

# 多軸応力状態における砂のせん断強さと変形特性\*

## DEFORMATION AND STRENGTH OF A SAND IN THREE-DIMENSIONAL STRESS STATE

宮 森 建 樹\*\*  
By Tateki MIYAMORI

### 1. ま え が き

土のせん断挙動を調べる試験としては応力条件、排水条件の設定が可能であるという利点から3軸圧縮試験が最も広範に行われている。しかしながら通常の3軸圧縮試験では試験装置の機構上、中間主応力(σ<sub>2</sub>)と最小主応力(σ<sub>3</sub>)が等しい条件でせん断が行われる。実際の地盤はこのような単純な応力条件ばかりではなく、平面ひずみ状態、伸張状態および3主応力がそれぞれ異なる状態など複雑な応力条件下にあると想定される。

土の破壊に関するモール・クーロンの破壊条件は摩擦則であり、土の強さは中間主応力には影響されず最大主応力と最小主応力の大きさによって一義的に定まるといえるものである。中間主応力が土のせん断挙動に及ぼす影響に関する研究は Kjellman<sup>1)</sup> に始まるが、その後も多数の研究がなされている。試験の方法としては主として直方供試体(立方供試体を含む)を用いるもの(Ko・Scott<sup>2)</sup>, Shibata・Karube<sup>3)</sup>, Sutherland・Mesdary<sup>4)</sup>, Bishop et al.<sup>5)</sup> など)と中空円筒供試体を用いるもの(Kirkpatrick<sup>6)</sup>, Arnold・Mitchell<sup>7)</sup> など)に大別される。これらの研究結果から土の内部摩擦角φ'は中間主応力の影響を受け、応力状態がσ<sub>1</sub>(最大主応力) > σ<sub>2</sub> > σ<sub>3</sub>のとき3軸圧縮試験から求めたφ'より大きくなるのが確かめられている。しかしながら3軸伸張状態でのφ'の値の傾向は各研究者によって異なっており、今後ともこの種の試験装置の開発・改良および実験結果の集積が必要であろうと考えられる。

従来土質力学においては塑性平衡状態における土中の力のつり合いを対象として解析が行われているが、近年の電子計算機の発達と普及、解析法の開発と発展により

応力-変形解析が可能となってきた。したがって土の応力-変形関係をあきらかにすることが土質力学の重要な課題のひとつとなっている。

本論文では3主応力が可変な応力条件下で乾燥砂の圧縮試験を行い、砂のせん断強さに及ぼす中間主応力の影響および平均主応力一定条件下での応力-変形特性を実験的に調べた。さらに応力比-ひずみ増分比、および応力比-ひずみ関係がそれぞれ直線および双曲線で近似されることから特定の応力条件下での応力-ひずみ関係式を呈示した。

### 2. 応力とひずみの記号

実験は排水条件で行ったので応力σ<sub>1</sub>, σ<sub>2</sub>, σ<sub>3</sub>を有効応力とし、ひずみをε<sub>1</sub>, ε<sub>2</sub>, ε<sub>3</sub>とする。主応力増分dσ<sub>1</sub>, dσ<sub>2</sub>, dσ<sub>3</sub>を与えたときの主ひずみ増分をdε<sub>1</sub>, dε<sub>2</sub>, dε<sub>3</sub>で表わす。応力状態を表現するために図-1(A)のように主応力空間を考えると応力(σ<sub>1</sub>, σ<sub>2</sub>, σ<sub>3</sub>)はベクトルOPで表わされ、これは等方圧成分OAとせん断応力成分APに分解される。

平均主応力 p, せん断応力 q をそれぞれ

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{oct} \dots \dots \dots (1)$$

$$q = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \tau_{oct} \dots \dots \dots (2)$$

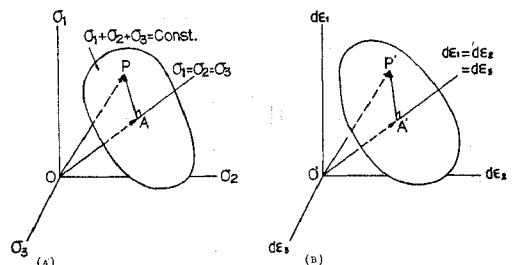


図-1 応力と主ひずみ増分の表示

\* 本論文はその一部を土木学会第30回年次学術講演会1975で発表したものをさらに考察を加えてまとめたものである。

\*\* 正会員 工修 日本大学講師 理工学部交通工学科

ここに  $\sigma_{oct}$ =正 8 面体垂直応力,  $\tau_{oct}$ =正 8 面体せん断応力, とおくと,  $\overline{OA}$ ,  $\overline{AP}$  は次のように表わされる.

$$\overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3} p$$

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \sqrt{3} q \end{aligned}$$

主応力の方向と主ひずみの方向が一致するとして, 同様に主ひずみ増分空間を考え (図-1 (B)), 主ひずみ増分 ( $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ ) をベクトル  $\overline{OP}'$  で表す. 体積ひずみ増分  $dv$ , せん断ひずみ増分  $d\gamma$  をそれぞれ

$$dv = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 \dots \dots \dots (3)$$

$$d\gamma = \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2} \dots \dots \dots (4)$$

とすると,  $\overline{OA}'$ ,  $\overline{AP}'$  は次のようである.

$$\overline{OA}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} dv$$

$$\begin{aligned} \overline{AP}' &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\quad \cdot \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} d\gamma \end{aligned}$$

### 3. 試験装置と試験方法

#### (1) 試験装置

試験装置はその概略を 図-2 に示すように (i) 圧縮室, (ii) 加圧装置および (iii) 体積変化測定装置から構成されている.

##### a) 圧縮室

圧縮室は Ko・Scott<sup>8)</sup> の作成した試験装置を参考にして試作した. 圧縮室は 図-3 に示すように 6 個の圧力室を組立てることによって構成され, その中央の  $10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$  の空間部が 試料室となる. 圧力室はアルミニウム製のフレームの内側に成形されたゴム膜 (厚さ: 約  $0.5 \text{ mm}$ ), 外側から透明なアクリル樹脂板を取りつけることによって組立てられる. アクリル樹脂板にはそれぞれ

- A: 供試体
- B: アルミニウムフレーム
- C: ゴム膜
- D: ゴムパッキン
- E: 給水孔
- F: 排気孔
- G: 供試体固定板
- H: 供試体調整板

