

片持ばりの Negative Shear Lag の解析とその応用*

RESEARCHES ON NEGATIVE SHEAR LAG OF CANTILEVER
BEAMS AND APPLICATION TO BRIDGE DESIGN

中井 博**・村山 泰男***

By Hiroshi NAKAI and Yasuo MURAYAMA

1. ま え が き

周知のように、幅の広いフランジ・プレートを持つ単純ばりでは、どの断面においてもフランジ・プレート内の垂直応力がウェブとの接合点において最大となり、フランジ・プレートの中央に進むにしたがって応力が漸減するといういわゆる Shear lag 現象を伴うことが古くから知られていた^{1),2)}。片持ばりの固定端においてもこの現象が発生するが³⁾、固定端より若干離れた断面においては端部の大きな拘束による反転現象がおこり、フランジ中央部の垂直応力のほうがウェブ結合点の値よりも大きくなることが明らかにされている。

Kuhn⁴⁾は航空機の翼を対象にした解析を行い、この種の現象を Negative shear lag と名付けている。わが国でも林ら⁵⁾によって同様な研究が行われているが、せん断遅れが反対になることから、せん断進み (Shear lead) という用語を用いている。いずれにしても、片持ばりの shear lag 現象が逆転することを意味するものであるから、本文ではこの現象を Kuhn にしたがって Negative shear lag とよぶことにする。

ところで、土木構造物でも最近単純ばりと異なった境界条件を持つものが建設される機会が多く、たとえば連続桁橋を片持式架設工法で建設する際には、その基本構造形式は片持ばりであるから、上述の Negative shear lag が起こることになる。また、連続桁橋で中間支点の間隔が狭い場合、その支間は負の曲げモーメントが卓越し、Negative shear lag を呈することが小松⁶⁾によって明らかにされている。さらに、著者らによると斜張橋のケーブル取付点においても同様な現象が起こることが示されている⁷⁾。したがって、その基本となる片持ばりの

Shear lag 現象を解析し、Negative shear lag に関する特性を明確にしておくことは重要であると考える。

そこで、本文は近藤・小松・中井⁸⁾によって導びかれた鋼床版桁橋の Shear lag に関する基礎式を用い、片持ばりに対する解を求めたものである。そして、片持ばりの Negative shear lag が起こる ① 範囲、② 最大位置を求め、③ それらが各種のパラメーターによってどのように変動するかを明らかにしようとしたものである。

これまで Shear lag 現象を考慮し、しかも初等ばり理論による簡便な設計計算を行うために有効幅⁹⁾を考えてきたが、Negative shear lag が生ずる場合に対しても、別途有効幅を求めることができる。しかし、複雑になる点も多々あるので本文では実用的見地より初等ばり理論によって得られた垂直応力を修正し、Negative shear lag による垂直応力が容易に算定できる実用式を提案する。一方、理論解析結果の妥当性を検討するために、軽量型鋼を若干加工した Π 形断面の片持ばり模型を製作して実験を行った。そして、各種の載荷状態のもとにおける Π 型断面内の垂直応力分布やたわみの実測値と計算値とを比較し、本文の理論解析方法の妥当性について種々考察するものである。

最後に、本文で求めた片持ばりに関する基本解を用いて、種々な形式の鋼床版桁橋に応用する方法を述べる。すなわち、① 架設途上の連続桁橋、② 不等スパン連続桁橋、③ 斜張橋などを片持ばりに置換して Negative shear lag を解析するための等価スパンの取り方、提案公式の使い方、および Negative shear lag による垂直応力の算定方法を数値計算例によって示すものである。

2. 基本式と片持ばりに対する解

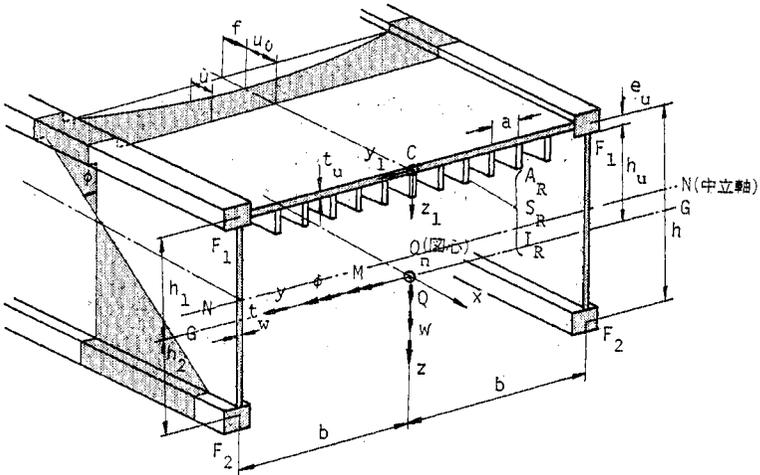
(1) 記号の定義

図一は本文で解析の対象とする Π 形断面を有する鋼床版桁橋を示すが、箱形断面などの換算方法は文献⁸⁾

* 第30回土木学会年次学術講演会において発表、I-104、(昭.50.10)

** 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科

*** 学生会員 大阪市立大学大学院工学研究科修士課程在学中



図一 II 形断面を有する鋼床版桁

表一 基本諸量

部材	記号	定義
鋼床版部	t_u	デッキプレートの板厚
	a	縦リブの間隔
	A_R	縦リブ1個の断面積
	S_R	縦リブ1個のデッキプレート中央面に関する断面1次モーメント
	I_R	縦リブ1個とそれに付随するデッキプレート中央面に関する断面2次モーメント
主桁	h	桁高
	t_w	腹板の厚さ
	b	腹板間隔の半分
	F_1	ブラケットの断面積
	F_2	下フランジの断面積

表二 断面諸量

(ν : ポアソン比)

部材	記号	定義	算定公式	式番号
デッキプレート	\bar{e}_u	デッキプレートの換算厚さ	$\bar{e}_u = \frac{t_u}{1-\nu^2} + \frac{A_R}{a}$	(1)
	e_u	デッキプレート中央面と縦リブ図心との偏心距離	$e_u = \frac{S_R}{a\bar{e}_u}$	(2)
主桁	F_u	片側デッキプレートの断面積	$F_u = b\bar{e}_u$	(3)
	F_w	片側腹板の断面積	$F_w = \frac{t_w h}{1-\nu^2}$	(4)
	F	桁の総断面積の半分	$F = F_u + F_w + F_1 + F_2$	(5)
	h_1	図心 O_n からデッキプレート中央面までの鉛直距離	$h_1 = \frac{1}{2F} \left\{ (2F_2 + F_w)h + \frac{2b}{a} S_R \right\}$	(6)
	h_2	図心 O_n から下フランジ中央面までの鉛直距離	$h_2 = h - h_1$	(7)
	h_u	図心 O_n からデッキプレート中立軸までの鉛直距離	$h_u = h_1 - e_u$	(8)
桁	I	桁の断面2次モーメント	$I = 2(F_u h_u^2 + (h^2/3 - h_1 h_2) F_w) + \frac{b}{a} I_R + F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2$	(9)
	W_u	デッキプレート中立面における断面係数	$W_u = \frac{(1-\nu^2)I}{h_u}$	(10)

にゆずることとする。

まず、断面諸量の基本的なものを表一に示す。

また、これらの記号を用いて計算される断面諸量を表二に示す。

次に、断面力・変位は表三に示すように定義する。

(2) 基本式

a) 断面力のつり合い

等分布荷重 q が満載する場合、あるいは集中荷重 P が $x=c$ 点に載荷する場合、曲げモーメント M に関する基礎式は

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = - \begin{cases} q & : \text{等分布荷重} \\ P \cdot \delta(x-c) & : \text{集中荷重} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(14)$$

で与えられる。

ここで、 δ は Dirac の delta function であり次式のように定義されるものである。

$$\delta(x-c) = \begin{cases} 1 & : x=c \\ 0 & : x \neq c \end{cases} \quad \dots\dots\dots(15)$$

b) 断面力と変形量との関係式

図一に示したように、shear lag 現象によって生ず

表三 断面力・変位

記号	定義	算定公式	式番号
u_0	デッキプレート中央の横軸方向の変位	$u_0 = h_1 \varphi - \frac{2}{3} \frac{F_u}{F} f$	(11)
f	Shear lag によるデッキプレート中央の横軸方向の変位	(後述する)	
φ	水平軸 (y) まわりのたわみ角	$\varphi = -\frac{dw}{dx}$	(12)
w	鉛直軸 (z) 方向のたわみ	(後述する)	
M	曲げモーメント	(後述する)	
m	Shear lag による付加モーメント	(後述する)	
Q	せん断力	$Q = \frac{dM}{dx}$	(13)

