{\partial x'} + \frac{\partial N_{xy}'}{\partial y'} \quad \dots \dots \dots (7.3)$$

$$\frac{\rho_y}{\rho_z} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \frac{\partial \dot{v}'}{\partial t'} + k_y' \dot{v}' = \frac{\partial N_y'}{\partial y'} + \frac{\partial N_{xy}'}{\partial x'} \quad \dots \dots \dots (7.4)$$

$$\dot{u}' = \frac{\partial u'}{\partial t'} \quad \dots \dots \dots (8.2)$$

$$\dot{v}' = \frac{\partial v'}{\partial t'} \quad \dots \dots \dots (8.3)$$

$$N_{x'} = 12 \left\{ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \nu \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 \right\} \quad (9.4)$$

$$N_{y'} = 12 \left\{ \frac{\partial v'}{\partial y'} + \nu \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \right\} \quad (9.5)$$

$$N_{xy'} = 6(1-\nu) \left\{ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} + \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \right\} \quad (9.6)$$

ここに、無次元化量と、もとの量との関係は、

$$N_x = (D/b^2) N_{x'}, \quad N_y = (D/b^2) N_{y'}$$

$$N_{xy} = (D/b^2) N_{xy'}, \quad u = (h^2/b) u', \quad v = (h^2/b) v'$$

$$k_x = \{(\rho_z/D)^{1/2}/h^2\} k_{x'}, \quad k_y = \{(\rho_z/D)^{1/2}/h^2\} k_{y'}$$

である。また、 $\rho_x = \rho_y = b\tau/ng$ 、 $k_x = h\tau/g$ である。なお、式 (7.2) の最後の 2 項は、 x 方向、ならびに、 y 方向の慣性力によるもので、静的解析では無視される。ここでは、大たわみ振動も取り扱われるため、これらの項も含めたかたちで基本式が表示されている。

式 (7.2)～(7.4)、(8.1)～(8.3)、(9.1)～(9.6) を差分表示し⁵⁾、4. と同様に適当な収束係数 $k_{x'}$ 、 $k_{y'}$ 、 k_z' を定めて繰り返し計算を行うと、収束値が静的解となる。計算時間間隔 $\Delta t'$ は、曲げ波の条件 (式 (5.2)) と、引張波の条件

$$\begin{aligned} \Delta t &\leq \{ \rho(1+\nu)(1-2\nu)/2E(1-\nu) \}^{1/2} dx \\ \Delta t' &\leq \{ (1-2\nu)/6n^2(1-\nu)^2 \}^{1/2} (h/b) \end{aligned} \quad (5.3)$$

のうち、どちらか小さい方の値を使用する。板厚が辺長に比較して小さくなるほど、引張波の条件が卓越していく。

ここで用いられるプログラムのフローチャートを図-2 に併記する。点線で囲まれた部分を含めて、すべての部分が手続として必要である。

弾性板については、周辺単純支持と、周辺固定の正方形板で、厚さ h と辺長 b の比 (h/b) を、0.01, 0.02, 0.03 としたときの、荷重と、板中央のたわみとの関係を、図-6 (1), (2) に併示する。たわみ、荷重とも、大たわみを無視した同一寸法の板の弾性限でのたわみ、荷重で除してある。また、文献 5) に示されている Royal Aeronautical Society の data sheets との比較においても、よい一致を示した。さらに、 $q'=3200$ の場合について、精度と、分割数 n との関係を、周辺単純支持、固定の双方について 4. と同じように求め、図-3 (2) に示す。これらの計算では、 $k_{x'} = k_{y'} = 1$ 、 $k_z' = 80 \sim 120$ 程度で、200～300 回程度の収束が可能となった。

高精度差分式を使った場合の結果については、精度と分割数との関係を、図-3 (2) に併示する。高精度差分

そのものは、4. と同じようにして求めている。この場合も、仮想点を考えるのは、たわみ w についてだけで、 $u, v, M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$ については、すべて板内部（境界上も含めて）の点だけを使って差分表示を行っている。

高精度差分による効果は、普通精度の $n=20$ での値が、 $n=12$ で得られるところから、かなり認められよう。

さて、弾塑性を考慮する場合には、次の判定式を使う⁶⁾。

$$\begin{aligned} & \{M_{x'}'^2 + M_{y'}'^2 + 3M_{xy'}'^2 - M_{x'}' M_{y'}' \\ & \quad + (N_{x'}'^2 + N_{y'}'^2 + 3N_{xy'}'^2 + N_{x'}' N_{y'}')/36\}^{1/2} \\ & \geq 2(1-\nu^2)(b/h)^2(\sigma_{yield}/E) \\ & \geq \sigma_{yield}' \end{aligned} \quad (11.2)$$