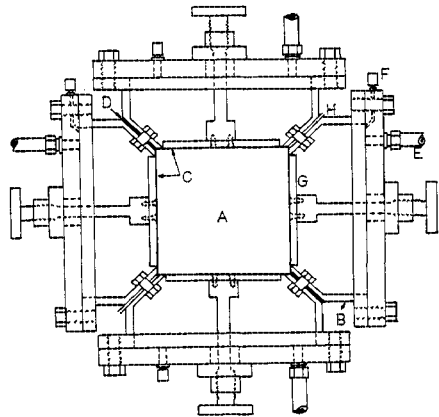


図-3 圧縮室

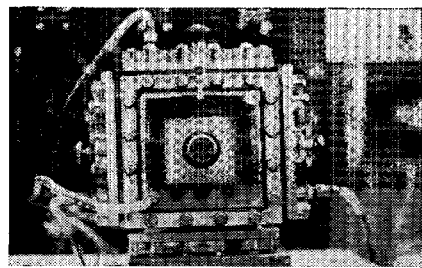


写真-1 圧縮室

給水孔, 排気孔および可動な供試体支え板が設けてある. 供試体支え板もアクリル樹脂製であるので外部から供試体の挙動を観察することができる (写真-1). 加圧装置から送られる液体が給水孔を通して向いあった一対の圧力室に流入し, 液圧がゴム膜を介して供試体に伝達される. 供試体の作成時には供試体支え板をゴム膜に接触させた状態で試料室に砂を入れ所定の締固めを行う. 供試体作成後上部の圧力室を組立て, 圧力室への給水, 排気, 一定圧力での加圧を行ったのちに供試体支え板をゴム膜から引き戻し, ついで各圧力室に所定の液圧を加えてせん断試験を行う.

##### b) 加圧装置, 体積変化測定装置

加圧装置には英国型恒圧装置を用いた. この装置は管で連結された 2 個の水銀容器からなり, 一方の水銀容器を上下させ, 水銀柱の水頭圧によって加圧するものである. 本装置の加圧圧力範囲は  $0 \sim 3.0 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$  である.  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の主応力を加えるために 3 組の恒圧装置が用意されている. 加圧装置によって与えられる液圧はブルドン管式圧力計によって測定され, その測定値をもってそれぞれの主応力値とした.

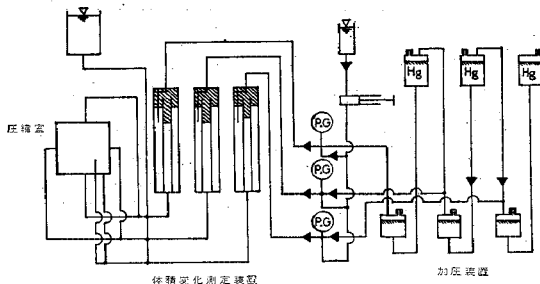


図-2 試験装置の概略

変形はせん断試験時に圧力室に流入，流出する液体の体積を2重管式体積変化測定装置で測定することによって求めた。

(2) 加圧方法

本試験では主応力空間の静水圧軸に沿って圧縮し，その後  $p$  を一定に保ったまま  $q$  を増大させてせん断を行った。  $q$  の増分方向は図-4 に示すように  $\pi$  平面上の圧縮方向  $\theta=0^\circ (\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3)$ ，  $15^\circ$ ，  $30^\circ (\sigma_2 = \text{一定})$ ，  $45^\circ$ ，  $60^\circ (\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3)$  の5通りとした。

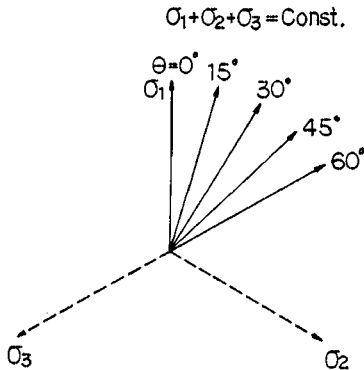


図-4 試験時の応力経路

このような応力経路では  $\theta$  と各主応力のあいだに次の関係がある。

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3)}$$

したがって所定の応力経路に沿ってせん断するには各主応力増分  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3$  を加えるとき次の条件を満足しなければならない。

$$\Delta p = \frac{1}{3} (\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3) = 0$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3}{(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2) + (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)}$$

これらより最大主応力増分  $\Delta\sigma_1$  を定めたとき，他の主応力増分はそれぞれ次のようである。

$$\Delta\sigma_2 = \frac{\Delta\sigma_1}{2} (\sqrt{3} \tan \theta - 1)$$

$$\Delta\sigma_3 = -\frac{\Delta\sigma_1}{2} (\sqrt{3} \tan \theta + 1)$$

試験では一段階あたりの  $\Delta\sigma_1$  を  $0.05 \text{ kg/cm}^2$  とし，それに対応する  $\Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3$  を与えた。ある応力状態での体積変化が  $0.1 \text{ cm}^3/\text{min}$  以下になった後に体積変化を測定し，次の段階の応力を加えた。

(3) 試料および供試体

試料は水洗いた川砂の標準網ふるい  $2000 \mu$  通過，  $105 \mu$  残留分を用いた。粒徑加積曲線は図-5 に示すよ

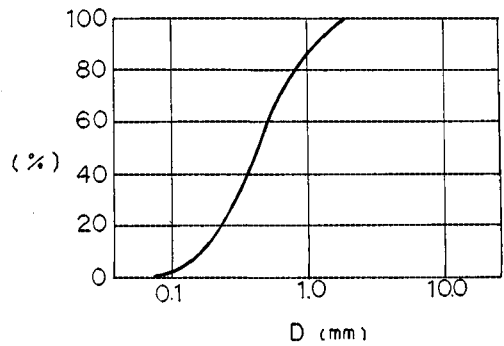


図-5 試料の粒徑加積曲線

うであり，均等係数  $U_c=3.1$ ，曲率係数  $U_c'=1.0$ ，土粒子の比重  $G_s=2.65$  の均等な砂である。この砂のロト法による最大間隙比，載荷重  $0.15 \text{ kg/cm}^2$  を加え，振動 (約  $50 \text{ Hz}$ ) を与えて得られた最小間隙比は，それぞれ  $e_{\max}=0.783$ ，  $e_{\min}=0.491$  である。砂は空気乾燥状態で用いた。

上部圧力室を取りはずし，他の圧力室の供試体支え板をゴム膜に接触させた状態で試料室に3層に詰め，各層ごとに突き棒で締めて供試体を作成した。供試体の初期間隙比は  $e_i=0.58 \sim 0.62$  (相対密度  $D_r=0.56 \sim 0.70$ ) であり，中位から密な状態である。

(4) 体積補正

体積変化の測定値には加圧あるいは減圧による圧力室，管部の膨張・収縮量などが含まれている。これらの量を補正するため，繰り返し等方圧縮試験を行い，弾性的な応力-体積変化関係を求め，それを補正值とした。各応力段階における体積変化測定値から補正值を減じた値をその応力段階での体積変化量とした。

(5) 通常の3軸圧縮試験との比較

この種の試験機では応力は薄いゴム膜を介して加えられるので，変形が小さいうちは応力は均等に作用するが変形が大きくなるにしたがってコーナー付近での変形が拘束され，応力および変形が局所的に変化すると考えられる。このことはコーナー部分の変形が中央部分の変形より一般的に小さいという外部からの観察によっても判断された。