表四 各種パラメーター

パラメーター	定義	算定公式	式番号
α	断面特性を表わすパラメーター	$\alpha = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{1.5}{\omega(1.2-\kappa)}}$	(17)
β	無次元パラメーター	$\beta = \frac{1.5}{1.2-\kappa}$	(18)
γ	剛比を表わすパラメーター	$\gamma = \frac{4}{3} \cdot \frac{F_u h_u^2}{I}$	(19)
ω	デッキプレートの材料・寸法の特性を表わすパラメーター	$\omega = \frac{1}{1-\nu} + \frac{A_R}{a t_u} (1+\nu)$	(20)
κ	桁の断面形状を表わすパラメーター	$\kappa = \frac{F_u}{F} + 2 \frac{F_u h_u^2}{I}$	(21)

表-5 各種荷重状態に対する断面力の解

荷重状態	曲げモーメント $M(x)$	せん断力 $Q(x)$	式番号
等分布満載荷重 (図-2 (a))	$-\frac{ql^2}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2$	$ql\left(1-\frac{x}{l}\right)$	(32.1)
部分分布荷重 (図-2 (b))	$qc^2\left\{-2\frac{a}{c}+2\frac{ax}{c^2}-\frac{(x-c_1)^2}{2c^2}U(x-c_1)+\frac{(x-c_2)^2}{2c^2}U(x-c_2)\right\}$	$qc\left\{2\frac{a}{c}-\frac{x-c_1}{c}U(x-c_1)+\frac{x-c_2}{c}U(x-c_2)\right\}$	(32.2)
集中荷重 (図-2 (c))	$PC\left(\frac{x}{c}-1\right)(1-U(x-c))$	$P(1-U(x-c))$	(32.3)

るデッキプレート内の橋軸方向変位 f に関する基礎式は、文献 8) より次式のように与えられる。

$$\frac{d^2f}{dx^2} - \alpha^2 f = \frac{\beta h_u}{EI} Q \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 E は鋼材のヤング率であり、また、表-4 に示すパラメーターを導入するものとする。

すると、たわみ w の基礎式は文献 8) より次のように書くことができる。

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} - \frac{r}{h_u} \frac{df}{dx} \dots\dots\dots (22)$$

c) 垂直応力の算定公式

図-1 に示したようにデッキプレート中央点 C から任意の点 (y_1, z_1) における橋軸方向の変位 u は、文献 8) より次式のように与えられる。

$$u = (h_1 - z_1)\varphi + \left(1 - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{F_u}{F}\right) f \dots\dots\dots (23)$$

そこで、Hooke の法則よりその点の垂直応力を求めると、式 (12) より

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \frac{du}{dx} \\ &= E \left[(h_1 - z_1) \frac{d\varphi}{dx} + \left(1 - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{F_u}{F}\right) \frac{df}{dx} \right] \\ &= - \left[\frac{M}{I} (h_1 - z_1) - E \left\{ 1 - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{F_u}{F} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (h_1 - z_1) \frac{r}{h_u} \right\} \frac{df}{dx} \right] \end{aligned}$$

が得られる。

ここで、shear lag による付加モーメント m を次のように定義する。

$$m = \frac{EI}{h_u} \cdot \frac{df}{dx} \dots\dots\dots (24)*$$

すると、デッキプレートにおける垂直応力分布は、式 (10) の W_u を用いて

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{W_u} \left[\frac{h_1 - z_1}{h_u} M - \left\{ 1 - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{F_u}{F} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (h_1 - z_1) \frac{r}{h_u} \right\} m \right] \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

と表わされ、ウェブプレートにおいては

* 文献 7) によると、物理的に付加モーメントは

$$m = r \frac{EI}{h_u} \cdot \frac{df}{dx}$$

であるが、ここでは簡便のためにこのようにおくことにした。

$$\sigma_x = \frac{1}{W_u} \left[\frac{z}{h_u} M - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{F_u}{F} - z \frac{r}{h_u} \right) m \right] \dots\dots\dots (26)$$

と書くことができる。

特に、デッキプレートの中立軸 h_u における垂直応力の公式は、以下のように簡素化することができる。

$$\left. \begin{aligned} \text{デッキプレート中央:} \\ \sigma_m &= -\frac{1}{W_u} \left[M - \left(1 - \frac{2}{3} \kappa\right) m \right] \\ \text{ウェブとの接合点:} \\ \sigma_e &= -\frac{1}{W_u} \left[M + \frac{2}{3} \kappa m \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

また、付加モーメント m による垂直応力を σ_s とすれば

$$\sigma_s = \frac{m}{W_u} \dots\dots\dots (28)$$

となり、デッキプレート中立軸内の任意点 y_1 における垂直応力 σ_x は、次式で与えられる。

$$\sigma_x = \sigma_m - \sigma_s \cdot \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 \dots\dots\dots (29)$$

式 (27)~(29) の公式はデッキプレート中立軸に関するものであるが、縁応力を求めたいとき、 W_u の代わりに縁における断面係数を用いてもその誤差は僅少であると考えられる。

(3) 片持ばりに対する解

以上に示した基礎式を片持ばりに対して解く。荷重状態としては図-2 に示す3つの代表的なものを考えることにする。

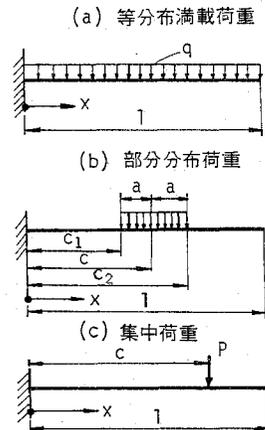


図-2 荷重状態

表-6 Shaer lag による軸方向変位 $f(x)$ の解

載荷状態	$f(x)$	式番号
等分布満載荷重 (図-2 (a))	$\frac{qh_u\beta}{EI\alpha^3} \left[\frac{1}{\cosh \alpha l} \{ \alpha l \cosh \alpha(l-x) - \sinh \alpha x \} - \alpha(l-x) \right]$	(34.1)
部分分布荷重 (図-2 (b))	$\frac{qh_u\beta}{EI\alpha^3} \left[\frac{2}{\cosh \alpha l} \{ \sinh \alpha(l-x) \cdot \sinh \alpha a - \alpha a \sinh \alpha l \} \sinh \alpha x + 2 \alpha a (\cosh \alpha x - 1) \right. \\ \left. - \{ \sinh \alpha(x-c_1) - \alpha(x-c_1) \} U(x-c_1) + \{ \sinh \alpha(x-c_2) - \alpha(x-c_2) \} U(x-c_2) \right]$	(34.2)
集中荷重 (図-2 (c))	$\frac{Ph_u\beta}{EI\alpha^2} \left[\frac{1}{\cosh \alpha l} \{ \cosh \alpha(l-x) + \sinh \alpha x \cdot \sinh \alpha(l-c) \} - 1 - \{ \cosh \alpha(x-c) - 1 \} U(x-c) \right]$	(34.3)

表-7 Shear lag による付加モーメント $m(x)$ の解

載荷状態	$m(x)$	式番号
等分布満載荷重 (図-2 (a))	$qb^2\omega \left[\frac{-1}{\cosh \alpha l} \{ \alpha l \sinh \alpha(l-x) + \cosh \alpha x \} + 1 \right]$	(35.1)
部分分布荷重 (図-2 (b))	$qb^2\omega \left[\frac{2}{\cosh \alpha l} \{ \sinh \alpha(l-c) \sinh \alpha a - \alpha a \sinh \alpha l \} \cosh \alpha x + 2 \alpha a \sinh \alpha x \right. \\ \left. - \{ \cosh \alpha(x-c_1) - 1 \} U(x-c_1) + \{ \cosh \alpha(x-c_2) - 1 \} U(x-c_2) \right]$	(35.2)
集中荷重 (図-2 (c))	$Pb\sqrt{\beta}\omega \left[\frac{-1}{\cosh \alpha l} \{ \sinh \alpha(l-x) - \sinh \alpha(l-c) \cdot \cosh \alpha x \} - \sinh \alpha(x-c) U(x-c) \right]$	(35.3)

