

## 伝達マトリックス法による吊橋の構造解析\*

### STRUCTURAL ANALYSIS OF SUSPENSION BRIDGES BY TRANSFER MATRIX METHOD

中井 博\*\*・野口 二郎\*\*\*

By Hiroshi NAKAI and Jiro NOGUCHI

#### 1. ま え が き

長大吊橋の構造解析の基礎となるたわみ理論が、Melan<sup>1)</sup>によって導かれ、その解法が Steinman<sup>2)</sup>、Timoshenko<sup>3)</sup>によって論じられ、さらに Bleich<sup>4)</sup>らによる線形化したたわみ理論の近似的解法が示されてから吊橋の実用計算法に関する研究が多くの研究者によって扱われてきている。たとえば、Peery<sup>5)</sup>による影響線解法や Hawranek・Steinhardt<sup>6)</sup>の著書に見られるような Green 関数を利用した実用計算法は、設計にもよく利用されているものである。ところが、最近の電子計算機の使用の普及に伴って、たわみ理論固有の非線形方程式を忠実に解くという努力が再び試みられるようになり、1966年にリスボンで開かれた吊橋に関する国際会議(IABSE)を契機とし、この種の問題を取り扱った研究<sup>7)</sup>が活発に行われてきている。

わが国でも、海峡を渡る長大吊橋が古くから試案されてきており、それらの計画を推進するための優れた論文が提示されている。これらの論文の中でも、吊橋に鉛直荷重が作用する場合の研究にしばれば<sup>8)</sup>、倉西<sup>9)</sup>、<sup>10)</sup>による三連モーメント式を出発点としたマトリックス構造解析法、島田<sup>11)</sup>の積分方程式に立脚した実用的解法、福田<sup>12)</sup>の連続吊橋を対象とした階差式による解法、あるいは小西・白石・飯田<sup>13)</sup>による斜めハンガーを有する吊橋、松本<sup>14)</sup>による副ケーブルを有する連続吊橋、後藤の有限変形法<sup>15)</sup>を用いた一連の研究などがある。

ところで、吊材を連続体とみなすいわゆる膜理論を用い、近代的なマトリックス構造解析法の一つ伝達マトリックス法により解析した注目すべき研究として、

Esslinger<sup>16)</sup>の文献があげられる。この方法は周知のとおり、①簡明な伝達行列と境界条件を表わす行列との掛算で解析でき、②未知数は変形法や階差式のように部材数に比例して増大せず、橋端の初期条件と中間の境界条件のみに左右される。③しかも、変断面の補剛桁を有する吊橋の取り扱いも容易で、④連続吊橋、タワーステーなどを有する各種の構造形式の吊橋にも拡張できる。⑤さらに、非線形方程式を繰り返して計算によって解くことも容易である。

その反面、吊橋の格間行列の要素内には、基礎式の特性から双曲線関数で表わされる項が混在し、それによる計算精度の劣化が生ずるおそれもある。すなわち、吊橋の静的特性を表わす Steinman の補剛係数の逆数  $1/S = cl = \sqrt{H/EI} \cdot l$  ( $H$ : ケーブル張力,  $EI$ : 補剛桁の曲げ剛度,  $l$ : スパン長) は、Pugsly<sup>17)</sup> や平井・伊藤<sup>18)</sup>によると、長大吊橋の場合、 $cl = 20 \sim 30$ にも達することが明らかにされている。すると、これに伴い双曲線関数項  $\sinh cl$ ,  $\cosh cl$  値は非常に大きい値をとり、マトリックス演算中の桁落ちなどによって所要の計算精度が確保されない場合も起こりうるものが考えられる。Esslinger は、このような欠陥が生じないように、吊橋をスパン中央点で切断し、 $cl$  値を半減させて左端から中央へ、また右端から中央へと演算を進め、吊橋中央点における連続条件より未知量を求めている。そして、求められた未知量を用いて各格点の断面力・変位量を求める際、中央点に生じた誤差は繰り返して計算によって再配分を行っている。したがって、プログラム化がかなり繁雑となり、未知数も多く伝達マトリックス法の本来の利点が十分に活かされていないように思われる。

この種の双曲線関数項を含む伝達マトリックスの問題に対し、著者らは文献 19) で明らかにしたように双曲線関数項を分離・単位化する方法を提案したが、吊橋に対してもこの方法を適用し、上述のような欠点を改良すると同時に、実用計算に供する伝達マトリックス法による

\* 第30回土木学会年次学術講演会にて一部発表 (I-199, 昭和50.10)

\*\* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部 土木工学科

\*\*\* 正会員 工修 総合技術コンサルタント(株)

吊橋の構造解析法を明らかにすることは有意義であると考える。本文は、これらの取り扱いについて詳しく述べるものである。

一方、活荷重によるケーブルの水平張力  $H_p$  は従来ケーブル方程式より別途に求められていたが、これらも伝達マトリックスの中に組み入れるようにした。そして、元来非線形である  $H_p$  の値を逐次近似法で求めるための公式を Newton-Raphson 法で導くことにする。さらに、実際の設計に便利のように制約つき影響線を求め、これを用いて最大断面力や変形量を自動的に求める方法を述べ、二、三の構造形式の吊橋に対する数値計算結果を示す。

最後に、小形の吊橋模型による静的載荷実験を行う機会を得たので、本文の方法による解析結果と実測値とを比較し、鉛直荷重を受ける吊橋の静的挙動について種々考察を行うものである。

## 2. 双曲線関数項を分離・単位化した伝達マトリックス法

### (1) 基礎方程式

Melan<sup>1)</sup> によって示された吊橋補剛桁のたわみ  $\eta$  に関する基礎微分方程式は、よく知られているように次式で表わされる (図-1 参照)。

$$EI \frac{d^4 \eta}{dx^4} - (H_w + H_p) \frac{d^2 \eta}{dx^2} = q(x) - \frac{1}{r} H_p \dots (1)$$

ここに、

$\eta$ : 補剛桁のたわみ

$r = -1/y''$ : スパン中央におけるケーブルの曲率半径 ( $r = d^2/dx^2$ )

$EI$ : 補剛桁の曲げ剛度

$q(x)$ : 活荷重強度

$H_w$ : 死荷重によるケーブル水平張力

$H_p$ : 活荷重によるケーブル水平張力

式 (1) の  $H_p$  は未知であるが、これを定めるためには次のケーブル方程式を満足させなければならない。

$$H_p \frac{LH}{E_c A_c} + \alpha_t \cdot t \cdot L_T - \frac{1}{r} \int_l \eta dx = 0 \dots (2)$$

ここに、

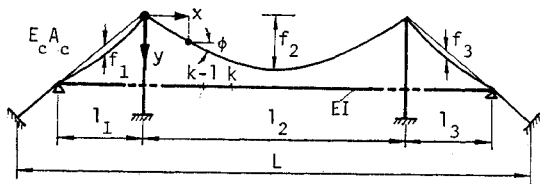


図-1 吊橋の一般寸法

$$\left. \begin{aligned} L_H &= \int_L \sec^3 \phi dx \\ L_T &= \int_L \sec^2 \phi dx \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ただし、

$l$ : 補剛桁の全長 ( $=l_1+l_2+l_3$ )

$L$ : ケーブル・アンカー間の距離

$E_c A_c$ : ケーブルの伸び剛度

$\alpha_t t$ : ケーブルの温度によるひずみ

さて、活荷重によるケーブルの水平張力  $H_p$  が既知であり、

$$H = H_w + H_p \dots (4)$$

すなわち

$$c = \sqrt{\frac{H}{EI}} \dots (5)$$

が定められたものとする。すると、基礎式 (1) よりたわみ  $\eta$ 、たわみ角  $\varphi = \eta' (=d\eta/dx)$  が求められ、曲げモーメント  $M$  とせん断力  $Q$  とは次式によって決めることができる。

$$\left. \begin{aligned} M &= -EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} \\ Q &= -EI \frac{d^3 \eta}{dx^3} \end{aligned} \right\} \dots (6 \cdot a, b)$$

図-2 には、図-1 の格点  $k-1$  と  $k$  との間のパネル  $k$  (長さ  $l_k$ 、曲げ剛度  $EI_k$ ) に作用する断面力 (符号は一般構造力学の定義に従う) と変形状態を示す。

