

## ブロック有限要素法による薄肉箱桁の立体解析

### THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF THIN-WALLED BOX GIRDERS BY BLOCK FINITE ELEMENT METHOD

坂井 藤一\*・長井 正嗣\*\*・佐野 信一郎\*\*\*

By Fujikazu SAKAI, Masatsugu NAGAI and Shinichiro SANO

#### 1. ま え が き

近年大型の薄肉箱桁橋が多数建設されるに至り、その構造特性を解明するための研究もいろいろの角度から実施されてきている。箱桁橋の主要構造要素は4枚あるいはそれ以上の薄肉平板ないしは曲面板より構成される閉断面構造である。このような閉断面構造は単に箱桁橋のみでなく、斜張橋の主桁、吊橋の補剛桁、主塔などにも頻繁に使用されるものである。

一般に箱桁は、薄板が立体的に組み合わせられて閉断面を構成することにより剛性が極めて大きくなるという構造的に有利な面を持っているが、その反面典型的な薄肉構造として応力分布の不均一、変形の増大あるいは座屈不安定などの悪影響も招き易い構造である。したがってその使用にあたっては、本来面内、面外の変形により外力に抵抗する薄板の特性を考慮しつつ、桁全体の立体挙動を忠実に把握する必要がある。このような観点から箱桁の構造問題を考えると、主なものとしては、

- 1) 断面変形の問題
- 2) 有効幅の問題
- 3) 荷重分配の問題

などが挙げられる<sup>1)~3)</sup>。

断面変形に関する研究は、古くはEbner<sup>4)</sup>などによってもなされているが、近年ではVlasov<sup>5)</sup>の有名な著書が発行され、その後の研究に大きな影響を与えている。ドイツにおいては、薄肉構造研究の伝統を受け継ぎ、Resinger<sup>6)</sup>、Lacher<sup>7)</sup>、Dabrowski<sup>8)</sup>などによって報告がなされ、また英国ではRichmondら<sup>9)~11)</sup>による研究が報告されている。米国では文献1)以来関心が高まりWright, Abdel-Samad, Robinsonら<sup>12), 13)</sup>の報告を始

めとして数多くの研究がなされている。一方、わが国では能町・尾崎<sup>14), 15)</sup>、落合ら<sup>16), 17)</sup>、桜井・浜中・大沢<sup>18)</sup>、奥村・坂井<sup>19)~21)</sup>などの報告が挙げられ、現在もなお活発な研究が行われている。

有効幅に関する研究は1930年代より非常に数多くの報告がなされている<sup>22)</sup>。近年では福田<sup>23)</sup>、小松ら<sup>24), 25)</sup>、Abdel-Sayed<sup>26)</sup>、Ramberger<sup>27)</sup>、Malcolm and Redwood<sup>28)</sup>、de Boer<sup>29)</sup>などの研究があり、山村・成岡<sup>30)</sup>はこの問題に対する最近の展望を述べている。有効幅の問題自体はすでに古典的であるが、実用上の設計と関連して詳細に検討すべき点はまだ残されているように思われる。

荷重分配の問題は立体解析のもっとも基本的な問題として、せん断流理論または格子桁理論により検討されている。しかしながら、これらの検討方法では断面剛なる前提、あるいは有効幅の取り方など不十分な点があり、その点を改善して荷重分配作用を明確にすることが必要であると思われるが、解析の複雑さのゆえにあまりなされていない<sup>31)</sup>。

さて箱桁の立体解析手法をみると、大きくわけて次の6つに分類される。すなわち、

- 1) せん断流理論による解法
- 2) 張殻構造理論による解法
- 3) 折板理論による解法
- 4) 一般化座標法による解法
- 5) 有限帯板法による解法
- 6) 薄板有限要素法による解法

である。

1)のせん断流理論(ないしは薄肉構造理論)<sup>32)~34)</sup>は衆知のとおり断面形状不変の仮定に基づくはり理論であり通常のねじりとよばれる現象を扱う限りにおいては有効であるが、断面変形挙動を扱うことはできない。したがって隔板、対傾構の特性解明およびその設計計算に用いることはできない。むしろこれらが十分剛かつ密に配

\* 正会員 工博 川崎重工業(株) 鉄構事業部開発設計部  
\*\* 正会員 工修 川崎重工業(株) 鉄構事業部橋梁設計部  
\*\*\* 正会員 川崎重工業(株) 鉄構事業部橋梁設計部