表-8 たわみ $w(x)$ の解

載荷状態	$w(x)$	式番号
等分布満載荷重 (図-2 (a))	$\frac{ql^4}{EI} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] \\ + \frac{qr\beta}{EI\alpha^4} \left[\frac{-1}{\cosh \alpha l} \{ \alpha l (\sinh \alpha l - \sinh \alpha x) - \cosh \alpha x + 1 \} - \alpha^2 x \left(\frac{x}{2} - l \right) \right]$	(37.1)
部分分布荷重 (図-2 (b))	$\frac{ql^4}{EI} \left[\frac{ac}{l^2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{a}{l} \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{x-c_1}{l} \right)^4 U(x-c_1) - \frac{1}{24} \left(\frac{x-c_2}{l} \right)^4 U(x-c_2) \right] \\ + \frac{qr\beta}{EI\alpha^4} \left[\frac{2}{\cosh \alpha l} \{ \sinh \alpha(l-c) \sinh \alpha a \cdot (1 - \cosh \alpha x) + \alpha a (\sinh \alpha(l-x) \right. \\ \left. - \sinh \alpha l + \alpha x \cosh \alpha l) \} + \left\{ \cosh \alpha(x-c_1) - \frac{\alpha^2(x-c_1)^2}{2} - 1 \right\} U(x-c_1) \right. \\ \left. - \left\{ \cosh \alpha(x-c_2) - \frac{\alpha^2(x-c_2)^2}{2} - 1 \right\} U(x-c_2) \right]$	(37.2)
集中荷重 (図-2 (c))	$\frac{Pc^3}{EI} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{c} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{c} \right)^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{x-c}{c} \right)^3 U(x-c) \right] \\ + \frac{Pr\beta}{EI\alpha^3} \left[\frac{1}{\cosh \alpha l} \{ \sinh \alpha(l-x) - \sinh \alpha(l-c) \cosh \alpha x - \sinh \alpha l + \sinh \alpha(l-c) \} \right. \\ \left. + \alpha x + \{ \sinh \alpha(x-c) - \alpha(x-c) \} U(x-c) \right]$	(37.3)

a) 断面力の解

式 (13)~(14) を 図-2 に示す片持ばりの境界条件

$$[M]_{x=l} = [Q]_{x=l} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

のもとに解いた結果を表-5 に示す。

この表で、 U は Unit step function を意味し、たとえば

$$U(x-c) = \begin{cases} 0; & 0 < x < c \\ 1; & c \leq x \leq l \end{cases} \dots\dots\dots (31)$$

なることを表わすものとする。

b) 変位

表-5 のせん断力 Q を用いて、まず式 (16) より f を求めるが、境界条件は

$$[f]_{x=0} = \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=l} = 0 \dots\dots\dots (33)$$

である。表-6 には代表的な荷重状態に対する f の解を示す。

また、表-7 は、上記の荷重状態に対する付加モーメント m の解であり、式 (24) より求められるものである。

最後に、たわみ w は式 (22) を境界条件

$$[w]_{x=0} = [\varphi]_{x=0} = 0 \dots\dots\dots (36)$$

のもとに解くと、表-8 の結果を得る。

3. Negative shear lag の特性

(1) デッキプレートの垂直応力のスパン方向における変化

一般的な場合として $l/b=10$ 、パラメーター $\omega=2.0$ 、 $\alpha=0.75$ として⁸⁾、① 等分布荷重が満載する場合、および ② 集中荷重が $c=0.5l$ 点に載荷する場合に対するデッキプレートの垂直応力の変化を 図-3~4 に示す。

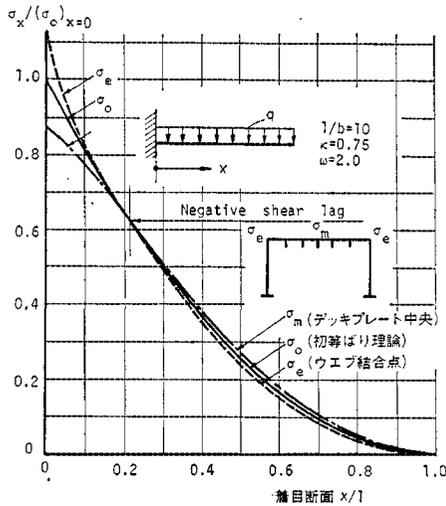


図-3 等分布荷重による垂直応力のスパン方向の変化

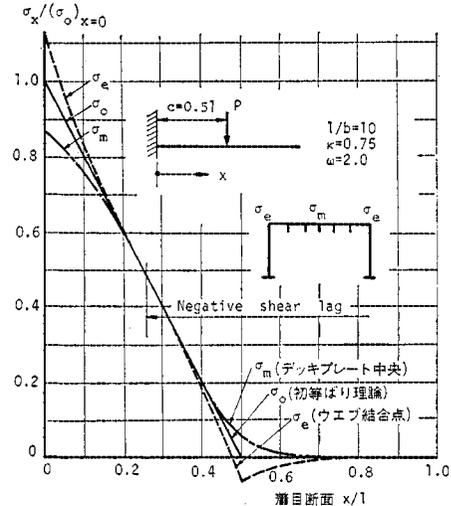


図-4 集中荷重による垂直応力のスパン方向の変化

ただし、ここでは ① デッキプレート中央の値 σ_m 、② ウェブとの接合点における値 σ_e のほか、参考のために ③ 初等ばり理論による値 σ_0 も示してあるが、いずれも片持ちり固定端の初等ばり理論による値 $(\sigma_0)_{x=0}$ で無次元化してある。

まず、等分布荷重が満載する場合、図-3 より明らかなように $x=0.2l$ 付近より Negative shear lag がおこりはじめ、ほぼ $x=0.6l$ 付近で初等ばり理論との差が最大となり、それ以上 x が大となると再び減少する傾向になる。しかしながら、固定端付近では単純ばりと同様な shear lag 現象を呈する。

次に、集中荷重が載荷する 図-4 の場合、Negative shear lag 現象は載荷点で最大となることがわかる。また着目点 $x \geq c$ の断面においても Negative shear lag の影響のために垂直応力が発生することを示している。これは初等ばり理論によるものと著しく異なる点である。以上の結果は、デッキプレートに縦リブが取付けられていない簡単な断面に対して計算された Kuhn の結果⁴⁾とも傾向がよく一致している。

(2) Negative shear lag の生ずる範囲と最大値

a) 等分布荷重が満載する場合

Negative shear lag の生ずる範囲は、すでに示した式 (27) で明らかなように曲げモーメント M と shear lag による付加モーメント m とが異符号のときにおこる。それで、付加モーメント m のスパン方向の変化を調べれば Negative shear lag のおこる範囲とその最大値を知ることができる。以下では、付加モーメントを無

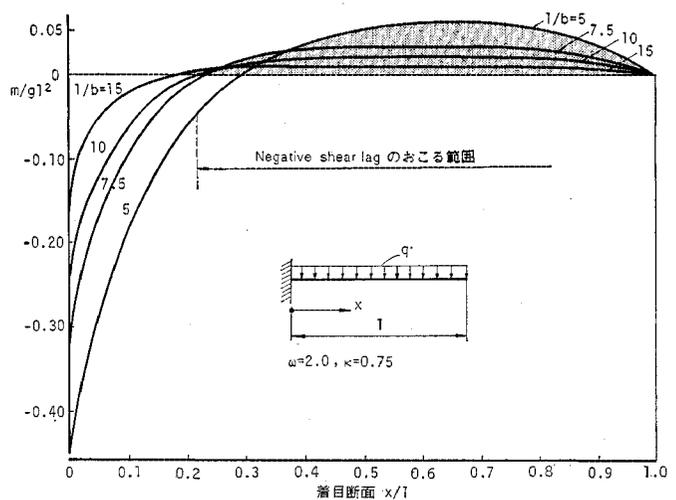


図-5 l/b 値による m/ql^2 の変化

次元量として表すために ql^2 で割り、 m/ql^2 の値として求めることにする。

図-5 はパラメーター ω, κ を一定とし、 l/b による m/ql^2 値の変化をプロットしたものである。着目点が $x/l < 0.2$ では m の符号は負であり、曲げモーメントの符号とも一致するから、通常 shear lag がおこることを意味する。しかし、 $x/l > 0.2$ の範囲では m と M の符号が反転するので Negative shear lag がおこることになる。

そして、その最大値は $x/l \cong 0.6 \sim 0.7$ 付近におこり、 l/b 値が小さいほど m/ql^2 値が大きく、したがって Negative shear lag が大きくなることを示している。

当然のことであるが、Negative shear lag のおこる範囲とその最大値は、他のパラメーターによっても左右される。それで、デッキプレートの特性を表すパラ

メーター ω , および, 桁の断面形状を表わすパラメーター κ による m/ql^2 値の変化をそれぞれ 図-6~7 に示す.