そのほかの点は、4. と同様である。 $(h/b)=0.01$ の周辺単純支持、および、周辺固定の正方形板について、荷重を漸増させたときの降伏域の進展を、図-4 (2), 図-5 (2) に併示する。降伏域の進展の状態は、 $(h/b)=0.02$ では、大たわみ無視の場合と大差なく、 $(h/b)=0.03$ では、大たわみ無視の場合と一致している。 $(h/b)=0.01, 0.02, 0.03$ の各場合について、板中央のたわみと荷重の関係を求め、図-6 (1), (2) に併示する。これらの値についても、大たわみ無視の同一寸法の板の弾性限でのたわみ、荷重で除してある。

6. 板の弾塑性振動

板の衝撃応答の計算には、式 (7.1), (8.1), (9.1)～(9.3) を用いる。この場合、減衰定数 k_z' は任意に選べばよいが、以下の計算例では、 $k_z'=0$ とする。時刻 $t'=0$ で、突然に $q_z'=1$ なる等分布荷重が載荷される周辺単純支持の正方形板を考える。すなわち、 $q_z'=U(t'-0)$ が荷重となる。弾性板の中央でのたわみの時間的変化について、Fourier 級数解と、ここでの数値解析結果とを、図-7 (1) に示す。計算時間間隔 $\Delta t'$ は、式 (4.2) の限界値を使用しても、その数十分の一でも、たわみ応答、曲げモーメント応答には変化がみられず、 $\Delta t'$ として限界値を使用しても数値解が安定であることを保障している。応答は、たわみ、曲げモーメントとともに、級数解よりはピークが低目となるほかは、ほぼ一致している。

差分の高精度化については、場所に関する差分の高精度化と、時間に関する差分の高精度化を検討する。時間に関する高精度差分は式 (6) を、場所に関する高精度差分は式 (10) を使う。これらの差分式を用いて、たわみ応答を求めると、どちらか一方、あるいは、両方の高精度式を用いたいずれの場合も、図-7 (1) の普通差分によるものと比較して、有意な差が認められないほど似

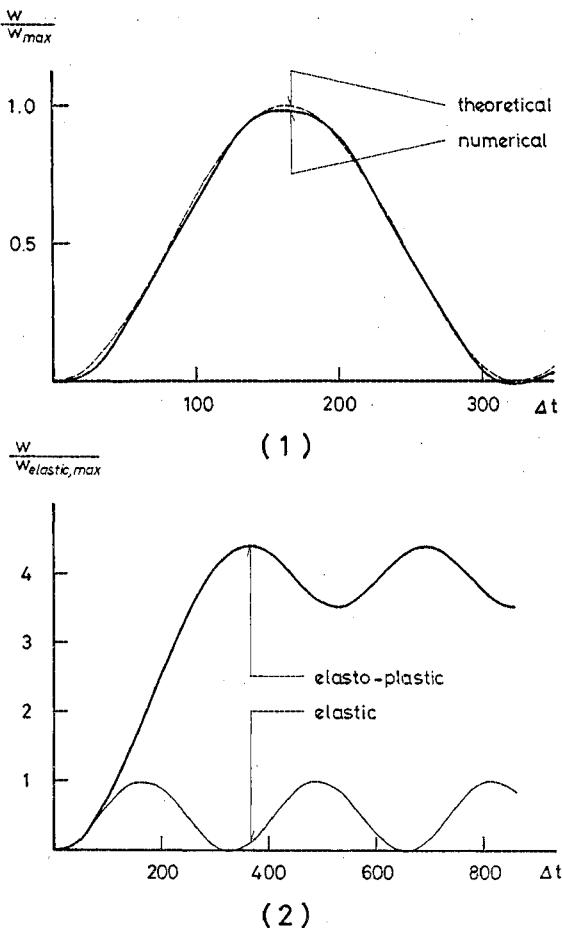


図-7 弾性および弾塑性振動

ている。結論として、板がこのような衝撃力を受ける場合には、普通精度の差分を使うことで、応答を十分追跡することが可能である。このように普通精度でも十分となった理由は、はりのたて振動の応力応答が不連続関数となるのに対して、板の応答は滑らかな連続関数となり、数値計算上の追跡が容易となるからである。

弾塑性板の振動は、弾性板の振動と同じように計算される。相違点は、降伏応力以下では弾性係数 E' を、降伏応力を越えた場合には、越えた部分に対して、応力増加中なら準線形部分の弾性係数 \bar{E}' を、応力減少中なら E' をそのまま使用する、という点である。そして、降伏応力が一定値でなく、過去に生じた応力の最大値（ただし、降伏応力を越えていなくてはならない）を、新しい降伏応力とする。