局所的なコーナー周辺の変形の拘束がせん断中の変形あるいは強さ特性にどのような影響を及ぼすかを厳密に知ることは困難であるので，ここでは通常の3軸圧縮試験の結果と比較を行った。その結果を示すと図-6 のようである。初期においては多軸応力状態での圧縮試験の軸ひずみが大いだが，  $q/p$  が大きくなるとそれは逆転する。通常の3軸圧縮試験では  $\epsilon_{ax}=4.1\%$  で  $(q/p)_{\max}=0.806 (\phi'=41^\circ 40')$  であるのに対し，多軸応力状態での

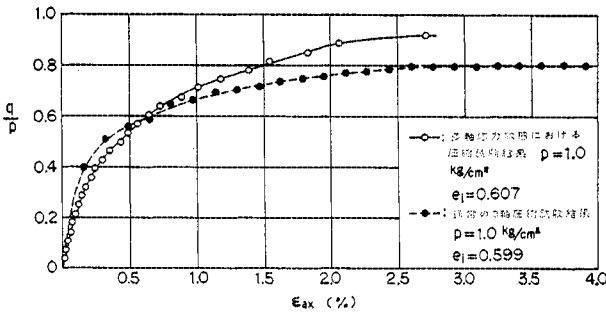


図-6 通常の3軸圧縮試験との比較

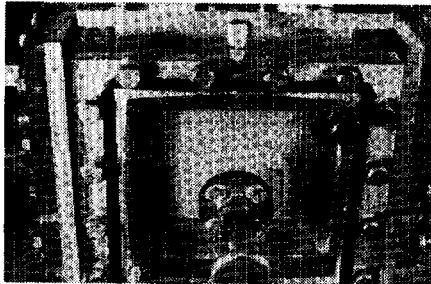


写真-2 破壊後の供試体

圧縮試験では  $\epsilon_{ax} = 2.7\%$  で  $q/p = 0.917$  ( $\phi' = 47^\circ 10'$ ) となっている。この傾向は Ko・Scott<sup>9)</sup> の結果と同様である。Sutherland・Mesdary<sup>1)</sup> は3軸セル内で1側方からセル圧を、他の側方から薄いゴム膜を装着した側板に液圧を加え、上下方向から加圧板で圧縮する装置を開発し、多軸応力状態における圧縮試験を行った。その結果によるとピーク強さを越えるまで応力と軸ひずみの関係は通常の3軸圧縮試験と差がないようである。

このようなことから、この種の試験機ではひずみが大きくなるにしたがってコーナー部分の拘束の影響が生じ、より大きなせん断応力を加えなければ破壊に至らないものと考えられる。また破壊後の供試体の様相を示すと写真-2 のようである。

#### 4. 試験結果と考察

##### (1) $q/p$ -主ひずみ関係、およびひずみ増分方向について

試験から得られた  $q/p$  と主ひずみ  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  の関係を応力経路別に示したのが図-7である。この図から圧縮と伸張では  $\epsilon_2 \doteq \epsilon_3, \epsilon_1 \doteq \epsilon_2$  がそれぞれ満足され応力条件と変形が対応していることがわかる。

応力経路別に主ひずみの変化に注目するとせん断初期を除いては  $\epsilon_1$  は常に収縮し、 $\epsilon_2$  は膨張しているが  $\epsilon_2$  は応力経路に応じて収縮から膨張まで変化する。

$\theta = 15^\circ$  の応力経路では  $\epsilon_2$  はせん断初期に収縮するが、その後  $q/p$  が増大してもほとんど一定であり破壊状態に近づくにつれて膨張する。 $\theta = 30^\circ$  では  $\epsilon_2$  が常に一定であるが  $\epsilon_2$  はせん断過程を通じて収縮側にあり、破壊に近づくにつれてより一層収縮する傾向を示す。このことから平面ひずみ状態 ( $\epsilon_2 = 0$ ) でのせん断過程中的応力経路は  $\theta = 15^\circ \sim 30^\circ$  の範囲にあるものと考えられる。市原・松沢<sup>9)</sup> の砂の平面ひずみ状態でのせん断試験結果から求めた破壊時の  $\theta$  は約  $11^\circ$  であり、軽部・原田<sup>10)</sup> の繰り返した粘土の平面ひずみ試験では  $\theta = 15^\circ \sim 23^\circ$  である。これらの実験結果はいずれも  $p =$  一定条件ではないが本試験結果とよく一致しているようである。

ひずみ増分方向とせん断応力経路の方向を主応力空間と主ひずみ空間の  $\pi$  平面を重ね合せて示したのが図-8である。ベクトルの大きさはせん断ひずみ増分  $d\gamma$  と