これらの図によると, ω が大きいほど Negative shear lag が大きくなるが, κ による影響はそれほど大きく現われない.

以上の結果より, 等分布荷重を満載した片持ばりにお

ける Negative shear lag の特性が明らかになったが, 実用的には 図-8 において点線で示す m/ql^2 値の変化を実線で示すような提案曲線で近似しても誤差は少ないように思われる. すると, Negative shear lag のはじまる位置 ψ , および, その最大値 $(m/ql^2)_{max}$ がわかれば, 付加モーメント m のスパン方向の分布を容易に知ることができる. そのため 表-9, 10 にはパラメーター

$l/b, \omega, \kappa$ に応じた ψ および $(m/ql^2)_{max}$ 値を示した. 後述するように連続桁を片持式架設工法で建設する際の Negative shear lag を考慮した応力解析はこれらの表を利用して行うことができ, 有用な資料を提供するものと思われる.

b) 集中荷重が載荷する場合

集中荷重が作用する場合, 図-4 に示したように載荷点直下において Negative shear lag が最大となる. そこで, 着目点と載荷点とが一致する $x=c$ の場合について, 付加モーメント m を Pl で無次元化し, パラメーター l/b , および ω, κ による変化を調べたものを 図-9~11 に示す.

これらの図より l/b が小さいほど, ω あるいは κ が大きいほど m/Pl 値が大きくなること

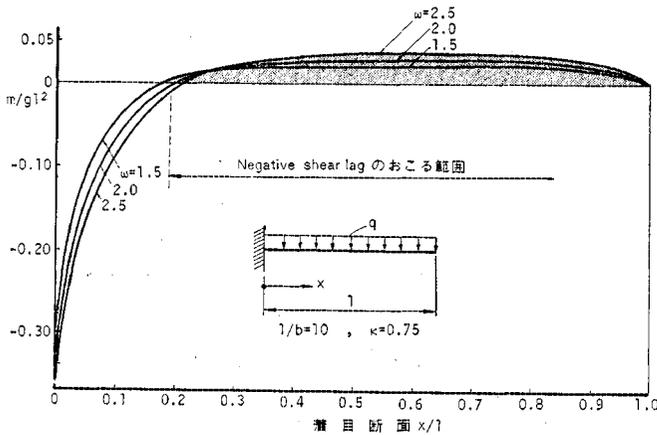


図-6. パラメーター ω による m/ql^2 の変化

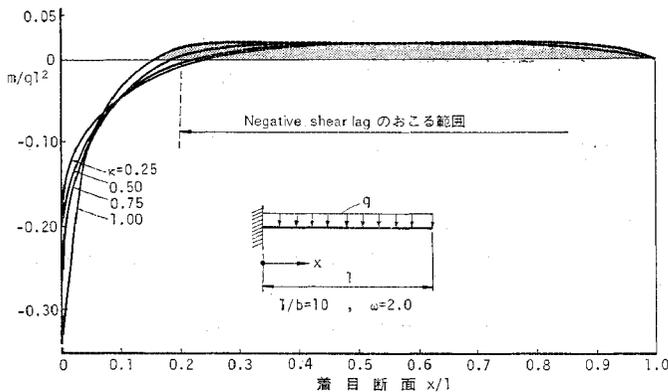


図-7. パラメーター κ による m/ql^2 の変化

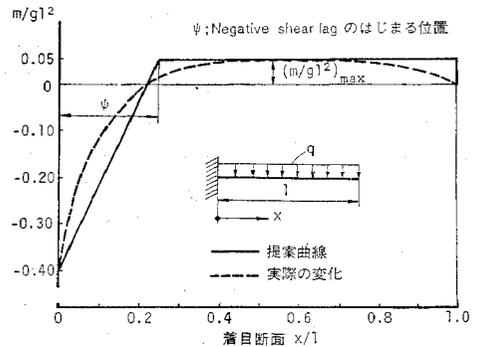


図-8. m/ql^2 曲線に対する提案曲線

表-9 Negative shaer lag のはじまる位置 ψ

l/b		3	5	7.5	10	15	20
$\kappa=0.25$	$\omega=1.5$	0.49	0.38	0.31	0.27	0.20	0.18
	$\omega=2.0$	0.51	0.41	0.33	0.29	0.22	0.20
	$\omega=2.5$	0.55	0.43	0.35	0.31	0.22	0.20
$\kappa=0.50$	$\omega=1.5$	0.45	0.35	0.29	0.23	0.20	0.18
	$\omega=2.0$	0.48	0.38	0.31	0.26	0.21	0.18
	$\omega=2.5$	0.52	0.41	0.33	0.28	0.22	0.18
$\kappa=0.75$	$\omega=1.5$	0.39	0.32	0.24	0.20	0.17	0.13
	$\omega=2.0$	0.44	0.34	0.27	0.22	0.19	0.16
	$\omega=2.5$	0.46	0.36	0.30	0.23	0.20	0.17
$\kappa=1.00$	$\omega=1.5$	0.33	0.24	0.19	0.17	0.11	0.10
	$\omega=2.0$	0.36	0.28	0.21	0.19	0.13	0.10
	$\omega=2.5$	0.38	0.29	0.22	0.20	0.16	0.10

表-10 $(m/ql^2)_{max}$ の値 (等分布荷重)

l/b		3	5	7.5	10	15	20
$\kappa=0.25$	$\omega=1.5$	0.050	0.039	0.024	0.014	0.007	0.004
	$\omega=2.0$	0.048	0.044	0.029	0.019	0.009	0.005
	$\omega=2.5$	0.045	0.047	0.034	0.022	0.011	0.006
$\kappa=0.50$	$\omega=1.5$	0.067	0.045	0.025	0.015	0.007	0.004
	$\omega=2.0$	0.068	0.053	0.032	0.019	0.009	0.005
	$\omega=2.5$	0.066	0.058	0.037	0.024	0.011	0.006
$\kappa=0.75$	$\omega=1.5$	0.093	0.052	0.026	0.015	0.007	0.004
	$\omega=2.0$	0.101	0.064	0.034	0.020	0.009	0.005
	$\omega=2.5$	0.104	0.073	0.041	0.025	0.011	0.006
$\kappa=1.00$	$\omega=1.5$	0.137	0.059	0.027	0.015	0.007	0.004
	$\omega=2.0$	0.164	0.076	0.035	0.020	0.009	0.005
	$\omega=2.5$	0.185	0.092	0.044	0.025	0.011	0.006