ところで、図-2 に示した水平変位  $\xi$  はケーブル要素そのものの水平変位ではなく、補剛桁のたわみ  $\eta$  による塔頂の水平変位  $\delta$  (後述する) のパネル  $l_k$  における成分を意味する。すなわち、 $\xi$  はケーブル方程式 (2) の左辺第 3 項であり、次のように定義されるものである。

$$\xi_{l,k} = -\frac{1}{r} \int_0^{l_k} \eta_k(x_k) dx_k + \xi_{0,k} \dots (7)$$

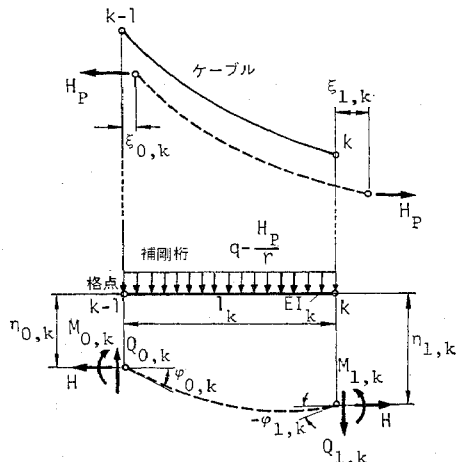


図-2 吊橋要素の変形量と断面力

以上、式 (1), (4)~(7) より 図-2 のパネル  $k$  の左端 (0) の状態ベクトル  $y_{0,k} = \{\xi \eta \varphi M Q H_p 1\}_{0,k}$  を用いて、パネル  $k$  の右端 ( $l$ ) の状態ベクトル  $y_{l,k} = \{\xi \eta \varphi M Q H_p 1\}_{l,k}$  を求めると次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varphi \\ M \\ Q \\ H_p \\ 1 \end{bmatrix}_{l,k} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l}{r} & -\frac{1}{r} \frac{l^2}{2} & \frac{1}{Hr} \left( \frac{\sinh cl}{c} - l \right) & \frac{1}{Hr} \left( \frac{\cosh cl}{c^2} - \frac{l^2}{2} - \frac{1}{c^2} \right) \\ 0 & 1 & l & -\frac{1}{H} (\cosh cl - 1) & -\frac{1}{H} \left( \frac{\sinh cl}{c} - l \right) \\ 0 & 0 & \cosh cl & -\frac{c}{H} \sinh cl & -\frac{1}{H} (\cosh cl - 1) \\ 0 & 0 & -\frac{H}{c} \sinh cl & \cosh cl & \frac{1}{c} \sinh cl \\ 0 & 0 & 0 & c \sinh cl & \cosh cl \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Hr^2} \left( \frac{\sinh cl}{c^3} - \frac{l^2}{6} - \frac{l}{c^2} \right) & -\frac{q}{Hr} \left( \frac{\sinh cl}{c^3} - \frac{l^2}{6} - \frac{l}{c^2} \right) \\ -\frac{1}{Hr} \left( \frac{\cosh cl}{c^2} - \frac{l^2}{2} - \frac{1}{c^2} \right) & \frac{q}{H} \left( \frac{\cosh cl}{c^2} - \frac{l^2}{2} - \frac{1}{c^2} \right) \\ -\frac{1}{c \cdot Hr} (\sinh cl - cl) & \frac{q}{cH} (\sinh cl - cl) \\ \frac{1}{c^2 r} (\cosh cl - 1) & -\frac{q}{c^2} (\cosh cl - 1) \\ \frac{1}{cr} \sinh cl & \frac{q}{c} \sinh cl \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varphi \\ M \\ Q \\ H_p \\ 1 \end{bmatrix}_{0,k} \quad \dots \quad (8)$$

Esslinger の論文では、上式中点線で囲んだ要素は考えず、また右辺のマトリックスの  $H_p$  がかかる第 6 列目の要素は荷重項として組み入れているが、 $(\xi, H_p)$  を一組の共役ついでとして考慮したほうが利点があるので、本文では式 (8) を基礎式とすることにする。

(8) 双曲線関数項の分離と単位化

まえがきで述べたように、 $cl$  値が大きいき式 (8) 中の双曲線関数で与えられた要素の値は、他の項と比べると非常に大きくなり、そのままの形でマトリックス乗算を続行すると、演算誤差が集積する原因となる。そこで、次のような操作を行う。

a) 双曲線関数項の分離

伝達マトリックスは、式 (8) に示したように部材左端の変位量・断面力などの物理量を右端に伝えるものであるが、変位量と断面力とを組み合わせて改めて定義した物理量を伝達しても一般性が失われることはない。そこで、次のような物理量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \text{ケーブルの変換水平変位} : u &= \xi + \frac{1}{c^2 r} \cdot \varphi \\ \text{補剛桁の変換たわみ} : w &= \eta + \frac{M}{H} \\ \text{補剛桁の変換せん断力} : S &= Q + H \cdot \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9 \cdot a \sim c)$$

すると、式 (8) は次のように変換することができる。

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \\ M \\ S \\ H_p \\ 1 \end{bmatrix}_{l,k} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l}{r} & 0 & 0 & -\frac{1}{Hr} \cdot \frac{l^2}{2} & -\frac{1}{Hr^2} \cdot \frac{l^3}{6} & \frac{q}{Hr} \cdot \frac{l^3}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{H} \cdot l & \frac{1}{Hr} \cdot \frac{l^2}{2} & -\frac{q}{H} \cdot \frac{l^2}{2} \\ 0 & 0 & \cosh cl & -\frac{c}{H} \sinh cl & -\frac{1}{H} (\cosh cl - 1) & -\frac{1}{cHr} (\sinh cl - cl) & \frac{q}{cH} (\sinh cl - cl) \\ 0 & 0 & -\frac{H}{c} \sinh cl & \cosh cl & \frac{1}{c} \sinh cl & \frac{1}{c^2 r} (\cosh cl - 1) & -\frac{q}{c^2} (\cosh cl - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l}{r} & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \\ M \\ S \\ H_p \\ 1 \end{bmatrix}_{0,k} \quad \dots \dots \dots (10)$$



次に式 (17) に格点行列  $\tilde{P}_k$  を乗ずるとパネル  $k+1$  左端における状態ベクトル  $\tilde{y}_{0,k+1}$  が得られる。

$$\tilde{y}_{0,k+1} = \tilde{P}_k \tilde{y}_{l,k} = \tilde{Y}_{0,k+1} y_{0,1} \dots \dots \dots (19)$$

状態マトリックス  $Y_{0,k+1}$  は、しかしながら次式のよ  
うに表わしておく。

$$\tilde{Y}_{0,k+1} = \begin{bmatrix} u_{0,1} & w_{0,1} & \varphi_{0,1} & M_{0,1} & S_{0,1} & H_p & 1 \\ 1 & -\frac{kl}{r} & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ \dots \dots \dots \text{式 (18) と同じ} \dots \dots \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1/\cosh^k cl \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} l/r \\ l/r \cosh^k cl \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} -qkl \\ -qkl/\cosh^k cl \end{array} \right\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1/\cosh^k cl \end{array} \right\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1/\cosh^k cl \end{array} \right\} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (20)$$

すると、 $\tilde{Y}_{0,k+1}$  に  $\tilde{F}_{k+1}$  を乗じる際、第 5~7 行目の要素は { で示すように元の値とそれを  $\cosh^k cl$  で割ったものを考え、 $\tilde{Y}_{l,k+1}$  の第 1~2, 5~7 行目の要素の計算は元の値を用い、第 3, 4 行目の要素は元の値を  $\cosh^k cl$  で割った値を用いて次々と計算を進めていくことができる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi^* \cdot \frac{P_c l_c^2}{EI_c}, \quad M = M^* \cdot P_c c_c l_c^2 \\ S &= S^* \cdot P_c c_c^2 l_c^2, \quad H_p = H_p^* \cdot P_c c_c^2 l_c^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21 \cdot a \sim f)$$

および

$$\left. \begin{aligned} P &= P^* \cdot P_c c_c^2 l_c^2 \\ q &= q^* \cdot P_c c_c^2 l_c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22 \cdot a, b)$$

(3) 無次元化

伝達マトリックス法では、変位量と断面力とが混在し、しかもそれらの次元が著しく異なる。それで、計算精度の向上をはかるために、次のような無次元化を行うことにする。

ここに、添字  $c$  をつけた量は、いずれも基準量を示す ( $P_c$ : 基準荷重,  $l_c$ : 基準パネル長,  $I_c$ : 補剛桁の基準断面 2 次モーメント)。また、第  $k$  パネルにおける断面諸定数には、すべて添字  $k$  をつけて表わすことにする。たとえば、

$$u = u^* \cdot \frac{P_c l_c^3}{EI_c}, \quad w = w^* \cdot \frac{P_c l_c^3}{EI_c}$$

$$c_k = \sqrt{\frac{H}{EI_k}} \dots \dots \dots (23)$$

などと表わし補剛桁の断面 2 次モーメントを  $I_c$  にとつ

$$\tilde{F}_k^* = \begin{bmatrix} 1 & -\left(\frac{l_k}{r_k}\right) & 0 & 0 & -\left(\frac{l_k}{2r_k}\right) \cdot \left(\frac{l_k}{l_c}\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{l_k}{l_c} \\ 0 & 0 & 1 & -\left(\frac{c_k}{c_c}\right) \tanh c_k l_k & -\left(1 - \frac{1}{\cosh c_k l_k}\right) \\ 0 & 0 & -\left(\frac{c_c}{c_k}\right) \tanh c_k l_k & 1 & \left(\frac{c_c}{c_k}\right) \tanh c_k l_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots \dots \dots \\ -\frac{1}{6} \left(\frac{l_k}{r_k}\right)^2 \left(\frac{l_k}{l_c}\right) & \frac{q_k^*}{6} \left(\frac{l_k}{r_k}\right) \left(\frac{l_k}{l_c}\right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{l_k}{r_k}\right) \left(\frac{l_k}{l_c}\right) & -\frac{q_k^*}{2} \left(\frac{l_k}{l_c}\right)^2 \\ -\left(\frac{1}{c_k r_k}\right) \left(\frac{\sinh c_k l_k - c_k l_k}{\cosh c_k l_k}\right) & \frac{q_k^*}{(c_k l_c)} \left(\frac{\sinh c_k l_k - c_k l_k}{\cosh c_k l_k}\right) \\ \left(\frac{c_c}{c_k}\right) \left(\frac{1}{c_k r_k}\right) \left(1 - \frac{1}{\cosh c_k l_k}\right) & -q_k^* \left(\frac{c_c}{c_k}\right) \left(\frac{1}{c_k l_c}\right) \left(1 - \frac{1}{\cosh c_k l_k}\right) \\ \left(\frac{l_k}{r_k}\right) & -q_k^* \left(\frac{l_k}{l_c}\right) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (24)$$