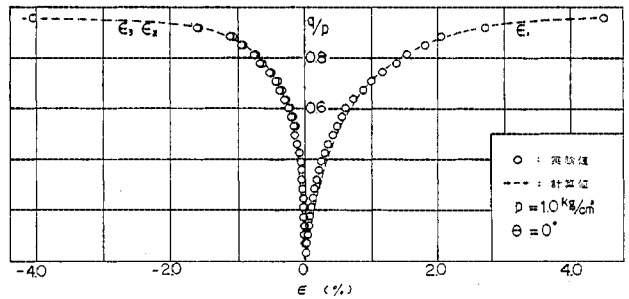


図-7 (A) 応力比-主ひずみ関係

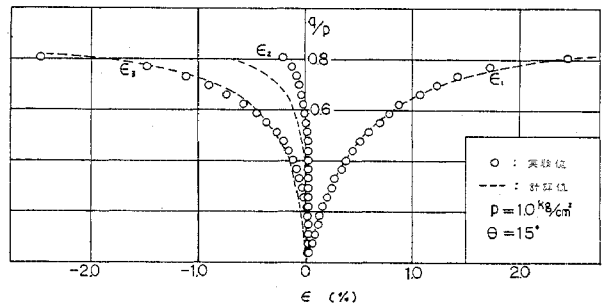


図-7 (B) 応力比-主ひずみ関係

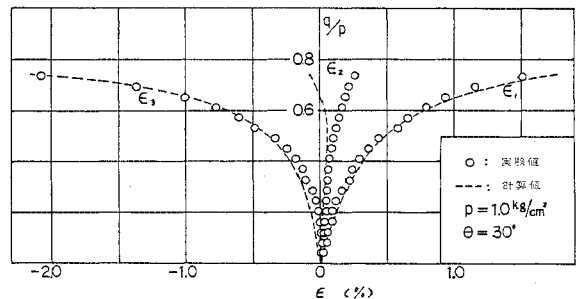


図-7 (C) 応力比-主ひずみ関係

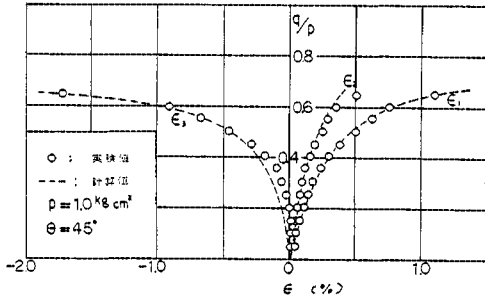


図-7 (D) 応力比-主ひずみ関係

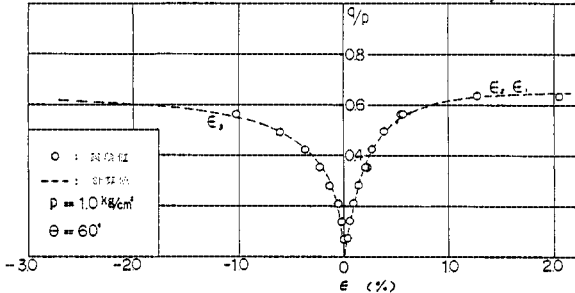


図-7 (E) 応力比-主ひずみ関係

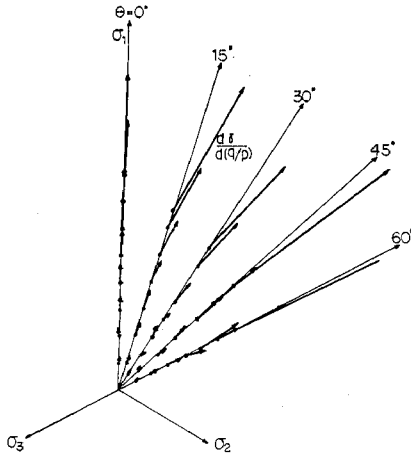


図-8 応力経路とせん断ひずみ増分方向

$q/p$  の増分との比をもって表わした。

図によれば圧縮および伸張においては応力経路とせん断ひずみ増分方向は一致しているが、 $\theta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  では  $q/p$  が増大するにしたがって漸次ある特定の向きにずれを生じ、それは  $q/p$  の増大とともに大きくなる傾向を示している。このような傾向はせん断初期においてはせん断応力の方向と土粒子の最も移動する方向とが一致しているが、 $q/p$  の増大とともにそれらの方向がずれて、破壊に近い状態では  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  平面内で土粒子の移動が最も著しくなり、 $\sigma_2$  の大きさにかかわらず  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  平面内に破壊面が発生する過程を示しているものと考えられる。

Yong・Mckyes<sup>11)</sup> は練り返した粘土の非排水条件での

多軸圧縮試験からあるせん断応力の範囲内ではせん断ひずみ増分方向とせん断応力の方向が一致し、Prandtl-Reuss の関係が成立するが、せん断応力が大きくなるとせん断ひずみ増分方向は応力経路の方向に無関係に一定の方向になること、また微視的な観察からそれが破壊面の発生に帰因するものであるとのべている。

(2)  $q/p$ -体積・せん断ひずみ増分比 ( $dv/dr$ ) の関係

供試体がある応力状態 ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) にあり、それに微小な主応力増分 ( $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ ) を加えてせん断したとき、それぞれ  $d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3$  の主ひずみ増分が生じたとする。主応力と主ひずみ増分の方向が一致するものとして主応力空間、主ひずみ増分空間でのベクトルを  $\sigma, d\epsilon$  とすると

$$\sigma = \sigma_1 i + \sigma_2 j + \sigma_3 k = \sqrt{3} pl + \sqrt{3} qm$$

$$d\epsilon = d\epsilon_1 i + d\epsilon_2 j + d\epsilon_3 k = \frac{1}{\sqrt{3}} dv l + \frac{1}{\sqrt{3}} dr n$$

ここに

$i, j, k = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  軸方向の単位ベクトル

$l =$ 主応力空間および主ひずみ空間の対角線軸方向の単位ベクトル

$m =$ 主応力空間の対角線軸に垂直なせん断応力方向の単位ベクトル

$n =$ 主ひずみ空間の対角線軸に垂直なせん断ひずみ増分方向の単位ベクトル

である。

このとき外力のなす単位体積あたりの仕事  $dE$  は高次の微小項を無視すると次のように表わされる。

$$dE = (\sigma \cdot d\epsilon) = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 + \sigma_3 d\epsilon_3 = pdv + qdr(m \cdot n) \dots \dots \dots (5)$$

$m$  と  $n$  のなす角度を  $\alpha$  とすると式 (5) は次のようである。

$$dE = pdv + qdr \cos \alpha \dots \dots \dots (6)$$

角度  $\alpha$  はせん断応力の方向とせん断ひずみ増分方向とのなす角度で図-8 に示したずれの角度に等しい。

砂のような非粘性土では可逆的な弾性変形成分は塑性変形成分に比べて著しく小さいので全変形量が不可逆的な変形であり、外力のなした仕事はすべての供試体内部の摩擦によって逸散されるものと仮定する。

Schofield・Wroth<sup>12)</sup> は仮想的な粒状体のモデルとして Granta れきに対して逸散エネルギーは  $Mp \cdot dr$  ( $M$ : 摩擦係数) に等しいとしている。ここでも同様の仮定が成りたつものとするれば式 (6) より

$$dE = pdv + qdr \cos \alpha = Mp \cdot dr \dots \dots \dots (7)$$

が得られ、辺々を  $pdr$  で除すると次の  $q/p$ - $dv/dr$  関係式が得られる。

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{\cos \alpha} \left( M - \frac{dv}{dr} \right) \dots \dots \dots (8)$$