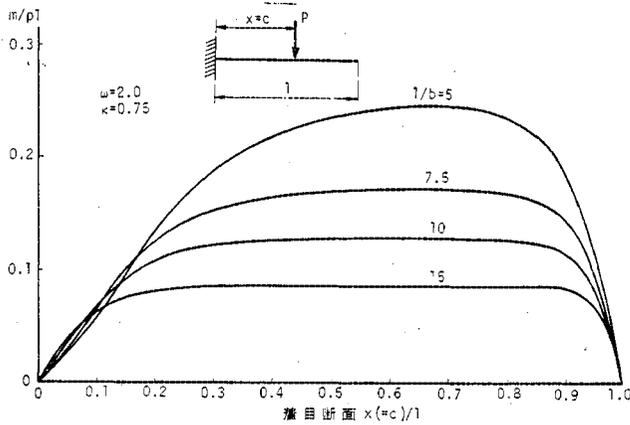


図-9 l/b による m/Pl の変化

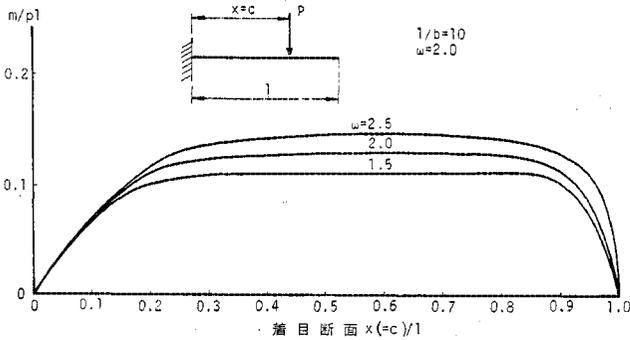


図-10 ω による m/Pl の変化

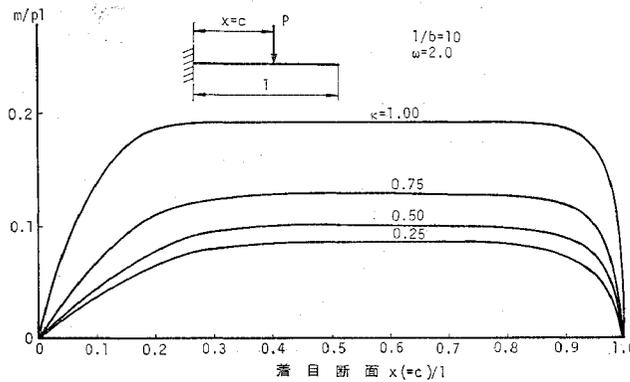


図-11 κ による m/Pl の変化

がわかる。同様に、これらの結果をまとめると、図-12の点線で示す曲線が得られる。そこで、荷重点直下に対する実用的な曲線としては、実線で示す提案曲線で近似することができる。図-12の折曲点 ψ 値は、種々な計算結果より図-8に示した ψ 値とほぼ一致する傾向にあることがわかった。また、 $(m/Pl)_{max}$ 値の各種パラメーターによる変動を計算すると、表-11に示す結果が得られる。

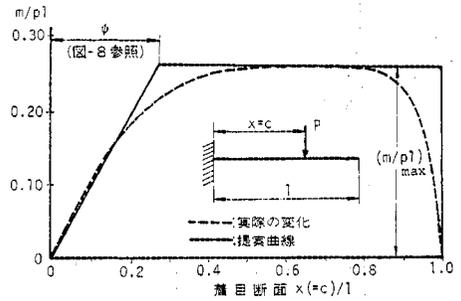


図-12 m/Pl 曲線に対する提案曲線

表-11 $(m/Pl)_{max}$ の値 (集中荷重)

l/b		3	5	7.5	10	15	20
$\kappa=0.25$	$\omega=1.5$	0.169	0.139	0.101	0.077	0.051	0.039
	$\omega=2.0$	0.168	0.151	0.141	0.088	0.059	0.044
	$\omega=2.5$	0.165	0.159	0.125	0.098	0.066	0.050
$\kappa=0.50$	$\omega=1.5$	0.223	0.169	0.119	0.090	0.060	0.045
	$\omega=2.0$	0.229	0.187	0.136	0.103	0.069	0.052
	$\omega=2.5$	0.229	0.200	0.150	0.115	0.077	0.058
$\kappa=0.75$	$\omega=1.5$	0.318	0.219	0.149	0.112	0.075	0.060
	$\omega=2.0$	0.339	0.247	0.171	0.129	0.086	0.065
	$\omega=2.5$	0.349	0.270	0.191	0.144	0.096	0.072
$\kappa=1.00$	$\omega=1.5$	0.539	0.335	0.224	0.168	0.112	0.084
	$\omega=2.0$	0.604	0.385	0.258	0.194	0.129	0.097
	$\omega=2.5$	0.654	0.429	0.289	0.217	0.144	0.108

4. 模型実験

上で述べた Negative shear lag の解析式の妥当性を検討するために、以下のような実験を行った。

(1) 模型桁と実験装置

模型桁は入手が容易な \square 形鋼 (SSC-41 材) に平鋼 (SS 41 材) のフランジを溶接し、図-13に示すような Π 形断面の片持ばりになるように加工した。ただし、縦リブの影響は文献(8)で理論的・実験的に十分検討されているので、ここでは省略した。この片持ばりの端部には Sole plate を溶接し、高力ボルト (F 8 T, M 22) によって既設の構造物実験フレームの柱に

固定した。

荷重は手動の油圧ジャッキ 3 台を用いて載荷し、図-14~17に示すような種々な載荷状態が可能ないようにした。

一方、ひずみゲージ、ダイヤルゲージによって応力やたわみを測定したが、その取付位置は図-13に示すとおりとした。

なお、模型桁の材料試験は今回とくに行っていない

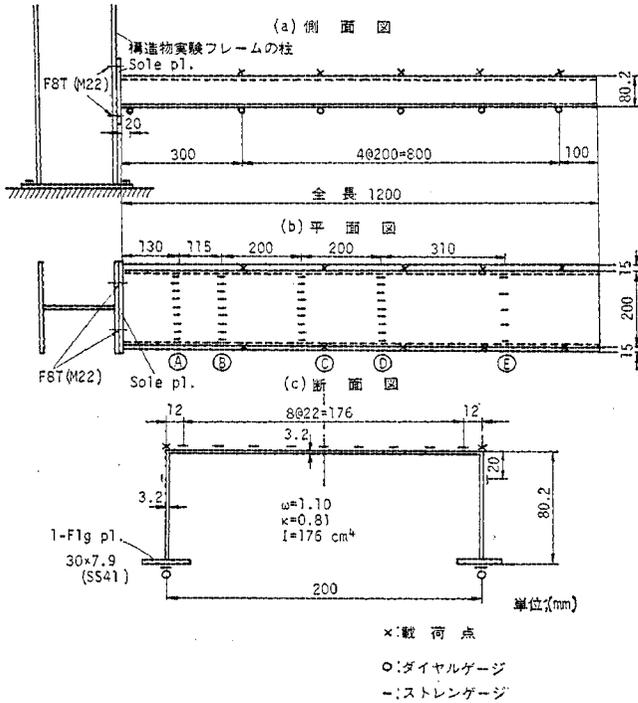


図-13 模型桁

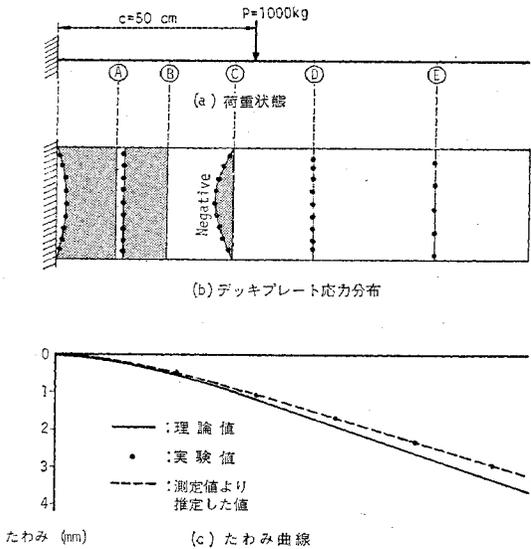


図-14 実測結果 (Case-1)

が、ヤング率 $E=2.1 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ として実験データを整理することにした。

(2) 実験結果とその考察

4 ケースの荷重状態に対して実験した結果を図-14~17 に示す。いずれの場合も、固定端近傍の応力分布は、Sole plate を通じてフレームの柱にボルト結合したた

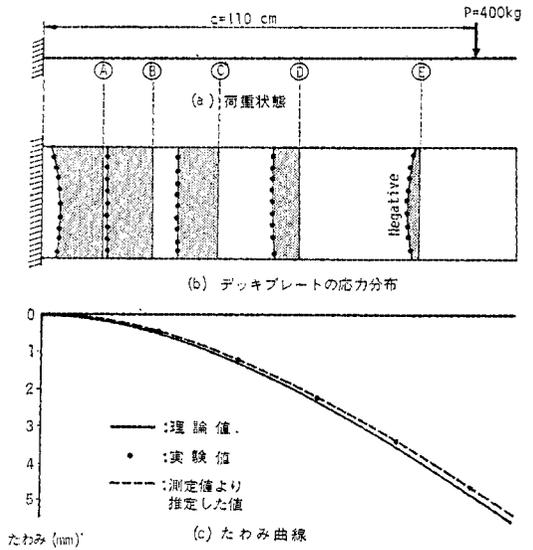


図-15 実測結果 (Case-2)