たときの  $c$  値を  $c_c$  と書くことにする。

すると以上の式によって無次元化された格間行列  $\tilde{F}_k^*$  は式(24), 格点行列  $\tilde{P}_k^*$  は式(25) のように与えられる。

$$\tilde{P}_k^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \epsilon_{1,3}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{P_k}{P_c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots(25)$$

ここに,

$$\epsilon_{1,3}^* = \left\{ \frac{1}{(c_{k+1}r_{k+1})(c_{k+1}l_c)} - \frac{1}{(c_k r_k)(c_k l_c)} \right\} \cdot \prod_{i=1}^k \cosh c_i l_i$$

$$\left( \prod_{i=1}^k \cosh c_i l_i = \cosh c_1 l_1 \cdot \cosh c_2 l_2 \cdots \cosh c_k l_k \right)$$

.....(26)

である。このように  $\epsilon_{1,3}^*$  には双曲線関数項がかかっているが、等断面の補剛桁を有する吊橋では  $\epsilon_{1,3}^* = 0$  で

あり、その他の場合でも一般に  $\epsilon_{1,3}^*$  は微少項であるから特別な処理は不要であると思われる ( $cl$  値が著しく大きくなる場合は後述すると同様な処理をすればよい)。また、式(25) 中で点線や実線内の要素は後述するように中間支点などの特異点において0とすることができる。

(4) 境界条件

吊橋の代表的な構造形式を 図-3 に示す。図-3 (a) は単径間の補剛桁を有する吊橋で、図-3 (b) は多径間2ヒンジ補剛桁、あるいは連続補剛桁を有する吊橋を示したものである。

これらの吊橋に対するケーブルの換算長  $L_H, L_T$  は図中の記号を参照にすると、表-1 のように与えられる。

すると、補剛桁の右端  $n$  の状態ベクトルは、式(16・a), (24)~(25) より、次のようになる。

$$\tilde{y}_{1,n}^* = \tilde{F}_n^* \tilde{P}_{n-1}^* \tilde{F}_{n-1}^* \tilde{P}_{n-2}^* \cdots$$

$$\tilde{P}_k^* \tilde{F}_k^* \cdots \tilde{P}_1^* \tilde{F}_1^* \mathbf{y}_{0,1}^* \dots(27)$$

したがって、桁の左端、中間、右端における境界条件および、式(2) のケーブル方程式より未知量を求めれば、吊橋全体の構造解析を式(17), (19) によって行うこ

表-1 構造形式によるケーブル長

形 式	ケーブル換算長		公 式	備 考
単 径 間 吊 橋 (図-3(a))	$L_H$	式(3)参照	$L_i \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f_i}{L_i} \right)^2 + \frac{3}{2} \tan^2 \beta_i \right\}$	$m=1$ で $L_1$ のみを考える。
	$L_T$		$L_i \left\{ 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{f_i}{L_i} \right)^2 + \tan^2 \beta_i \right\}$	
多径間2ヒンジ吊橋, または連続吊橋 (図-3(b))	$L_H$	式(3)参照	$L_H = \sum_{i=1}^m L_{H,i}, L_{H,i} = L_i \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f_i}{L_i} \right)^2 + \frac{3}{2} \tan^2 \beta_i \right\}$	図-1 の吊橋に対しては $m=3$ である。
	$L_T$		$L_T = \sum_{i=1}^m L_{T,i}, L_{T,i} = L_i \left\{ 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{f_i}{L_i} \right)^2 + \tan^2 \beta_i \right\}$	

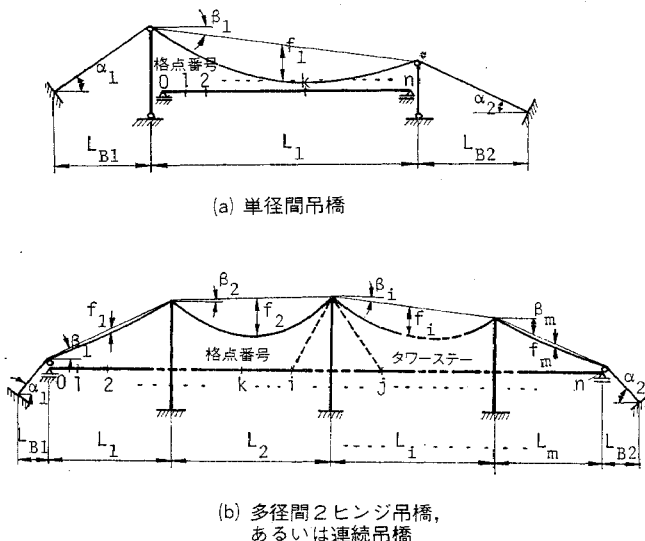


図-3 各種構造形式の吊橋

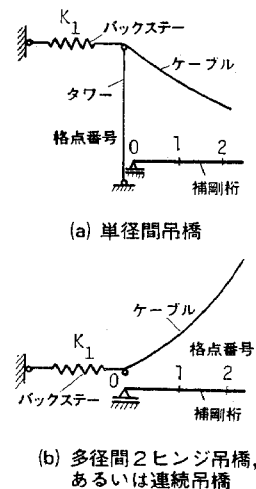


図-4 初期条件

とができる。

a) 初期条件

図-4 は吊橋補剛桁の左端の構造形式を示したものである。補剛桁左端はいずれも単純支持されているので、たわみ  $w_{0,1}=0$ 、および曲げモーメント  $M_{0,1}=0$  である。したがって、これと共役ついをなすたわみ角  $\varphi_{0,1}$  とせん断力  $Q_{0,1}$  が未知である。また、塔頂のケーブル水平変位成分  $\epsilon_{0,1}$  とケーブル張力  $H_p$  も未知である。

ところが、これらの変位量・断面力は、式 (9) に示したように変換しているから、次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_{0,1} &= \frac{\varphi_{0,1}}{c_1^2 r_1} + K_1 H_p + 1 \cdot \Delta_1; H_p \neq 0 \\ w_{0,1} &= 0; S_{0,1} \neq 0 \\ M_{0,1} &= 0; \varphi_{0,1} \neq 0 \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{L_{B1}}{E_c A_c} \cdot \sec^3 \alpha_1 \\ \Delta_1 &= \alpha_1 \cdot t \cdot L_{B1} \cdot \sec^2 \alpha_1 \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

であり、 $K_1$  は図-4 に示すようにバックスターのばね定数を意味し、 $\Delta_1$  はバックスターの温度による伸びを意味する。

すると、 $u_{0,1}$  は  $\varphi_{0,1}$ 、 $H_p$  の関数として表わされることになるから、結局、未知量は  $\varphi_{0,1}$ 、 $S_{0,1}$ 、 $H_p$  の 3 つに

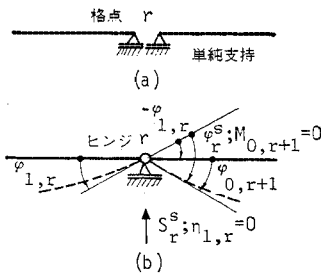


図-5 中間支点 (ヒンジ)

なり、式 (28) をこれらの未知量でマトリックス表示し無次元化すると、初期マトリックス  $Y_{0,1}^*$  は次のように表わされる。

$$Y_{0,1}^* = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{c_1 r_1}\right) \left(\frac{1}{c_1 l_c}\right) & 0 & K_1^* & \Delta_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (30)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_1^* &= \left(\frac{E}{E_c}\right) \left(\frac{L_{B1}}{l_c}\right) \left(\frac{I_c c_c^2}{A_c}\right) \cdot \sec^3 \alpha_1 \\ \Delta_1^* &= \alpha_1 \cdot t \cdot \left(\frac{E I_c}{P_c l_c}\right) \left(\frac{L_{B1}}{l_c}\right) \cdot \sec^2 \alpha_1 \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

また、中間支点の未知量による項は式 (30) に示すように、桁左端ではすべて 0 としておく。

b) 中間条件

まず、図-5(a) に示すように吊橋が格点  $r$  において単純支持されている場合を考える (図-3(b))。この構造系は図-5(b) に置換でき、境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} w_{l,r}^* &= 0 \\ \tilde{M}_{l,r}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

である。 $w_{l,r}^*$ 、 $\tilde{M}_{l,r}^*$  は式 (30) に格間行列や、格点行列を乗じて求められた第  $r$  パネル右端の状態マトリックス  $Y_{l,r}^*$  の第 2, 4 行目の行要素である。

しかしながら、図-5(b) に示すように式 (32) に共役ついをなす未知たわみ角  $\varphi_r^s$  と未知反力  $S_r^s$  が第  $r$  点において発生する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{0,r+1} &= \varphi_{l,r} + \varphi_r^s \\ S_{0,r+1} &= S_{l,r} + S_r^s \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

$$Y_{0,r+1}^* = \begin{bmatrix} \text{初期値の項} & \text{中間未知量} \\ \varphi_{0,1}^* & S_{0,1}^* & H_p^* & 1 & \varphi_r^{s*} & S_r^{s*} & M_r^{s*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{r+1} & 0 & 0 \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & & & & 0 & 0 & 1/(c_c l_c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1/\Pi_1^r & 0 & 0 \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & & & & 0 & 0 & 1/\Pi_1^r \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1/\Pi_1^r \end{array} \right\} & 0 \\ 0 & 0 & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1/\Pi_1^r \end{array} \right\} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1/\Pi_1^r \end{array} \right\} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (34)$$