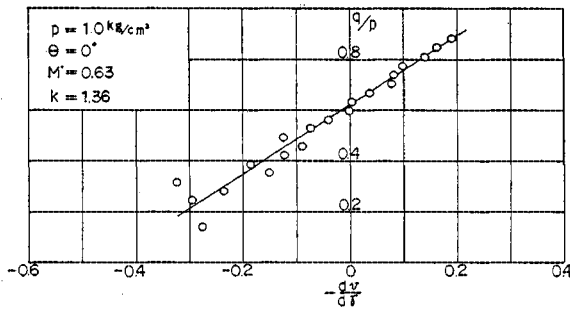


図-9 (A) 応力比-ひずみ増分比の関係

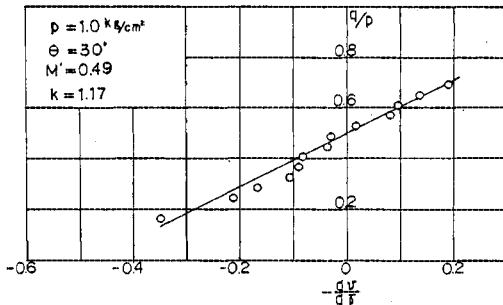


図-9 (B) 応力比-ひずみ増分比の関係

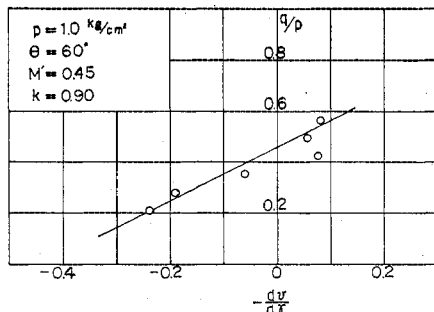


図-9 (C) 応力比-ひずみ増分比の関係

式 (8) の妥当性を検討するために各応力経路に対して  $q/p(-dv/dr)$  関係を示したのが 図-9 である。この図から  $q/p$  が小さいせん断初期を除いては応力経路に関係なく直線的関係を示すことがわかる。しかしながら直線の勾配および  $q/p$  軸切片  $M'$  は変化し、応力経路が圧縮に近づくほど勾配、 $M'$  ともに大きくなっている。Matsuoka・Nakai<sup>13)</sup> も正 8 面体応力とひずみ増分で整理し同様な傾向のあることを指摘している。したがって実験結果は式 (8) に代って次のように表示するのが適当であろうと考えられる。

$$\frac{q}{p} = M' - k \frac{dv}{dr} \dots\dots\dots (9)$$

ここに

$M' = q/p - dv/dr$  直線の  $q/p$  軸切片の値

$k = q/p - dv/dr$  直線の勾配

$M'$  は応力経路によって変化する係数であり、各応力経路に対する実験値を示すと 図-10 のようで

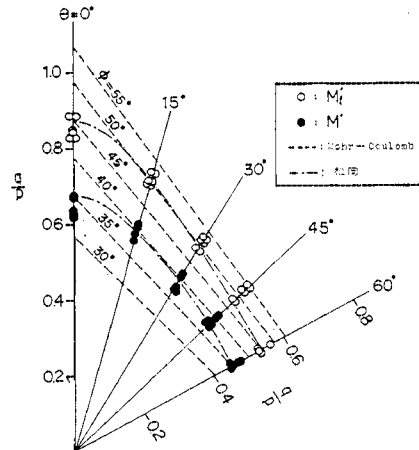


図-10 各応力経路における  $M'$  および  $M'$

ある。 $M'$  の値は圧縮から伸張になるにしたがって小さくなり  $\pi$  平面上では外に向って凸な曲線になるが、これは後述の破壊時の  $q/p$  の値と同じ傾向を示している。

松岡<sup>14)</sup> はせん断過程におけるモービライズド面 (土粒子の最も移動する面) 上での土粒子の挙動の微視的解析から応力比-ひずみ増分比関係として次式を提案している。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \mu - \lambda \frac{d\epsilon_N}{dr'} \dots\dots\dots (10)$$

ここに

$\tau$  = モービライズド面上でのせん断応力

$\sigma_N$  = モービライズド面上での垂直応力

$d\epsilon_N$  = モービライズド面上での垂直ひずみ増分

$dr'$  = モービライズド面上でのせん断ひずみ増分

$\mu, \lambda$  = 土の種類と状態によって定まる定数

である。

式 (9) と式 (10) は同形であり  $M'$  は  $\mu$  と、 $k$  は  $\lambda$  とそれぞれ対応している。さらに主応力の大きさによって定まる空間モービライズド面 (SMP 面) の存在を提案<sup>15)</sup> し、多軸応力条件下での土の応力-ひずみ関係が SMP 面上での応力、ひずみによって統一的に表現できることを明らかにしている。

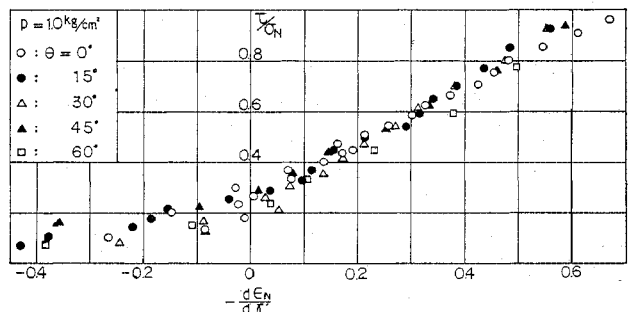


図-11 空間モービライズド面上での応力比-ひずみ増分比の関係

図-9 に示した結果を SMP 面での応力比, ひずみ増分比で整理したのが 図-11 である.  $q/p-dv/dr$  関係では係数  $M', k$  がともに応力経路に依存するのに対し,  $\tau/\sigma_N-d\epsilon_N/dr'$  関係では応力経路の方向にかかわらずひとつの直線で表現できるようである.

試験から塑性せん断ひずみと  $q/p$  の間に双曲線による近似が成り立つことを示している. このように土の応力-ひずみ関係を双曲線で表示することは実験から求められる2つの係数のみによって応力-ひずみ関係が表現できるという点で簡便かつ魅力あるひとつの手法である

(3)  $q/p$ -せん断ひずみ ( $\gamma$ ) の関係

Kondner<sup>15)</sup> は土の応力-ひずみ関係の非線型特性が双曲線によって高い精度をもって表わされることを示した. また諸戸ら<sup>16)</sup> はガラスビーズに対する排水3軸圧縮