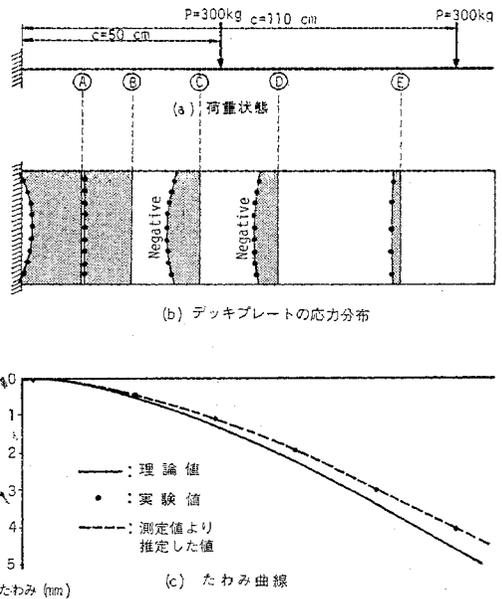
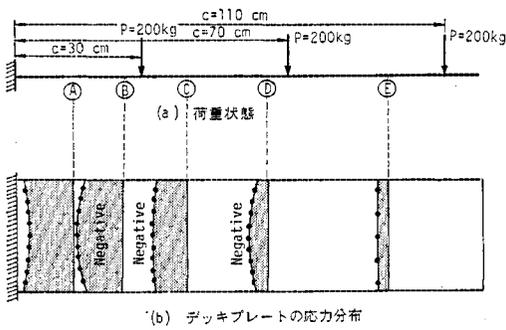


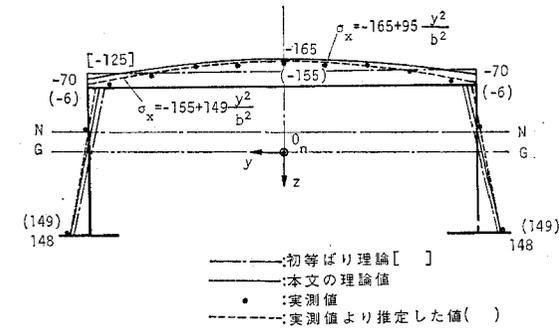
図-16 実測結果 (Case-3)

め応力の乱れが出たのでここでは省略したが、固定端から桁高以上離れた断面 (A) では St. Venant の原理により応力の乱れが消滅し、通常の shear lag 現象が生じていることが観察される。しかし、断面 (B)~(E) においては理論で示したような反転現象が生じ、Negative shear lag 現象が観察される。特に、この現象は荷重点の多い Case 3~Case 4 で顕著である。

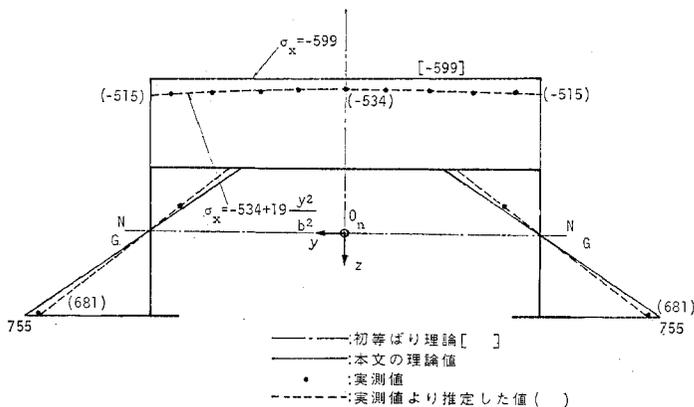
また、これらの図中にはたわみの測定値 (両側ウェブの平均値) と理論値とを比較したものを示した。ただし、ここでたわみの測定値には固定端となっている柱の



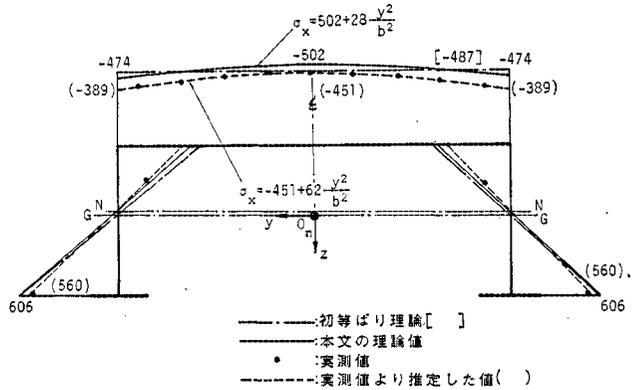
図一七 実測結果 (Case-4)



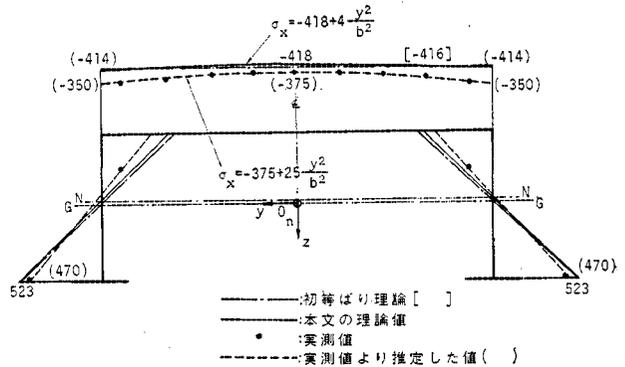
図一八 垂直応力分布 (Case-1)



図一十九 垂直応力分布 (Case-2)



図一二十 垂直応力分布 (Case-3)



図一二十一 垂直応力分布 (Case-4)

弾性変形の影響が現われたので、これを補正するためにたわみ曲線が3次の放物線と仮定して最小自乗法により定数を求め、固定端におけるたわみとたわみ角が共に0となるような修正を行ったものである。一方、理論値のほうにも桁のせん断変形によるたわみを考慮している。以上のような補正をした実測値と理論値とを比較すれば、いずれの場合もよく一致する傾向があると思われる。

次に、桁各部の応力分布の詳細を知るために、断面①内の垂直応力分布をプロットしたものを図一18~21に示す。デッキプレートの実測応力は若干ばらついているので、理論上の仮定³⁾にしたがって2次放物線状に変化するとして最小自乗法で推定値を求めたものも示したが、このような処理を行うと理論値とよく一致した結果が得られているように思われる。

以上、応力分布やたわみの実測値と理論値との比較から、本文の Negative shear lag の解析方法の妥当性が十分に確かめられたように思われる。

5. 連続桁，斜張橋の応力解析への応用

(1) 連続桁

a) 片持式架設中の連続桁

図-22 に示すように，連続桁を片持式架設する際の Negative shear lag による垂直応力を計算する。

置換ばりは 図-23 に示すように片持ばりであり，これに死荷重 $q=4.0\text{ t/m}$ が載荷するものとする。図-22 (b) に示すパラメーター l/b ， ω ， κ 値から Negative shear lag の生ずる位置 ψ を表-9 より求めると $\psi=$

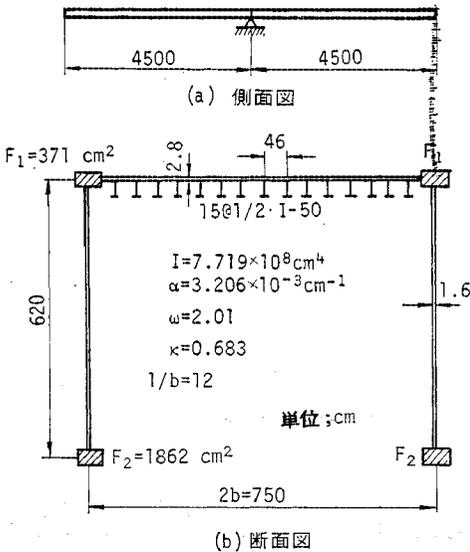


図-22 片持式架設中

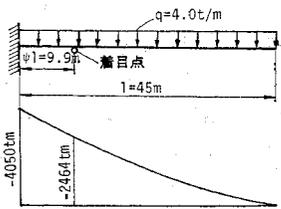


図-23 置換ばり

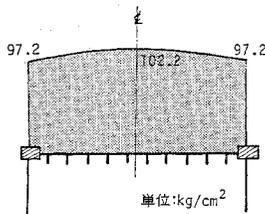


図-24 垂直応力 σ_x の分布

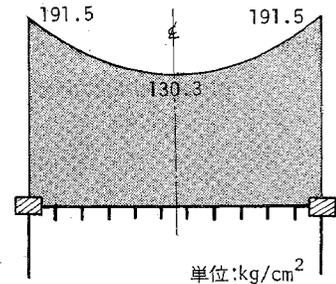


図-25 垂直応力 σ_x の分布 ($x=0$)