——— 単径間吊橋

——— 多径間 2 ヒンジ吊橋

$a_{r+1} = 1/(c_{r+1} r_{r+1})(c_{r+1} l_c)$

——— 連続吊橋

$a_{r+1} = 1/(c_{r+1} r_{r+1})(c_{r+1} l_c) - 1/(c_r r_r)(c_r l_c)$

したがって、式(32),(33)の条件を用いて格点行列を修正すると、式(25)に示したように、実線で囲んだ要素は0とすることができる。また、第  $r+1$  パネル左端の状態マトリックスは、中間未知量  $\varphi_r^s, S_r^s$  による項を追加して、式(34)のように書くことができる。

ここに、簡便のために

$$\Pi_i^r = \prod_{i=1}^r \cosh c_i l_i = \cosh c_1 l_1 \cdot \cosh c_2 l_2 \cdots \cosh c_r l_r \quad \dots\dots\dots(35)$$

と表わし、また { のつけてある要素は式(20)で示した計算方式に従うものとする。これに応じて、式(34)の実線で囲んだ要素はすべて0になる。

次に、図-6(a)に示すように連続吊橋の中間支点  $r$  は図-5(b)の構造系において、たわみ角が  $\varphi_{l,r} = \varphi_{0,r+1}$  となるように不静定モーメント  $M_r^s$  を作用させればよい。さらに、図-6(b)に示したように  $\varphi_{0,r+1} = \varphi_r^s$  なる未知量をヒンジの場合と同様に導入し、計算精度の向上をはかれば、結局3つの未知量  $\varphi_r^s, M_r^s, S_r^s$  に関する境界条件は、次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{l,r}^* - \varphi_r^{s*} / \prod_{i=1}^r \cosh c_i l_i &= 0 \\ \tilde{M}_{l,r}^* - M_r^{s*} / \prod_{i=1}^r \cosh c_i l_i &= 0 \\ w_{l,r}^* - M_r^{s*} / (c_c l_c) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

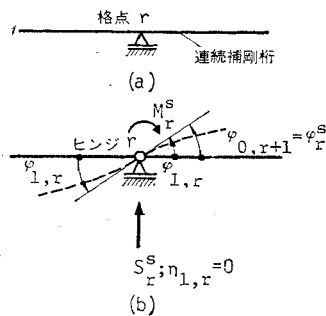


図-6 中間支点

支点  $r$  における補剛桁の変位量の連続条件、ならびに断面力のつり合い条件は、

$$\left. \begin{aligned} w_{0,r+1} &= M_r^s / H \\ \varphi_{0,r+1} &= \varphi_r^s / \prod_{i=1}^r \cosh c_i l_i \\ \tilde{M}_{0,r+1} &= M_r^s / \prod_{i=1}^r \cosh c_i l_i \\ S_{0,r+1} &= S_{l,r} + S_r^s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

であるから、式(25)の格点行列で実線、および、点線で囲んだ要素は、すべて0とすればよい。また、式(34)の状態マトリックス  $\tilde{Y}_{0,r+1}^*$  には  $M_r^{s*}$  の要素を追加すればよい。

最後に、吊橋にはタワーステーやケーブルステーを取り付けて力学的挙動を改善する場合があります、その構造形

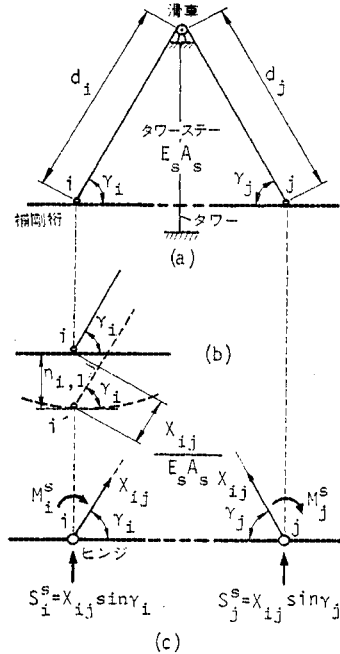


図-7 タワーステーを有する吊橋

式も種々なものが考えられている。そのうち最も簡単なものとして、図-7(a)に示すようにタワー上の滑車を通じてタワーステーを取り付けた場合を考える。タワーステーと補剛桁との変形の適合条件は、図-7(b)より明らかのように、ステー張力を  $X_{ij}$  とすれば

$$n_{l(i)} \cdot \sin \tau_{l(i)} = \frac{X_{ij}}{E_s A_s} d_{l(i)} \quad \dots\dots\dots(38)$$

である。上式より  $X_{ij}$  を求め、さらに計算精度の向上をはかるために図-7(c)に示すように点  $i, j$  にそれぞれヒンジを導入し、そこに  $M_i^s, M_j^s$  なる不静定モーメントを作用させる。

すると、これらの不静定力  $M_i^s, M_j^s$ 、および  $X_{ij}$  を求めるための条件式は、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M}_{l,i}^* - M_i^{s*} / \prod_{i=1}^i \cosh c_i l_i &= 0 && \text{(格点 } i \text{ において)} \\ \tilde{M}_{l,j}^* - M_j^{s*} / \prod_{i=1}^i \cosh c_i l_i &= 0 && \text{(格点 } j \text{ において)} \\ \{w_{l,i}^* - M_i^{s*} / (c_c l_c)\} \cdot \sin \tau_i &+ \{w_{l,j}^* - M_j^{s*} / (c_c l_c)\} \cdot \sin \tau_j \\ &- \left(\frac{E}{E_s}\right) \cdot \left(\frac{I_c c_c^2}{A_s}\right) \cdot \left(\frac{d_i + d_j}{l_c}\right) \cdot X_{ij}^* = 0 && \text{(格点 } i \text{ と } j \text{ とにおいて)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

このような条件を付加すると、式(25)の格点行列において実線と点線で二重に囲んだ要素を0とすることができる。また、パネル  $i+1$  あるいは  $j+1$  の左端における状態ベクトルは、図-7(c)より次のように修正す



るものとする。

$$\tilde{Y}_{0,i+1}^{*(j+1)} = \begin{matrix} \text{初期} \\ \text{値の} \\ \text{項} \end{matrix} \begin{matrix} \text{中間未} \\ \text{知量の} \\ \text{項} \end{matrix} \begin{matrix} M_i^{s*} & X_{ij}^{s*} & M_j^{s*} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\Pi_1^i & 0 & 1/\Pi_1^j \\ 0 & \begin{cases} \sin \gamma_{i(j)} \\ \sin \gamma_{i(j)}/\Pi_1^{i(j)} \end{cases} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \dots(40)$$

格点  $i$  での修正  
格点  $j$  での修正

ただし、 $X_{ij}^{s*}$  は  $S$  と同様に無次元化したものである (式 (21) 参照)。

c) 末端条件

初期値  $\varphi_{0,1}$ ,  $S_{0,1}$  を求めるための境界条件は 図-8 より明らかなように、いずれの形式に対しても補剛桁が端末の格点  $n$  において単純支持されているから、

$$\left. \begin{matrix} w_{l,n}^* = 0 \\ \tilde{M}_{l,n}^* = 0 \end{matrix} \right\} \dots(41)$$

で与えられる。

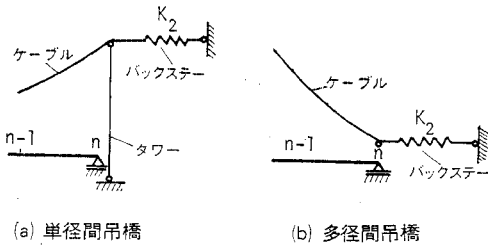


図-8 吊橋の末端条件

活荷重によるケーブル張力  $H_p$  は、ケーブル方程式 (2) を満足するように決めればよい。すなわち、格点  $n$  のところで、未知たわみ角  $\varphi_n^s$  を導入し、双曲線関数項を分離して計算精度の向上をはかると、

$$\left. \begin{matrix} \tilde{\varphi}_{l,n}^* - \varphi_n^{s*} \cdot \prod_{i=1}^n \cosh c_i l_i = 0 \\ u_{l,n}^* - \varphi_n^{s*} / \{(c_n r_n)(c_n l_n)\} \\ + H_p^* \cdot (K_2^* + K_H^*) + 1 \cdot (\Delta_2^* + \Delta_T^*) = 0 \end{matrix} \right\} \dots(42)$$

が得られる。ただし、

$$\left. \begin{matrix} K_2^* = \left( \frac{E}{E_c} \right) \left( \frac{I_c c_c^2}{A_c} \right) \left( \frac{L_{B2}}{l_c} \right) \cdot \sec^3 \alpha_2 \\ K_H^* = \left( \frac{E}{E_c} \right) \left( \frac{I_c c_c^2}{A_c} \right) \left( \frac{L_H}{l_c} \right) \\ \text{および} \\ \Delta_2^* = \alpha_{it} \cdot \left( \frac{EI_c}{P_c l_c^2} \right) \left( \frac{L_{B2}}{l_c} \right) \cdot \sec^2 \alpha_2 \\ \Delta_T^* = \alpha_{it} \cdot \left( \frac{EI_c}{P_c l_c^2} \right) \left( \frac{L_T}{l_c} \right) \end{matrix} \right\} \dots(43)$$