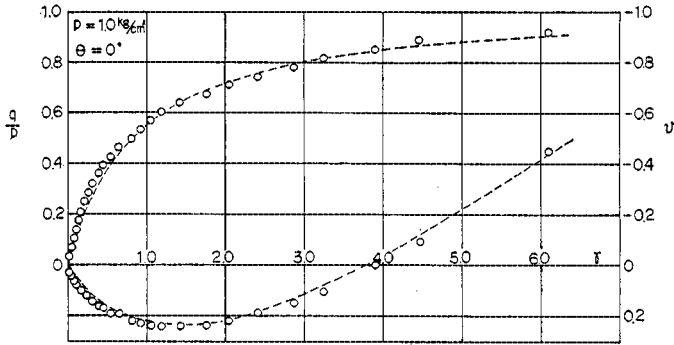


図-12 (A) 応力比-ひずみ関係

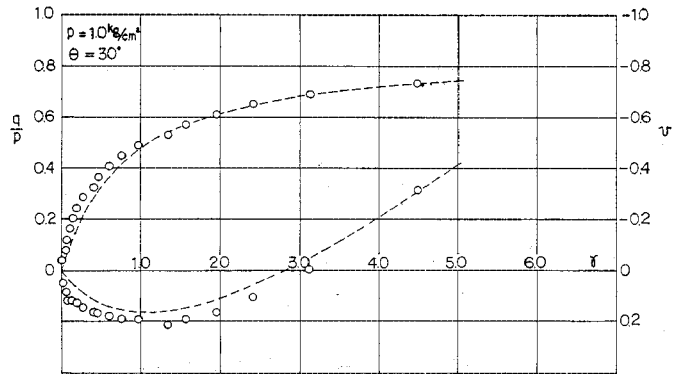


図-12 (B) 応力比-ひずみ関係

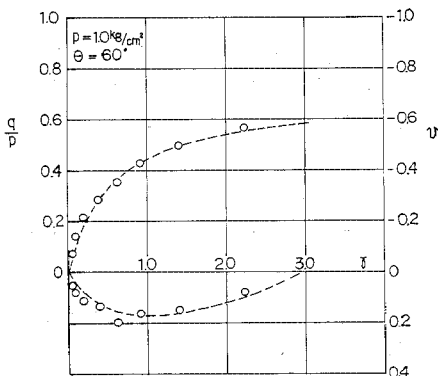


図-12 (C) 応力比-ひずみ関係

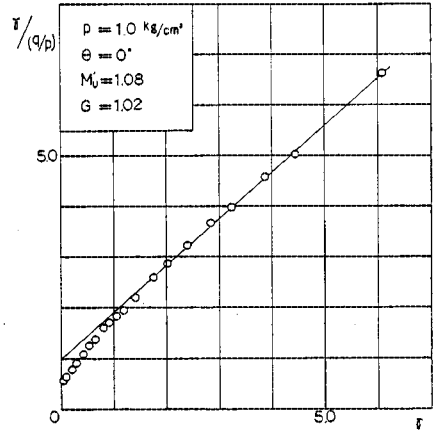


図-13 (A)  $\tau/(q/p)$ - $\gamma$  関係

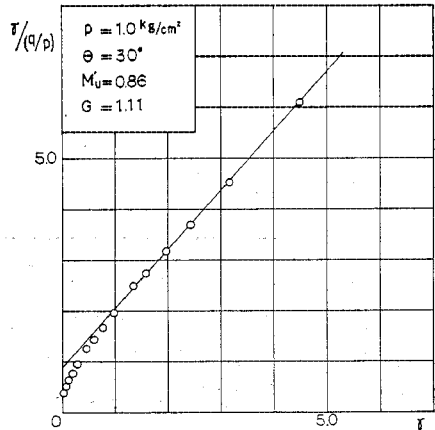


図-13 (B)  $\tau/(q/p)$ - $\gamma$  関係

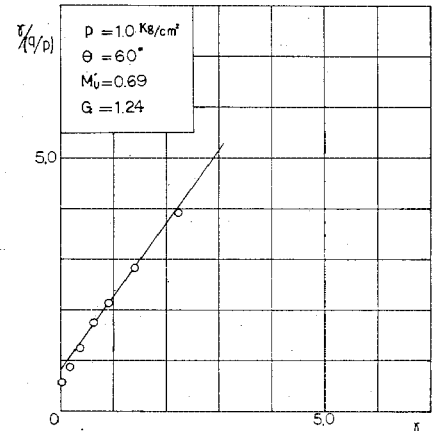


図-13 (C)  $\tau/(q/p)$ - $\gamma$  関係

といえる。

図-12 に  $q/p$ -せん断ひずみ ( $r$ ) の関係を示した。ここで  $r$  は  $dr$  の総和

$$r = \int dr \text{ (計算では } \sum dr \text{ を行った)}$$

を表わしている。この図より応力経路が圧縮から伸張状態になるにしたがって同じ  $r$  を発生させるのに要する  $q/p$  の値が小さくなっていること (これは後述の破壊時の  $q/p$  の値と同じ傾向である) が明らかである。しかし曲線そのものの性質は応力経路によらないようである。これら曲線の双曲線近似が可能か否かを調べるため  $r/(q/p)$ - $r$  関係を 図-13 に示した。この図からせん断初期を除いた範囲では次のような直線関係を満足することがわかる。

$$\frac{r}{(q/p)} = a + br \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 $a, b$ =直線の  $r/(q/p)$  軸切片、勾配である。また

$$G = \frac{1}{a} = r - \frac{q}{p} \text{ 双曲線の初期勾配}$$

$$M_u' = \frac{1}{b} = r - \frac{q}{p} \text{ 双曲線の漸近値}$$

とおくと、 $G, M_u'$  はそれぞれ初期接線せん断弾性係数、せん断強さに関係する係数である。これらの係数を式 (11) に代入すると  $q/p$ - $r$  関係は次のような双曲線によって与えられる。

$$\frac{q}{p} = \frac{GM_u'r}{M_u' + Gr} \dots\dots\dots(12)$$

図-13 から求めた係数  $G, M_u'$  を用い式 (12) より求めた計算値を 図-12 に破線で示したが、せん断初期を除いて実験値とよい一致を示しており  $q/p$ - $r$  関係は双曲線によって表現することができる。

(4) 破壊時の  $q/p (=M_f')$  について

土がせん断応力を受けると土粒子は相互に移動しせん断変形を生ずる。せん断応力が増大するにつれてせん断変形も増加するが、破壊状態に達すると変形は著しく流動的になり応力-ひずみ関係は破壊状態に達する以前とは異なるものと考えられる。ここでは  $q/p$  と  $r$  の関係が変化する応力比をもって、破壊時の応力比  $(q/p)_f = M_f'$  を決定した。 $q/p$  と  $r$  の関係を表現するひとつの方法として  $q/p$ - $\log r$  の関係の一例を 図-14 に示した。図から  $q/p$  の小さな範囲では曲線的な傾向を示すが、 $q/p$  の増大とともに直線的になりさらに  $q/p$  が大きくなると折れ曲がり点 ( $q/p=0.73$ ) が存在し、それ以降では  $r$  の変化が大きくなっている。このような値を境にして  $q/p$  が大きくなると変形はより流動的になって破壊状態に達しているものと考えられるのでこのよう

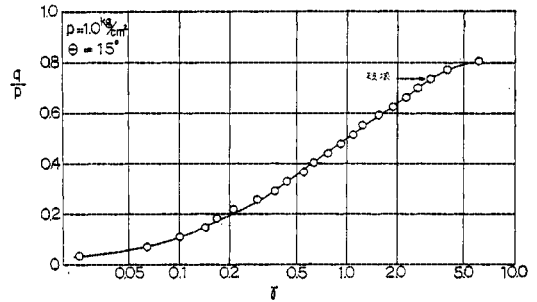


図-14 応力比-ひずみ関係と破壊時の応力比

な折れ曲がり点の  $q/p$  を破壊時の  $(q/p)_f = M_f'$  とした。Ko・Scott<sup>17)</sup> は  $q/p$ - $\log \epsilon$  関係から同じように破壊を定めている。

以上のようにして求めた破壊時の応力比  $(q/p)_f = M_f'$  を 図-10 に示した。図中には粘着力のない土に対するモール・クーロンの破壊条件を破線で示した。 $M_f'$  の値は応力経路が圧縮のとき最も大きく、伸張状態では小さい。モール・クーロンの破壊条件と比較すると破壊時の  $\phi'$  は伸張では圧縮における値より 2~6% 大きく、 $\theta=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  の応力経路では 14~18% 大きい。したがって破壊条件は  $\pi$  平面上で外に向って凸な曲線となる。