0.22, すなわち着目点 $x=\psi l=9.9\text{ m}$ となる。また，表-10 より， $(m(x)/ql^2)_{\max}=0.015$ であるから着目点における付加モーメントは $m=122\text{ tm}$ となる。初等ばり理論によるこの点のモーメントは $M=-2464\text{ tm}$ であるので，式 (27)，(28) より $\sigma_m=102.2\text{ kg/cm}^2$ ， $\sigma_s=5.0\text{ kg/cm}^2$ が得られ，垂直応力分布を式 (29) にしたがってプロットすれば 図-24 のようになる。

なお，参考までに片持ばり固定端の有効幅の算定公式は，定義式 $b_m = \int_0^b \sigma_x dy / [\sigma_x]_{y=b}$ より次式のように書くことができる。

$$\frac{b_m}{b} = 1 - \frac{2m(x)}{3M(x) + 2\kappa m(x)} \dots\dots\dots (38)$$

それで，固定端においては式 (32.1)，(35.1) より，それぞれ $M=-4050\text{ tm}$ ， $m=-1515\text{ tm}$ であるから，式 (38) より有効幅を求めると $b_m/b=0.787$ になる。ところで，Merrison 委員会の I.D.R⁹⁾ によると片持ばりの有効幅は，そのスパンを2倍とした単純ばりに置換して求めることを提案している。この提案にしたがって片持ばり固定端の有効幅を文献 8) より求めてみると， $b_m/b=0.801$ となり，その誤差は1.8%にすぎない。したがって，片持ばりの固定端においてはスパンを2倍し，単純ばりの有効幅の公式を利用してあまり大きな誤差が生じないものと思われる。

図-25 には固定端における垂直応力分布を示す。

b) 不等スパン連続桁

図-26 に示すように著しい不等スパンを有する4径間連続桁に等分布満載荷重が作用する場合を考える。この場合は第3径間の支点が近接しているために，第3支間中央においては負の曲げモーメントが卓越し，Negative shear lag が生ずる。

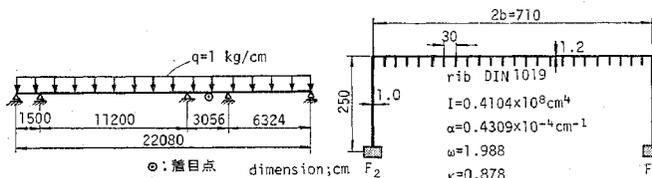


図-26 4 径間連続桁

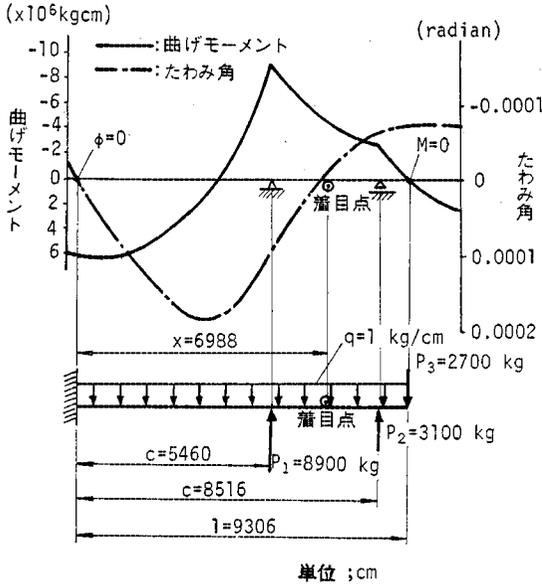
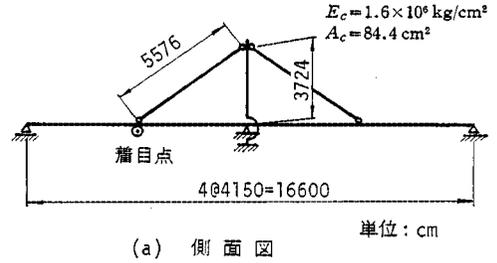
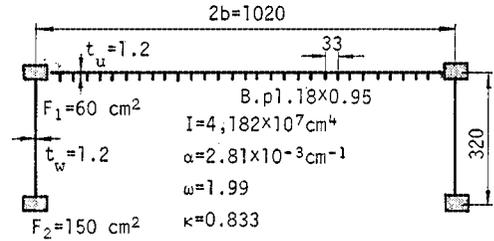


図-27 置換ばり



(a) 側面図



(b) 断面図

図-29 斜張橋

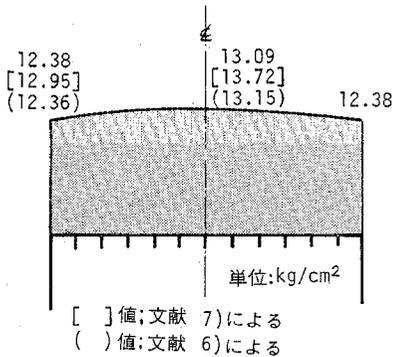


図-28 垂直応力 σ_x の分布

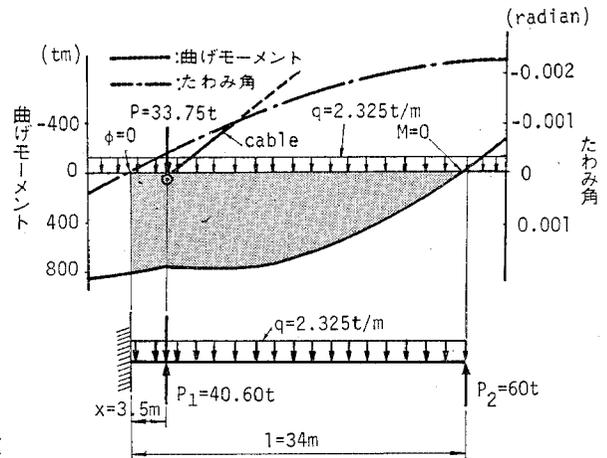


図-30 置換ばり

これを明らかにするために、まず連続桁に等分布荷重 q が載荷する際に対し、図-27 に示すようにたわみ角図と曲げモーメント図をプロットする。すると、この連続桁はたわみ角 $\phi=0$ となる点を固定端とし、曲げモーメント $M=0$ となる点を自由端とする片持ばりに置換することができる。もちろん、中間支点反力 P_1, P_2 、および $M=0$ 点におけるせん断力 P_3 を集中荷重として作用させておかなければならない。次に、各荷重による着目断面の付加モーメント m を式(35)より求めると次のようになる。すなわち、 $m_{p1} = -1.47 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ 、 $m_{p2} = -0.23 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ 、 $m_{p3} = 0$ 、 $m_q = 25.05 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ となり、全付加モーメントは $m = 23.35 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ となる。一方、曲げモーメントは $M = -420.74 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ であるから式 (32) より、 $\sigma_m = 13.09 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_s = 0.71 \text{ kg/cm}^2$ となる。図-28 は第3 径間中央の着目断面におけるデッキプレートの垂直応力の分布を示したも

のであり、Negative shear lag が発生していることがわかる。また、文献 (6)、(7) による計算値も図中に示してあるが、良好な一致がみられ、上述のように連続桁を片持ばりに置換する方法が妥当であるように思われる。