(5) 変位置・断面力の算出

以上のようにして、初期値  $\{\varphi_{1,0}^*, S_{1,0}^*, H_p^*\}$ 、中間未知量  $\{\varphi_r^{s*}, S_r^{s*}, M_r^{s*}, \dots, M_i^{s*}, X_{ij}^{s*}, M_j^{s*}, \dots, \varphi_n^{s*}\}$  に対する境界条件が明らかにされたので、未知数に等しい連立方程式が得られ、すべての未知量をふくむ初期ベクトル  $Y_{0,1}^*$  を求めることができる。したがって、任意点の状態ベクトル  $\tilde{y}_{k,i}^*$ ,  $\tilde{y}_{k+1,0}^*$  は式 (17), (19) より次式で求めることができる。

$$\left. \begin{matrix} \tilde{y}_{l,k}^* = \tilde{Y}_{l,k}^* \cdot Y_{0,1}^* \\ \tilde{y}_{0,k+1}^* = \tilde{Y}_{0,k+1}^* \cdot Y_{0,1}^* \end{matrix} \right\} \dots(44)$$

その際、格点  $k$  のたわみ角  $\varphi_{l,k}$  ( $=\varphi_{0,k+1}$ ) と曲げモーメントは次式より求める。

$$\left. \begin{matrix} \varphi_{l,k} = \frac{P_c l_c^2}{EI_c} \cdot \tilde{\varphi}_{l,k}^* \cdot \prod_{i=1}^k \cosh c_i l_i \\ M_{l,k} = P_c c_c l_c^2 \cdot \tilde{M}_{l,k}^* \cdot \prod_{i=1}^k \cosh c_i l_i \end{matrix} \right\} \dots(45)$$

また、たわみ  $\eta_{l,k}$  ( $=\eta_{0,k+1}$ )、および、せん断力  $Q_{l,k}$  は、

$$\left. \begin{matrix} \eta_{l,k} = \frac{P_c l_c^3}{EI_c} \cdot \left( w_{l,k}^* - \frac{\tilde{M}_{l,k}^*}{c_c l_c} \cdot \prod_{i=1}^k \cosh c_i l_i \right) \\ Q_{l,k} = P_c (c_c l_c)^2 \cdot (S_{l,k}^* - \varphi_{l,k}^* \cdot \prod_{i=1}^k \cosh c_i l_i) \end{matrix} \right\} \dots(46)$$

で与えられることになる。

さらに、塔項変位  $\delta_r$  は、次式のようにして求められる。

$$\delta_r = \frac{P_c l_c^3}{EI_c} \left\{ u_{l,r}^* - \frac{\tilde{\varphi}_{l,r}^*}{(c_r r_r)(c_r l_c)} \cdot \prod_{i=1}^r \cosh c_i l_i + H_p^* \cdot K_{H,r}^* + \Delta_{T,r}^* \right\} \dots(47)$$

ここに、

$$\left. \begin{matrix} K_{H,r}^* = \left( \frac{E}{E_c} \right) \left( \frac{I_c c_c^2}{A_c} \right) \cdot \frac{1}{l_c} \sum_{m=1}^r L_{H,m} \\ \Delta_{T,r}^* = \alpha_{it} \cdot \left( \frac{EI_c}{P_c l_c^2} \right) \cdot \frac{1}{l_c} \sum_{m=1}^r L_{T,m} \end{matrix} \right\} \dots(48)$$

(表-1 参照)

3. 非線形方程式の逐次近似法

(1) 活荷重によるケーブル水平張力  $H_p$  の概略値

そもそも、2. で示した解法は、式 (2) に示したケーブル水平張力  $H$  が定められていなければならない。それで、できるだけ収束性の早い解を得るために、活荷重によるケーブル水平張力  $H_p$  を最初なんらかの方法で推定することが望ましい。

図-9 に示す多径間吊橋に対しては、その概略値<sup>17)</sup>を次式によって推定することができる (記号は図中に示し

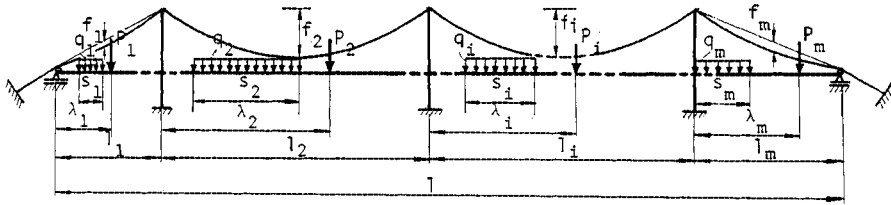


図-9 荷重状態

である。

$$H_p = \frac{3}{4} P_i \frac{\lambda_i(l_i - \lambda_i)}{f_i l_i} + \frac{1}{8} \frac{q_i l_i^2}{f_i} \cdot \frac{s_i}{l_i} \dots (49)$$

(i=1, 2, ..., m)

ちなみに、死荷重による水平張力  $H_w$  は、死荷重強度を  $w_i$  とし、上式において  $s_i=l_i$  とすれば、

$$H_w = \frac{w_i l_i^2}{8 f_i} \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots (50)$$

で与えられる。

(2) Newton-Raphson 法の適用

図-10 に示すように、種々な  $H$  の仮定値に対してケーブル方程式を解き、活荷重による水平張力が求められる。いま、このようにして求められた  $H_p$  の曲線と

$$H_p = f(H) \dots (51)$$

と表わしておく。

$H_p$  (ケーブル方程式)

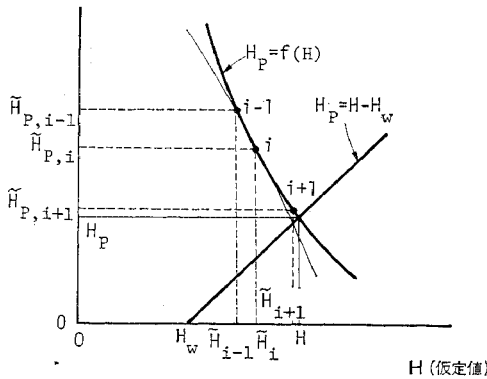


図-10  $H$  と  $H_p$  の関係

一方、 $H_p$  は式 (4) に示したように、次の方程式を満足しなければならない。

$$H_p = H - H_w \dots (52)$$

すると、正しい水平力  $H$  のもとでは、式 (51) と (52) を等価した関数  $g(H)$  は、式

$$g(H) = f(H) - H + H_w = 0 \dots (53)$$

を満足するはずである。ところが、水平力  $H$  の真値は未知であり、ある推定値  $\tilde{H}_i$  のもとでは、 $g(\tilde{H}_i) \neq 0$  である。そこで、 $g(\tilde{H}_i + \Delta\tilde{H}_i) = 0$  ならしめる  $\tilde{H}_i$  の補正值  $\Delta\tilde{H}_i$  は、Newton-Raphson 法を用いると、次の

ように書くことができる。

$$\Delta\tilde{H}_i = -\frac{g(\tilde{H}_i)}{g'(\tilde{H}_i)} \dots (54)$$

したがって、 $i$  番目の近似値  $\tilde{H}_i$  を用いて、より誤差の少ない第  $i+1$  番目の近似値  $\tilde{H}_{i+1}$  を求めると

$$\tilde{H}_{i+1} = \tilde{H}_i + \Delta\tilde{H}_i = \frac{\tilde{H}_i \cdot f'(\tilde{H}_i) - f(\tilde{H}_i) - H_w}{f'(\tilde{H}_i) - 1} \dots (55)$$

(3)  $H_p$  の逐次近似解

式 (55) では  $f'(\tilde{H}_i)$ 、すなわち図-10 の点  $i$  における  $H_p$  曲線の勾配が求まっていなければならない。いま、簡単化のために点  $i-1$  と点  $i$  とを結んだ直線で  $f'(\tilde{H}_i)$  を近似する。

$$f'(\tilde{H}_i) = \frac{\tilde{H}_{p,i} - \tilde{H}_{p,i-1}}{\tilde{H}_i - \tilde{H}_{i-1}} \dots (56)$$