松岡<sup>18)</sup>の提案する降伏条件

$$\frac{J_1 \cdot J_2}{J_3} = 9(K^2 + 1) = \text{const} \dots\dots\dots(13)$$

ここに

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

を同じ図に一点鎖線で示した。実験値はこの降伏条件により近いようである。

5. 平均主応力一定条件での応力-ひずみ関係式

(1)  $q/p$ -体積ひずみ ( $v$ ) 関係式

前章で  $q/p$ - $dv/dr$  および  $q/p$ - $r$  の関係がそれぞれ次のような直線および双曲線によって表現できることを実験結果に基づいて確かめた。

$$\frac{q}{p} = M' - k \frac{dv}{dr} \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{q}{p} = \frac{GM_u'r}{M_u' + Gr} \dots\dots\dots(12)$$

上記の2式を  $r=0$  あるいは  $q/p=0$  のとき  $v=0$  なる初期条件で解くと次のような  $r$ - $v$  および  $q/p$ - $v$  関係式が得られる。

$$v = \frac{1}{k} \left\{ (M' - M_u')r + \frac{M_u'^2}{G} \ln \left( 1 + \frac{G}{M_u'} r \right) \right\}$$



$$= \frac{M_u'}{kG} \left\{ (M' - M_u') \frac{\eta}{(M_u' - \eta)} + M_u' \ln \left( \frac{M_u'}{M_u' - \eta} \right) \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $\eta = (q/p)$  である。

$dv/dr = 0$  のとき最大圧縮点となり、このとき  $q/p = M'$  であるから最大圧縮体積ひずみは

$$v_{\max} = \frac{M_u'}{kG} \left\{ -M' + M_u' \ln \left( \frac{M_u'}{M_u' - M'} \right) \right\} \dots\dots\dots (15)$$

より得られる。

図-12 に式 (14) を用いた計算結果を破線で示した。計算に用いた係数  $k, M', G, M_u'$  はそれぞれ  $q/p-dv/dr$  および  $\tau/(q/p)-\tau$  の直線関係から求めた。計算値は実験値に比較して圧縮に対してやや過小な値を示しているが、よく一致しており  $q/p-v$  関係の特徴を十分に表現しているものと考えられる。

式 (14) と砂の一般的な応力-変形特性の関係について考えてみる。密な砂とゆるい砂の応力比-変形関係を示したのが図-15 である。ゆるい砂では  $M' = M_u'$  であり、式 (14) の右辺第 1 項はゼロとなり、体積ひずみはせん断ひずみの増加とともに増大する。せん断ひずみが無限に大きくなると体積ひずみも無限大となり実際と矛盾するが、体積ひずみが収縮する範囲では式 (14) で十分近似されるものと考えられる。一方密な砂ではピーク強さが存在し、それを越えると応力比は低下し残留強さに達する。ピーク強さ以前のせん断過程に注目すれば、この場合  $M' < M_u'$  であるので式 (14) は図中の OA に示すような極値をもつと線を描き、最大圧縮時の体積ひずみは式 (15) で与えられる。

(2)  $q/p$ -主ひずみ関係式

体積ひずみ増分、せん断ひずみ増分およびせん断ひずみ増分方向は主ひずみ増分の関係を再掲すると次のようである。

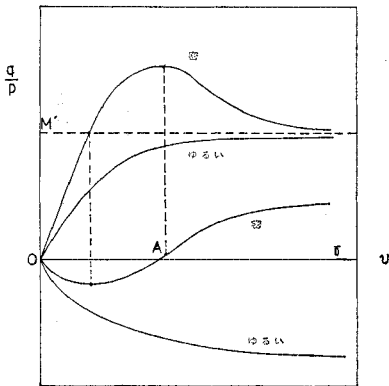


図-15 応力比-ひずみの一般的関係

$$dv = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 \dots\dots\dots (3)$$

$$dr = \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$\tan(\theta + \alpha) = \sqrt{3} \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3}{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)} \dots\dots\dots (16)$$

ここで  $\alpha$  は既述のように  $\pi$  平面におけるせん断応力の方向とせん断ひずみ増分方向とのなす角度で、図-8 で圧縮状態から時計回りを正としている。

上の 3 式より主ひずみ増分を  $dv, dr$  および  $\alpha$  を用いて表わすと

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{3} \{ dv + \sqrt{2} \cos(\theta + \alpha) dr \} \dots\dots\dots (17)$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{1}{3} \left[ dv - \frac{\sqrt{2}}{2} \{ \cos(\theta + \alpha) - \sqrt{3} \sin(\theta + \alpha) \} dr \right] \dots\dots\dots (18)$$

$$d\varepsilon_3 = \frac{1}{3} \left[ dv - \frac{\sqrt{2}}{2} \{ \cos(\theta + \alpha) + \sqrt{3} \sin(\theta + \alpha) \} dr \right] \dots\dots\dots (19)$$

となる。これらの式に式 (9), (12) を代入すれば、 $\alpha$  の値が既知の場合に積分が可能となり応力比-主ひずみ関係式が得られる。

特別な場合として圧縮状態についてを考えてみると、 $\theta = 0^\circ, \alpha = 0^\circ$  であるから式 (17), (18), (19) より主ひずみ増分はそれぞれ次のようである。

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{3} (dv + \sqrt{2} dr) \dots\dots\dots (20)$$

$$d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = \frac{1}{3} (dv - \frac{\sqrt{2}}{2} dr) \dots\dots\dots (21)$$

上に (9), (12) の関係を用いて  $q/p = \eta = 0$  のとき、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  なる初期条件で解くと

$$\varepsilon_1 = \frac{M_u'}{3G} \left\{ \left( \frac{M' - M_u'}{k} + \sqrt{2} \right) \frac{\eta}{M_u' - \eta} + \frac{M_u'}{k} \ln \left( \frac{M_u'}{M_u' - \eta} \right) \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{M_u'}{3G} \left\{ \left( \frac{M' - M_u'}{k} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\eta}{M_u' - \eta} + \frac{M_u'}{k} \ln \left( \frac{M_u'}{M_u' - \eta} \right) \right\} \dots\dots\dots (23)$$

が得られる。

一方伸張状態では  $\theta = 60^\circ, \alpha = 0^\circ$  であるから同様にして応力比-主ひずみ関係が得られる。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{M_u'}{3G} \left\{ \left( \frac{M' - M_u'}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\eta}{M_u' - \eta} + \frac{M_u'}{k} \ln \left( \frac{M_u'}{M_u' - \eta} \right) \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{M_u'}{3G} \left\{ \left( \frac{M' - M_u'}{k} - \sqrt{2} \right) \frac{\eta}{M_u' - \eta} \right\}$$

$$+ \frac{M_u'}{k} \ln \left( \frac{M'}{M_u' - \eta} \right) \} \dots \dots \dots (25)$$