弾塑性板についても、たわみ応答を計算する。板中央のたわみの時間的変化を、図-7 (2) に示す。板の諸量は、弾性振動と同じであり、 $\bar{E}' = (E'/5)$ とする。一度塑性状態を示したあとは、弾性振動と似た状態となり、弾性振動よりは小さい振幅の波形が生ずるが、これは、

降伏点の上昇による弾性域の増大と、塑性状態に一度入ったことによる減衰効果によるものである。

7. 板の大たわみを考慮した弾塑性振動

この場合は、式 (7.2)～(7.4), (8.1)～(8.3), (9.1)～(9.6) を、減衰定数 $k_x' = k_y' = k_z' = 0$ として反復計算すれば、衝撃応答が得られる。時刻 $t'=0$ で、 $q_z' = 83.33$ なる等分布荷重が作用する周辺単純支持の正方形板について計算を行う。 $(h/b) = 0.01, 0.04$ とする。この場合の板中央のたわみ応答を、図-8 (1) に示す。図-8 (1) には、 $(h/b) = 0.04$ の場合の理論解⁹⁾も併示されている。この理論解に用いられた境界条件 ($u=v=\tau_{xy}=0$) と、ここでの解析の条件 ($u=v=0$) が異なるため、振幅、周期がいくらかかずれたが、これらはほぼ同じ状態を表わしていると思われる。