すると、この直線と  $H_p = H - H_w$  なる直線との交点に

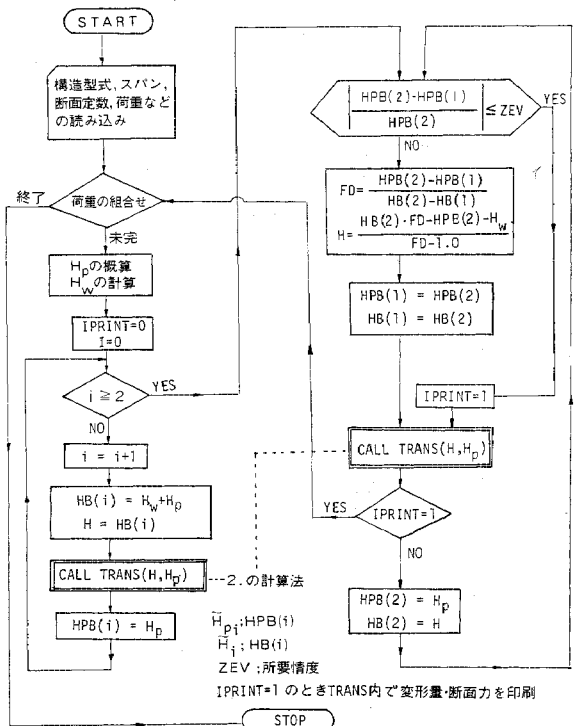


図-11 逐次近似解法のフローチャート

応じた  $\hat{H}_{i+1}$  が式 (55) より求められることになり、この  $\hat{H}_{i+1}$  を用いて  $\hat{H}_{p,i+1}$  が求められ、点  $i+1$  が定まる。それで、以下同様な操作によって解を収束させる。すなわち、所要の計算精度を  $\epsilon$  とすると、

$$\left| \frac{\hat{H}_{p,i+1} - \hat{H}_{p,i}}{\hat{H}_{p,i+1}} \right| \leq \epsilon \dots \dots \dots (57)$$

を満足させる実用解を求めることができる。

図-11には、これらの考え方をもとにしたフローチャートを示す。ここでは、まず最初  $H_p$  は全く未知であるが、(1) で述べた概略値より  $\hat{H}_1$  を仮定し、ケーブル方程式によって  $\hat{H}_{p,1}$  を計算している。次に、このようにして求められた  $\hat{H}_{p,1}$  を用いて  $\hat{H}_{p,2}$  を設定し、より正確な  $H_{p,2}$  をケーブル方程式によって算出する。これら2組の値 ( $\hat{H}_1, \hat{H}_{p,1}$ )、( $\hat{H}_2, \hat{H}_{p,2}$ ) より式 (57) の補完を行い、 $\hat{H}_3$  を求めている。そして、順次同様な計算を行い、式 (57) が満足されたときの変位量・断面力をプリントするようにしている。

4. 数値計算例

(1) 計算精度と解の妥当性の検討

各種構造形式の吊橋の特性を本文の方法によって解析できることを 1.~3. で示したが、数値計算によって本文の方法の精度や解の収束性を検討しておく必要がある。そのために、文献 6) に示された 図-12 と 表-2 の3径間連続吊橋を対象とし、この吊橋に  $L$  荷重が載荷する際の数値解析を行った。

表-2 断面定数と荷重強度

ケーブルの伸び剛性	$E_c A_c$	$0.448 \times 10^7 \text{ t}$
補剛桁の曲げ剛性	$EI$	$3.150 \times 10^7 \text{ t} \cdot \text{m}^2$
死荷重強度	$w$	$15.0 \text{ t/m}$
集中荷重	$P$	$35.0 \text{ t}$
等分布荷重	$q$	$5.0 \text{ t/m}$

求める量としては、水平張力、曲げモーメントの最大値、および最大たわみに限定したが、これらは以下のような手順で計算した。

まず、等分布荷重を  $q=0$  とし、集中荷重  $P=1 \text{ t}$  が移動する際の影響線を  $H=H_w$  として求める。すると、たとえば中央径間の断面における曲げモーメントの影響線は 図-13(a) のようになり、等分布荷重  $q$  の載荷幅が求められる。しかし、上述の影響線は  $H=H_w$  とし

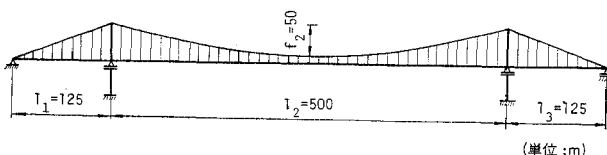


図-12 3径間連続吊橋

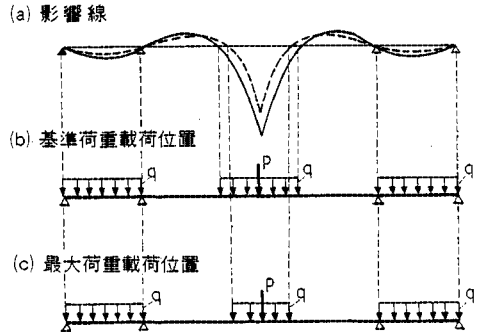


図-13 影響線と荷重載荷位置

ているために実際の荷重が載荷する場合には、ケーブル張力が変わるので、 $q$  の載荷幅を修正しなければならない。そこで、本文では 図-13(b) の載荷幅を基準とし、種々な幅を持たせた数組の載荷幅を考え、各ケースについて計算された曲げモーメントのうち最大となるものを最大曲げモーメントとした。ちなみに、1 ケースあたりの計算時間は、Newton-Raphson 法による繰り返し計算を含めて (式 (29) の  $\epsilon$  を 0.01 とすれば、繰り返し回数は 2~3 回)、大阪市立大学計算センター設置の FACOM 270/30 で倍精度計算を行い 5~7 秒であった。

次に、計算精度を構造物の対称性、力のつり合い、および変位の適合条件より検討した結果、11 桁~14 桁の精度を有しており、本文の解析方法は十分な実用性があるものと思われる。なお、 $cl \geq 15$  のとき、中央にヒンジを入れ、あらたな未知量  $\varphi^s, M^s$  (式 (36) 参照) を導入することにより、上述の計算精度が確保されることを付記しておく。

表-3 最大断面力・変位量

項 目		① 本文による解	② 文献 6) による解	誤差 (%)
ケーブル張力 $H_p(\text{t})$		2850	2850	0
曲げモーメント $M$ (t·m)	中央径間 $0.5 l_2$	5812	5826	0.24
	側径間 $0.5 l_1$	6296	6316	0.32
	中間支点 { 正 負	7710 -12568	7746 -12591	0.47 0.18
たわみ $\eta$ (m)	中央径間 $0.5 l_2$	1.3246	1.3486	1.81
	側径間 $0.4 l_1$	0.2880	0.2906	0.90

このような計算方法によって求められた最大断面力、最大たわみの計算結果を表-3に示す。表中には、文献 6) の方法によって求められた結果も示してあるが、ほとんど誤差はなく、本文の解析方法の妥当性が十分確かめられたものと考えられる。

(2) 種々な吊橋の構造特性

構造形式の差異による吊橋の特性については、すでに数多くの報告があるが、いわゆる Steinman の補剛係数の逆数  $cl = \sqrt{H/EI} \cdot l$  値が長大吊橋で大き

い場合に対しても、本文の解析方法の適用性があるかどうかを調べるために、以下ではさらに二、三の数値計算結果を示す。

対象としたモデルは 図-14 に示すように、① 3 径間 2 ヒンジ吊橋、② タワーステー付 3 径間 2 ヒンジ吊橋、および③ 3 径間連続吊橋とした。断面諸定数を表-4 に示すが、この値を標準として、 $cl=15\sim 40$  までを考えてみた。図-15~17 は、3 径間連続吊橋のケーブル張力  $H_p$ 、曲げモーメント、およびたわみの影響線を例示したものであるが、 $cl$  値が大きくなっても精度よく計算されている。

表-4 断面定数と荷重強度

ケーブルの伸び剛性 $E_c A_c$	$1.70 \times 10^7 t$
補剛桁の曲げ剛性 $EI$	$4.10 \times 10^7 t \cdot m^3$
タワーステーの伸び剛性 $E_s A_s$	$0.16 \times 10^7 t$
死荷重強度 $w$	20.0 t/m
集中荷重 $P$	115.0 t
等分布荷重 $q$	2.33 t/m

これらの影響線を利用して、3 径間 2 ヒンジ吊橋と 3 径間連続吊橋の最大曲げモーメントをプロットしたものを 図-18 に示す。この図より、連続吊橋では、中間支点上に正負ともに大きい曲げモーメントが発生することがわかる。

そこで、本文では任意の変断面吊橋でも容易に解析できるが、簡単のため 図-19 は、図中の中間支点付近で曲げ剛度を変化した場合の最大曲げモーメント図を示したものである。この図から中間支点の剛性を上げるよりむしろ小さくしたほうがよく、その極限として 2 ヒンジ吊橋が考えられる。

しかしながら、2 ヒンジ吊橋では中間支点上のところで、図-20 に示すようにたわみ角の不連続性のため折れ角が生じ、鉄道橋ではとくに、問題の一つに指摘されている。

それで、図-14(b) に示したようにタワーステーを取り付けることによりこの欠点を改善する構造形式が考えられている。表-5 は各種構造形式の吊橋の特性を比較したものであるが、この表よりタワーステーを取り付けることにより、2 ヒンジ吊橋よりも曲げモーメント、たわみを減少させ、かつ折れ角を著しく小さくできることがわかる。

最後に、多径間吊橋の一例として、図-21 に示す 5 径間連続吊橋（断面諸定数は表-4 を採用）の最大曲げモーメント図を 図-22 に示す。傾向としては、3 径間連続吊橋を延長したものと類似している。