(2) 斜張橋

a) 例 1

図-29 は斜張橋の側面図と断面図を示したものである¹⁰⁾。斜張橋のケーブル取付点に最も不利となるような L 荷重を載荷したときのたわみ角と曲げモーメントを図-30 に示す。連続桁と同様にたわみ角 $\phi=0$ 点を固定端とし、曲げモーメント $M=0$ 点を自由端とする片持ばりに置換する。もちろん、ケーブル取付点でのばね

反力, および $M=0$ 点でのせん断力を荷重として作用させる. そして, 同様な計算過程によって求められたケーブル取付点右側の断面における垂直応力の分布を図-31 に示す. ただし, 軸力による垂直応力は別途計算して, 曲げによる垂直応力に加算した. この図から明らかなように, この斜張橋のケーブル取付点には Negative shear lag が生じる. また, 本文の方法で求めた垂直応力は文献 7) の方法によるものとよく一致することがわかる.

b) 例 2

図-32 に示すような豊里大橋¹¹⁾の断面諸量を参考にし, ケーブルの多数ある斜張橋のケーブル取付点におけるデッキプレートの垂直応力の計算例を示す. まず, 着目点 1 に最も不利な応力状態になるように, L 荷重を載荷した際の断面力・変形量を文献 11) の方法で求め, 片

持ばりに置換したものを 図-33 に示す. また, デッキプレートの垂直応力の分布を 図-34 にプロットした. 同様に着目点 2, および, 3 に関する置換ばりとデッキプレートの垂直応力の分布図を, それぞれ 図-35, 36 に示す.

以上の計算結果より着目点 1, 2 では通常の Shear lag が生じているが, 着目点 3 においては Negative shear lag が生じていることがわかる. このようにケーブルが多数取付けられた斜張橋では, 必ずしも Negative shear

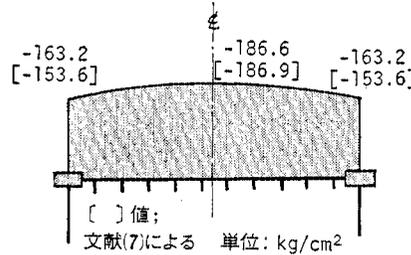


図-31 垂直応力 σ_x の分布

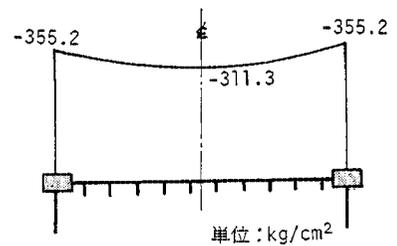


図-34 垂直応力 σ_x の分布 (着目点 1)

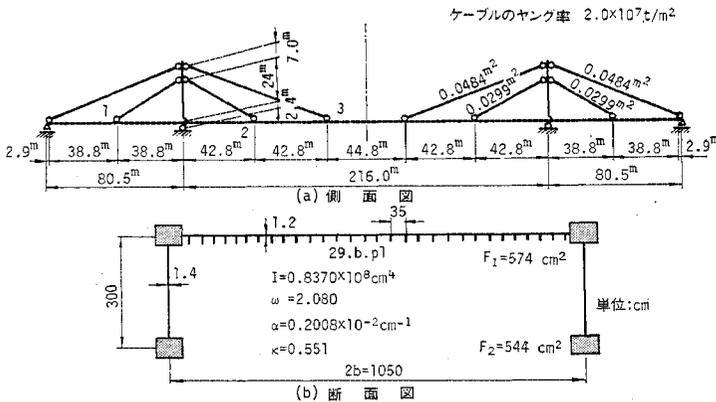


図-32 斜張橋

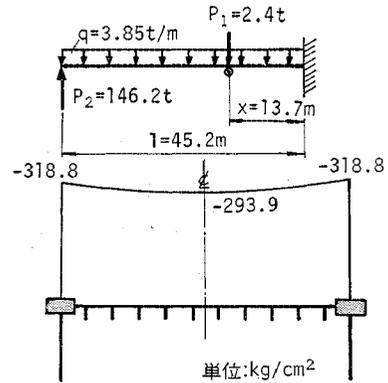


図-35 置換ばりと垂直応力 σ_x の分布 (着目点 2)

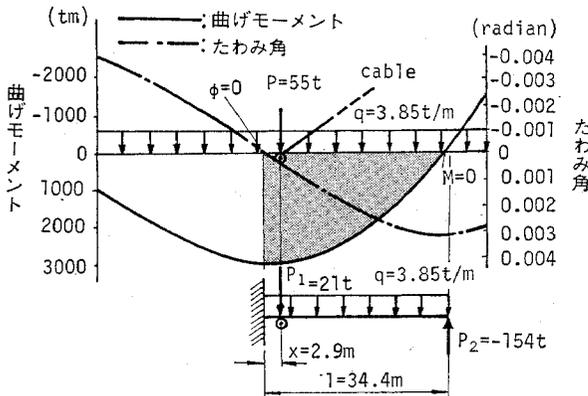


図-33 置換ばり (着目点 1)

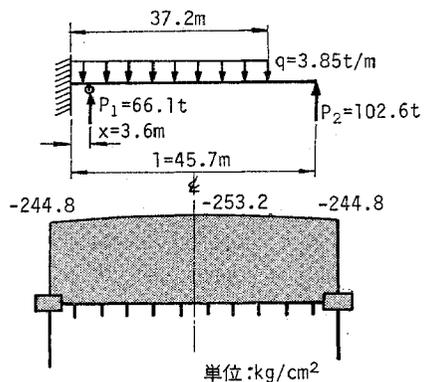


図-36 置換ばりと垂直応力 σ_x の分布 (着目点 3)

lag が生じるとはかぎらない。しかし、ザイル取付点で生じた通常の Shear lag は連続桁の中間支点のところに生じるものよりかなり緩和されたものであり、斜張橋を設計する際このような点を十分考慮すべきであると考える。

6. む す び

本文は、片持ばりに生ずる Negative shear lag の特性を明らかにし、この結果を連続桁や斜張橋の応力解析に応用する方法を述べたものである。おもな結論を列記すると、以下のようである。

(1) 片持ばりに各種の荷重が載荷する際の Shear lag 現象を解析する基本公式を示した。

(2) 片持ばりの Negative shear lag がおこる範囲や最大値の変化状態をパラメトリック解析し、実用計算に便利な図表にまとめた。

(3) 模型実験を行い、本文の理論上の仮定や解析結果の妥当性を確かめた。

(4) 橋梁構造物として使用される機会の多い連続桁橋や斜張橋において Negative shear lag が生ずることを数値計算例によって示した。

以上によって、この種の構造物を設計する際、今後は通常の Shear lag のほかに Negative shear lag を考

慮すべきであることを示すことができ、これに関する一つの資料が提供できたものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity 3rd, Ed, McGraw-Hill, pp. 262~268, (1970)
- 2) Girkmann, G. : Flächentragwerke, Dritte Auflage, Springer-Verlag, s. 116~124, (1954)
- 3) Reissner, E. : Quart. Appl. Math., Vol. 4, p. 268, (1946)
- 4) Kuhn, P. : Stresses in Aircraft and Shell Structures, McGraw-Hill, p. 139, (1956)
- 5) 林 孝哉 : 日本航空宇宙学会誌, Vol. 22, No. 243, pp. 194~199, (1974.4)
- 6) 小松定夫 : 連続桁の Shear lag について, 土木学会論文集 58 号, pp. 1~9, (1958.9)
- 7) 中井 博・冨口寿男 : 伝達マトリックス法による鋼床版桁橋の有効幅の解析, 土木学会論文報告集, pp. 29~44, (1976.7)
- 8) 近藤和夫・小松定夫・中井 博 : 鋼床版桁橋の有効幅に関する研究, 土木学会論文集 86 号, pp. 1~17, (1962.10)
- 9) Inquiry into the Basis of Design and Method of Erection of Steel Box Girder Bridge, Interium Design and Workmanship Rules, Part I and Part II, London, Her Majesty's Stationery Office, (1973)
- 10) 田村周平・苗吹昭光・出野 宏 : 尾道大橋の設計について, 橋梁, Vol. 4, pp. 53~67, (1968.6)
- 11) Nakai, H. and Nakanishi, M. : Statical Analysis of Cable-Stayed Girder Bridges, Memoirs of the Faculty of Engineering, Osaka City University, Vol. 12, pp. 197~218, (1971.12)

(1976.2.16・受付)