図-9 (1), (2) は、板厚と辺長の比 (h/b) による振幅、および、周期の変化を示したものである。図-8, 9

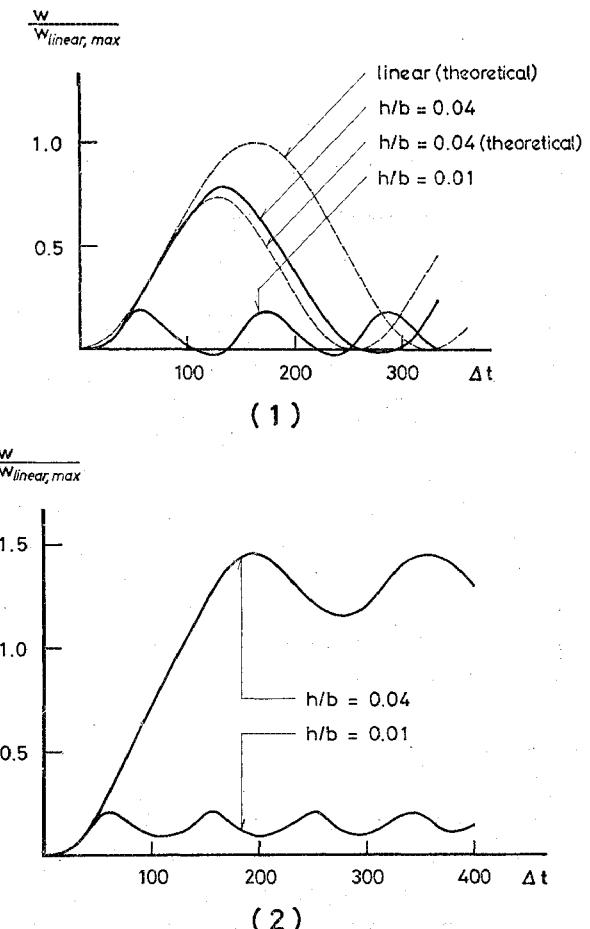


図-8 大たわみを考慮した弾性および弾塑性振動

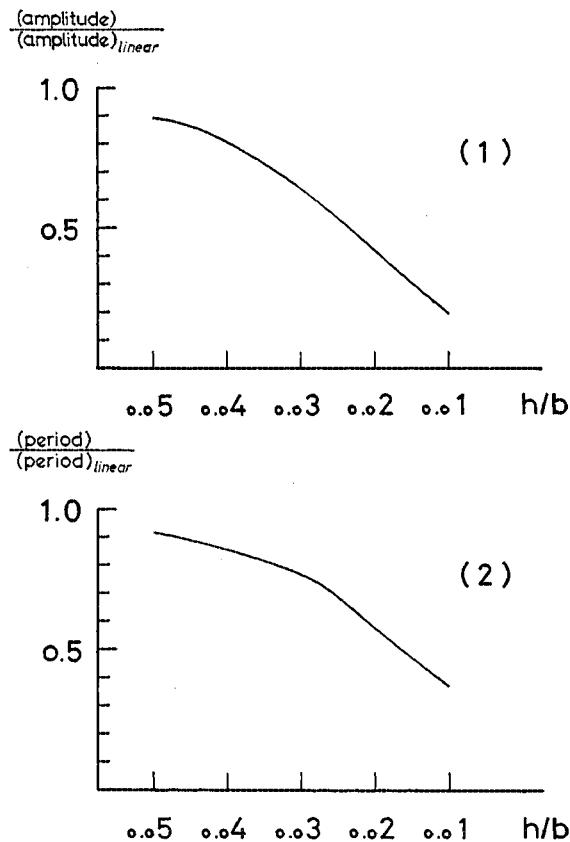


図-9 大たわみ効果による振幅および周期の低下

ともに、大たわみ無視の場合の振幅、周期を 1 として表示されている。 $(h/b)=0.02$ 以下では、かなり大たわみによる影響が大きくなっている。静的状態でよりも、動的状態で一層、大たわみの影響が大きいといえよう。

差分の高精度化については、応答が滑らかな曲線となるため、時間、場所のいずれについても不要と思われる。

弾性振動の計算例と同一の値を用いて、弾塑性状態でのたわみ応答を計算し、図-8 (2) に示す。大たわみ無視の板の弾塑性振動の場合と同じように、いったん塑性状態になると、以後は弾性振動に似た挙動を示す。さらに、図-7 と 図-8 の対比から、 (h/b) が小さくなるにつれて、弾塑性効果よりも、大たわみ効果の方が卓越していく傾向がみられる。

8. 結論

DR 的な差分表示により、板の静的、ならびに、動的応答問題を同一の繰り返し計算で解く手法を示した。この結果として、次のことがいえよう。

(1) DR 的差分表示による数値解析手法は、計算の対象が静的問題である場合には、他の計算法と比較し

て、精度、計算時間ともに、それほど遜色ない。対象が動的、特に非線形、応答解析である場合には、計算時間が少なくてすむと思われる。

(2) ここで扱われたような板の衝撃応答問題では、幾何学的非線形性の有無にかかわらず、時間、場所のいずれに関しても、普通精度の差分で十分である。

(3) 静的解析に対しても、高精度差分（場所に関する）を使うことによる効果は大きい。

(4) 大たわみ効果を考慮することによる影響は、静的解析においてよりも、動的応答解析において一層大きい。

(5) 大たわみ効果と弾塑性効果の両者を考慮した場合は、 (h/b) の値により、2つの非線形効果のどちらが卓越するかが大きく左右される。したがって、どちらか一方の非線形効果だけを考慮しただけでは、構造物の挙動を正確に表わせない場合があると思われる。

以上の点から、DR 的な差分表示を用いた数値計算法を、板のような構造要素の静的、動的非線形応答解析に適用することは、かなり有効であると思われる。

なお、数値計算にあたっては、名古屋大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用した。

参考文献

- 1) Wilson, E.L., Farhoomand, I. and Bathe, K.J. : Non-linear Dynamic Analysis of Complex Structures, Earthquake Engng. and Structural Dynamics, 1 (1973), pp. 241-252.
- 2) Shantaram, D., Owen, D.R.J. and Zienkiewicz, O.C. : Dynamic Transient Behaviour of Two and Three Dimensional Structures including Plasticity, Large Deformation Effects and Fluid Interaction, C/R/231/74, Univ. of Wales, Dept. of Civil Engng., 1974, 37 p.
- 3) Bathe, K.J. : Finite Element Analysis of Geometric and Material Nonlinear Dynamic Response, 3rd Inter. Conf. on SMIRT, London, 1975, 11 p.
- 4) Bayles, D.J., Lowery, R.L. and Boyd, D.E. : Nonlinear Vibrations of Rectangular Plates, Proc. ASCE, 99 (1973), ST 5, pp. 853-864.
- 5) Rushton, K.R. : Large Deflexion of Variable-Thick-ness Plates, Int. J. Mech. Sci., 10 (1968), pp. 723-735.
- 6) Alwar, R.S. and Ramachandra Rao, N. : Large Elastic Deformations of Clamped Skewed Plates by Dynamic Relaxation, Computers and Structures, 4(1974), pp. 381-398.
- 7) Brew, J.S. and Brotton, D.M. : Non-Linear Structural Analysis by Dynamic Relaxation, Int. J. Numerical Methods in Engng., 3 (1971), pp. 463-483.
- 8) Massonnet, C.E. : General Theory of Elasto-Plastic Membrane-Plates, Engineering Plasticity, Cambridge Univ., 1968, pp. 443-472.
- 9) Bauer, H.F. : Nonlinear Response of Elastic Plates to Pulse Excitations, Trans. ASME, Series E, 35 (1968), pp. 47-52.

(1975.12.15・受付)