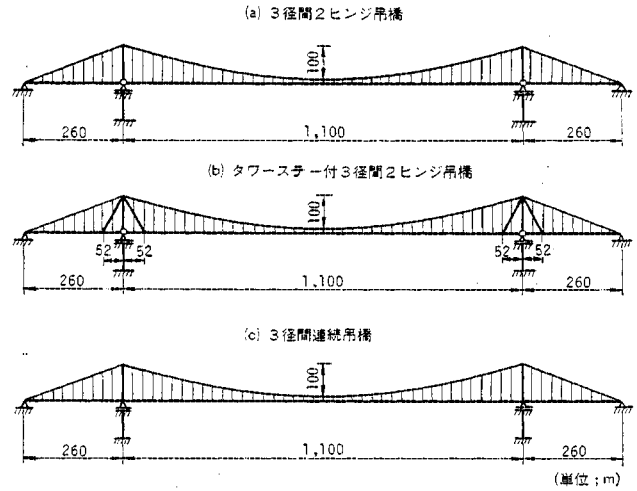


図-14 吊橋の形式

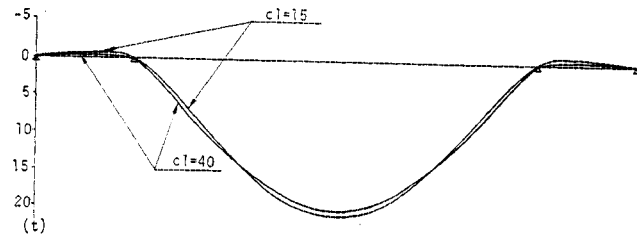


図-15 3 径間連続吊橋、水平張力  $H_p$  の影響線

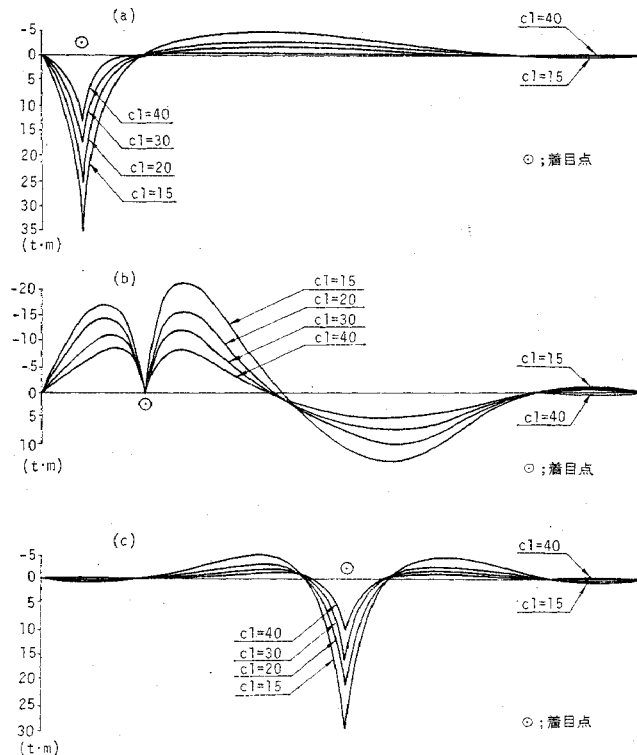


図-16 3 径間連続吊橋の曲げモーメント  $M$  の影響線

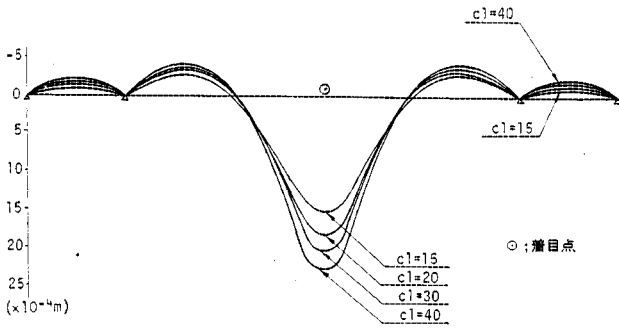


図-17 3径間連続吊橋たわみ η の影響線

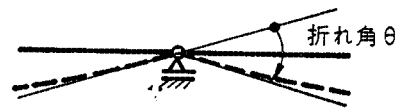


図-20

### 5. 模型実験

熊本県において建設された大維2号橋をモデルとした小型吊橋模型について静的載荷実験<sup>20)</sup>を行う機会を得たので、実験結果と本文の方法による解析結果とを比較・検討したものを以下に示す。

図-23 は模型の一般図を示したものであり、次元解析によって実橋を 1/50 に縮尺したものである。次元解析結果や模型および装置などの詳細については文献 20) を参照されたい。

まず、図-24 は  $P=3.09t$  ( $L$  荷重を集中荷重に換算し、次元解析したもの) を補剛桁上で移動させ、スパン  $l/4$  と  $l/2$  点に着目した曲げモーメントの影響線を示す。また、図-25 はスパン  $l/4$  と  $l/2$  点のたわみの影響線を示す。これらの図中には○印で実測値を記入してあるが、よく一致する傾向にある。さらに、図-26 は塔頂の水平変位の影響線を示すものであり、理論値が非対称であるのは、左右のバックステーのケーブル長が異なるためであり、実測値のほうもこの傾向が良好に現われているように思われる。

次に、図-27~28 は想定した  $L$  荷重をできるだけ近似するような格点荷重にして載荷したときの曲げモーメント図、およびたわみ図を示したものである。図中には同様に○印で実測値が入れているが、計算値とよく一致しており、良好な結果が得られているように思われる。

### 6. あとがき

① 本文は、吊橋の構造解析を伝達マトリックス法を用いて行ったものである。② すなわち、 $cl$  値が大きくなる長大吊橋の解析に対し、③ 精度よく演算できるよう、④ 双曲線関数項を分離・単位化した伝達マトリックス法による構造解析法を明示した。

しかも、⑤ 基礎微分方程式とケーブル方程式とを伝達マトリックスの要素中に組み込み、また⑥ 非線形方程式に対して Newton-Raphson

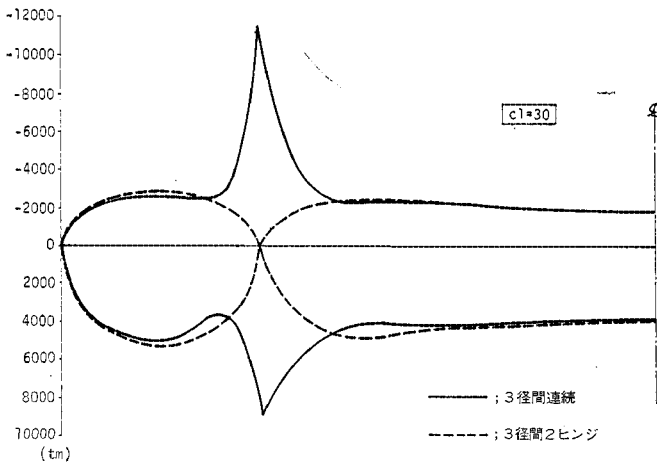


図-18 3径間2ヒンジ吊橋と連続吊橋との最大曲げモーメント比較図

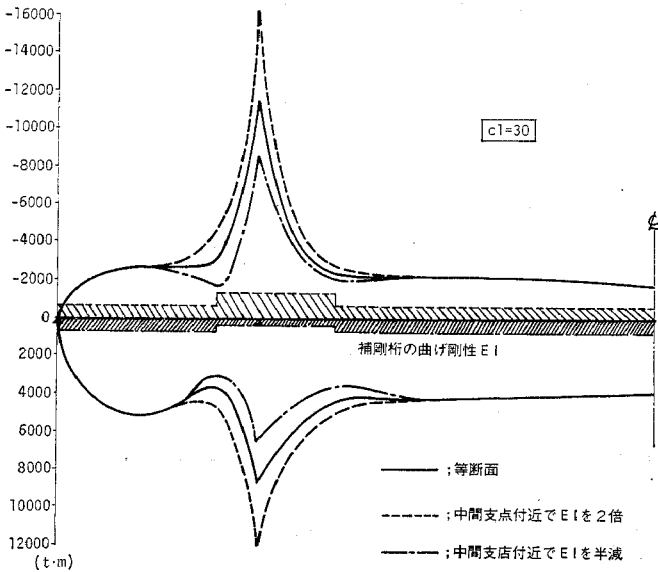


図-19 変断面の3径間連続吊橋の最大曲げモーメント図

法によって逐次近似させ、迅速な収束計算を行えるようにした。

この解析方法の解の精度や実用性は各種構造形式の吊橋に関する数値計算例によって示すことができた。また、吊橋模型による静的載荷実験を行い、実測値を本解析法による理論値とを比較すると良好に一致する傾向が認められた。

したがって、マトリックス法による吊橋の一つの実用的解析法が本文で提示できたように思われる。

参考文献

- 1) Melan, J. : Theorie der eisernen Bogenbrücken und der Hängebrücken, Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 1888.
- 2) Steinman, D.B. : A Generalized Deflection Theory for Suspension Bridge, Trans. ASCE Vol. 100, 1935.1.
- 3) Timoshenko, S. : Steifigkeit von Hängebrücken, ZAMM, 1928.
- 4) Bleich, F., C.B. McCullough, R. Rosencran,