図-7 に式 (22)~(25) で求めた計算値を破線で示した。実験値と計算値はよく一致しており、これらの式が圧縮・伸張試験の応力比-主ひずみ関係を表現する特性を十分に備えているものと考えられる。

圧縮、伸張試験以外の応力経路においては $\alpha$ はゼロではなく、ある特性をもっていることはあきらかである。しかしながら各応力レベルごとのばらつきが大きく、 $\alpha$ と応力比あるいはせん断ひずみとの関係を明らかにし、定量化することはできなかった。図-7 には  $\theta=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  の応力経路に対して  $\alpha=0^\circ$  としたときの計算値を比較のために破線で示したが、圧縮、伸張試験ほど精度はよくない。一般的な応力条件下での応力-ひずみ関係を明確にするには、今後ともせん断応力の方向とせん断ひずみ増分方向とのずれについてさらに検討し、明らかにしなければならぬと考えている。

## 6. 結 言

乾燥砂の多軸応力条件下でのせん断特性について、特に平均主応力一定条件で中間主応力が砂のせん断強さおよび変形に及ぼす影響を実験的に調べた。得られた結果を要約すると次のようである。

(1) せん断応力の増大とともに、圧縮・伸張試験以外の  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  条件下での試験ではせん断応力の方向とせん断ひずみ増分方向が一致せず、特定の方向にずれてくる。このようなずれはせん断の進行に伴い、中間主応力によってその方向の砂粒子の相対移動が拘束され、破壊状態に近づくとすべり面が  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  平面内に発生するためと考えられる。

(2) 破壊時の  $\phi'$  は圧縮試験において最も小さく、伸張試験では圧縮試験に比べて2~6%大きく、 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  の応力条件では14~18%大きい。したがって破壊曲面は  $\pi$ -平面上で外に向って凸な曲線を示す。

(3) せん断過程の主要な部分において、 $q/p$  と  $(-dv/dr)$  の間に

$$\frac{q}{p} = M' - k \frac{dv}{dr}$$

なる直線的関係があるが、定数  $M'$ ,  $k$  は応力条件によって変化し、圧縮状態ではともに最大となり、伸張状態なるにしたがって小さくなる。また  $q/p$  と  $r = \int dr$  の関係は

$$\frac{q}{p} = \frac{GM_u'r}{M_u' + Gr}$$

なる双曲線で近似される。

(4) 実験から求めた4個の係数  $M'$ ,  $k$ ,  $M_u'$ ,  $G$  と上記の2式を用いて、せん断応力の方向とせん断ひずみ

増分方向が一致するという条件のもとで、3軸圧縮および伸張状態における  $q/p$  と  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  の関係が簡単な形で得られることを示した。

今後はより広範な応力条件のもとでの各係数の特性を明らかにするとともにせん断応力の方向とせん断ひずみ増分方向のずれをも考慮してより一般的な応力-ひずみ関係式を求めるよう努力したいと考えている。

謝 辞：末筆ながら日頃から懇切なご指導と激励をいただいております。浅川美利教授に深謝いたします。本文は昭和50年度私学研修生として京都大学防災研究所で研修中にまとめたものである。心よく研修をお引き受けいただきました京都大学村山朗郎名誉教授、柴田徹教授、また直接ご指導いただきました松岡元助教授に心より感謝の意を表します。また本文をまとめるにあたって助力いただいた本学副手下辺 信氏に感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) Kjellman, W.: Report on an Apparatus for Consummate Investigation of the Mechanical Properties of Soils, Proc. of 1st Int. Conf. SMFE, Vol. 2, pp. 16~20, 1936.
- 2) Ko, H.Y. and Scott, R.F.: Deformation of Sand at Failure, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. SM 4, pp. 883~898, 1968.
- 3) Shibata, T. and Karube, D.: Influence of the Variation of Intermediate Principal Stress on the Mechanical Properties of Normally Consolidated Clays, Proc. of 6th Int. Conf. SMFE., Vol. 1, pp. 359~363, 1965.
- 4) Sutherland, H.B. and Mesdary, M.S.: The Influence of the Intermediate Principal Stress on the Strength of Sand, Proc. of 7th Int. Conf. SMFE., Vol. 1, pp. 391~399, 1969.
- 5) Bishop, A.W., Green, G.E. and Skinner, A.E.: Strength and Deformation Measurements on Soils, Proc. of 8th Int. Conf. SMFE., Vol. 1, Part 1, pp. 57~64, 1973.
- 6) Kirkpatrick, W.M.: The Condition of Failure for Sands, Proc. of 4th Int. Conf. SMFE., Vol. 1, pp. 172~178, 1957.
- 7) Arnold, M. and Mitchell, P.W.: Sand Deformation in Three-Dimensional Stress State, Proc. of 8th Int. Conf. SMFE., Vol. 1, Part 1, pp. 11~18, 1973.
- 8) Ko, H.Y. and Scott, R.F.: A New Soil Testing Apparatus, Geotechnique, Vol. 17, Mar, pp. 40~57, 1967.
- 9) 市原松平・松沢 宏：平面ひずみ状態と軸対称ひずみ状態における乾燥砂のせん断特性，土木学会論文報告集，No. 173, pp. 47~59, 1970.
- 10) 軽部大蔵・原田柁四郎：繰り返し粘土の平面変形条件について，土木学会論文報告集，No. 147, pp. 1~9, 1967.
- 11) Yong, R.N. and Mckyes, E.: Yield and Failure of Clay under Triaxial Stresses, Proc. of ASCE., Vol. 97, No. SM 1, pp. 159~176, 1971.
- 12) Schofield, A.N. and Wroth, C.P.: Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill, London, 1968.

- 13) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-Deformation and Strength Characteristics of Soil under Three Different Principal Stresses, Proc. of JSCE., No. 232, pp. 59~70, 1974.
  - 14) Matsuoka, H. : A Microscopic Study on Shear Mechanism of Granular Materials, Soil and Foundation, Vol. 14, No. 1, pp. 29~43, 1974.
  - 15) Kondner, R.L. : Hyperbolic Stress-Strain Response; Cohesive Soils, Proc. of ASCE., Vol. 89, No. SM 1, pp. 115~143, 1963.
  - 16) 諸戸靖史・連藤秋主・河上房義 : ガラスビーズにおける粒状体の三軸圧縮特性, 土木学会論文報告集, No. 239, pp. 47~56, 1975.
  - 17) Ko, Y.H. and Scott, R.F. : Deformation of Sand in Shear, Proc. of ASCE., Vol. 93, No. SM 5, pp. 283~310, 1967.
  - 18) 松岡 元 : 土の応力-ヒズミ関係と降伏条件, 京大防災研年報, 第 18 号, B, pp. 323~331, 1975.  
(1976.2.16・受付)
-