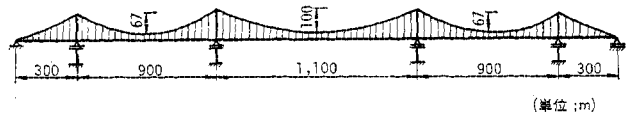


図-21 5 径間連続吊橋

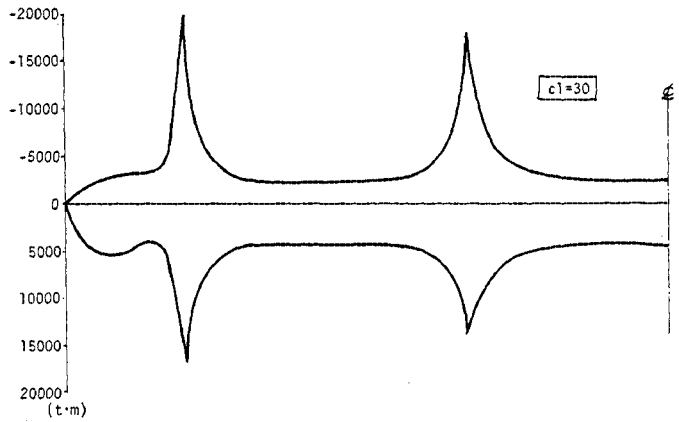
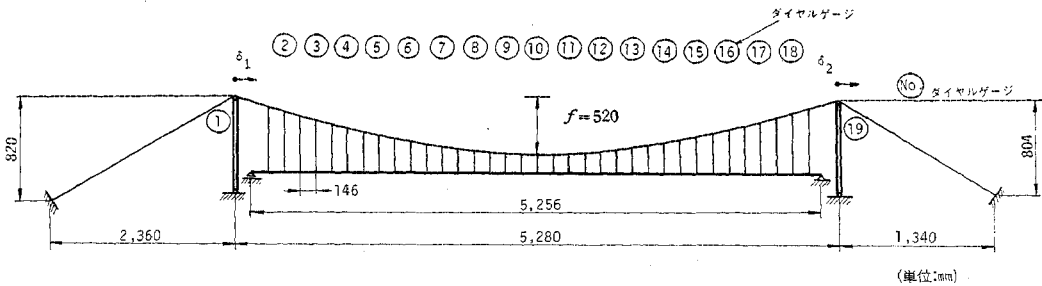


図-22 5 径間連続吊橋の最大曲げモーメント図



主な諸元、ケーブルの伸び剛性;  $E_c A_c = 4.020 \times 10^4 \text{ Kg}$   
 補剛桁の曲げ剛性;  $EI = 8.257 \times 10^6 \text{ Kg} \cdot \text{cm}^2$   
 死荷重;  $w = 110.97 \text{ g/cm}$

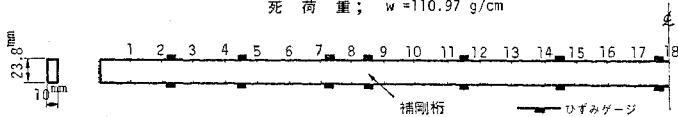


図-23 模型桁一般図

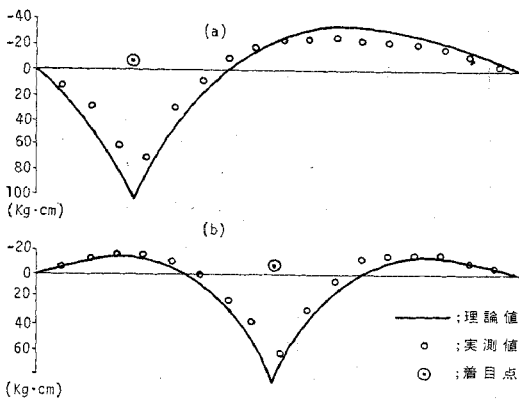


図-24 曲げモーメント  $M$  の影響線

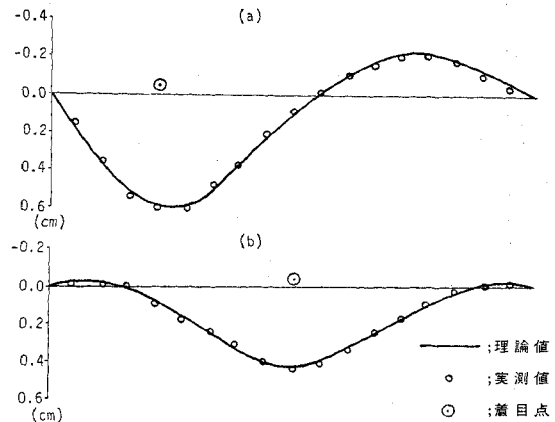


図-25 たわみ  $\eta$  の影響線

表-5 最大断面力・変位置

形 式	付加張力 $H_p(t)$	曲げモーメント (t·m)				たわみ $\eta$ (m)	塔頂の水平変位 $\delta$ (m)		折れ角 $\theta$ (%)	
		側 径 間		支 点			max	min	左 端	中 間
		max	min	max	min					
3 径間 2 ヒンジ吊橋 (図-14(a))	3 500	5 131	-2 710	—	—	1.954	0.120	-0.078	9.15	17.01
クワースター付 3 径間 2 ヒンジ吊橋 (図-14(b))	3 429	4 930	-2 650	—	—	1.893	0.119	-0.060	8.10	1.00
3 径間 連続吊橋 (図-14(c))	3 478	5 041	-2 656	9 054	-11 840	1.865	0.115	-0.068	8.63	—

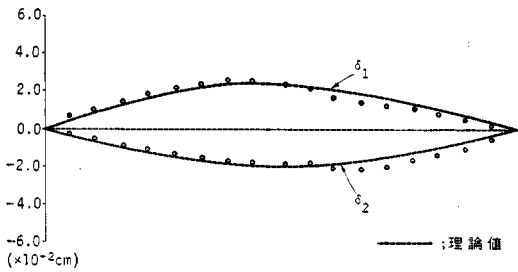


図-26 塔頂の水平変位  $\delta$  の影響線

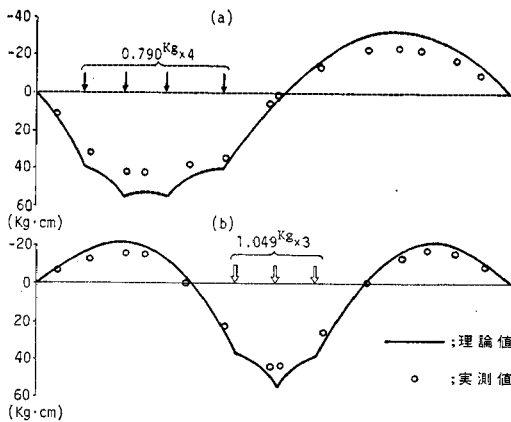


図-27 曲げモーメント図

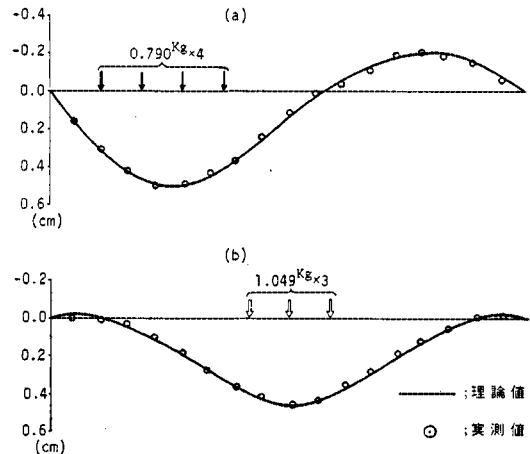


図-28 たわみ図

and G.S. Vincent : Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, Bureau of Public Roads, U.S. Dept. of Commerce, Government Printing Office, Washington, D.C., 1950.

- 5) Peery, D.J. : An Influence Line Analysis for Suspension Bridges, Proc. ASCE, ST 12, 1954.12.
- 6) Hawrenek, A. and O. Steinhardt : Theorie und Berechnung der Stahlbrücken, 1958 (橋・小松訳 : 鋼橋の理論と計算).
- 7) この会議の論文は、長大橋技術研究会において全訳されている。1973.12.
- 8) 小松定夫 : 長大橋梁の諸問題, 土木学会 関西支部講習会テキスト.
- 9) 倉西 茂 : 行列による吊橋の構造解析, 土木学会論文集, 第 81 号, 1962.5.

- 10) 倉西 茂 : 連続吊橋についての研究, 土木学会論文集, 第 84 号, 1962.8.
- 11) Shimada, S. : Programming for Digital Computation of Suspension Bridge under Vertical, Horizontal and Torsional Loadings, Trans. of JSCE, No. 102, 1964.2.
- 12) Fukuda, T. : Analysis of Multispan Suspension Bridge, Proc. ASCE, Vol. 93, ST 3, 1967.6.
- 13) 小西一郎・白石成人・飯田 裕 : 斜めハンガーつり橋の力学性状に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第 160 号, 1968.12.
- 14) 松本嘉司 : 副ケーブル式連続吊橋, 土木学会論文報告集, 第 206 号, 1972.10.
- 15) 後藤茂夫 : 有限変形法による吊橋の解法, 土木学会論文集, 第 156 号, 1968.8.
- 16) Esslinger, M. : Suspension Bridge Design Calculated by Electric Computer, Acier-Stahl-Steel, Vol. 27, No. 5, 1962.
- 17) Pugsly, A.G. : The Theory of Suspension Bridges, 2nd Edition, 1968.
- 18) 平井 敦 : 鋼橋 III, 技報堂.
- 19) 中井 博・事口寿男 : 伝達マトリックス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力・変形量に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 233 号, 1975.1.
- 20) 大ブロック工法による吊橋架設時の構造解析と模型による実験的研究, 大阪市立大学工学部橋梁研究室, 株式会社栗本鉄工所, 昭和 49 年.

(1976.4.15・受付)