備されているという仮定のもとに始めて成り立つ理論である。2) の張殻構造理論<sup>9)</sup>は航空機関係でよく用いられた理論であり<sup>22)</sup>、きわめて薄い平板とリブから成る構造に対して適用可能である。3) の折板理論<sup>35)</sup>は箱桁を構成する各薄肉平板に対して、面内応力および板曲げの混合問題として取り扱う。こうして各構成要素を境界部において力のつり合い、変位の適合を満足するように組み立てて解析するものである。4) の一般化座標法<sup>5)</sup>は、Vlasov の提案した手法であり、ちょうど 1) のはり理論と 3) の折板理論の中間的位置に存在する解法と考えられる。すなわち、この手法ははり理論の拡張として折板理論を展開するものであり、はり理論をその特別な場合として含み、それでは扱えないような断面変形挙動、せん断遅れ現象なども比較的簡単に考慮し得る利点をもつ。その際 Vlasov は変分原理の導入を行ったが\*、これは後年の有限要素法にも受け継がれる貢献である。5) の有限帯板法<sup>36), 37)</sup>は折板理論に有限要素法の考え方を採り入れて拡張したものである。この方法は有限要素法の欠点を改良しているが、折板理論同様境界条件の任意性や隔板、対傾構の取り扱いが複雑になるという欠点もある。6) の有限要素法<sup>38), 39)</sup>は局所的な現象を含めて現実の挙動を忠実に把握でき、また境界条件を任意に取り扱い得る点、隔板、対傾構を弾性体として任意に取り扱い得る点など非常に有効ではあるが、データ処理や計算機の容量、時間、費用などに問題が残る全体挙動を把握する上で必ずしも実用的であるといえ切れない。

本論は、以上のような観点から箱桁の立体挙動を解析するために有効と思われる一般化座標法に立脚した一解析手法を論ずるものである。ここでの一つの特長は、一般化座標法と有限要素法を結合することにより任意の境界条件や弾性的な隔板、対傾構を取り扱い得る点である。すなわち、本論文では一般化座標法により3次元場の問題を1次元場の問題に変換した上で有限要素法を適用しているが、その結果としてブロック有限要素法を開発したことになる。

ここでブロック有限要素法とは、固有の機能をもつ多自由度構造単位(ブロックとよぶ)を要素として用いる有限要素法と定義しておく。その意味でブロックとは単なる有限要素の集積ではない。概括的にいえば、通常の有限要素法との関係は化学における分子と高分子の関係に類似すると考えられよう。

本解法のおもな特長を挙げると以下のとおりである。

1) 一室箱桁のみならず Fig. 1 に示す張出しやリブの付いた多室箱桁が解析できる。Fig. 1 の断面は実際の箱桁断面をほぼ網羅していると考えられる。

2) 一般化座標の選定に考慮を払うことにより曲げ変

形に伴うせん断遅れ現象が解析できる。

3) 隔板、対傾構、横桁などの横結材を弾性体として取り扱える。

4) 境界条件が任意である。

5) 変断面桁の解析が可能である。

本論文においては、まずマトリックス定式化と計算精度の検討を行い、次に幾つかの応用例に基づき断面変形やせん断遅れの現象等が実用上十分な精度で解析できることを示す。本論文は、その意味で解法の提案であり、箱桁固有の問題に対する詳しい検討は別の機会に報告するつもりである。

## 2. 箱桁の基礎方程式

### (1) 一般化座標の選定

Fig. 2 に示すような基本断面形状を設定し、一般化座標法により直線箱桁の基礎微分方程式を誘導する。この基本断面形状の集合として Fig. 1 に示す各種断面タイプを取り扱うことができる。Fig. 2 に示すように軸方向座標を  $Z$ 、断面輪郭線方向座標を  $S$  とする。以後  $Z$  方向を縦方向、 $S$  方向を横方向とよぶ。各平板は  $Z$ - $S$  面内で平面応力状態にあるとする。 $Z$  および  $S$  方向の変位を  $u, v$  とし、ひずみを  $\{\epsilon_z, \epsilon_s, rz_s\}$ 、応力を

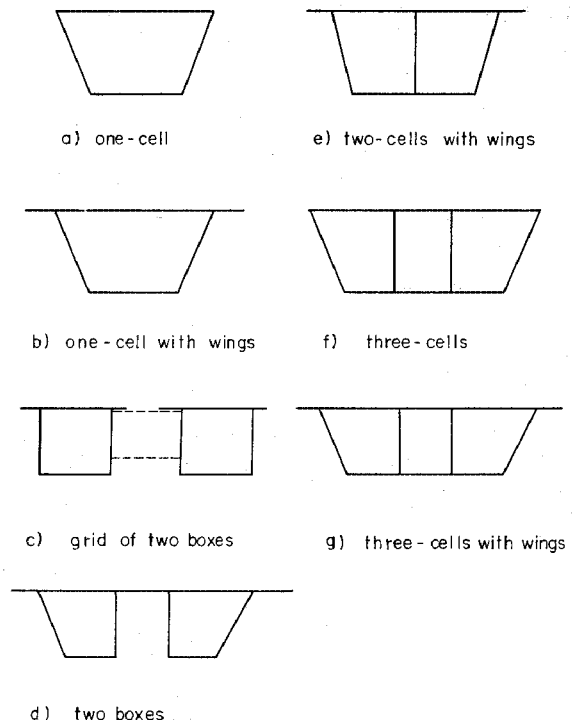


Fig. 1 Types of Cross Section in Box Girder

\* Kantrovich-Vlasov 法とよばれる変分原理となった。

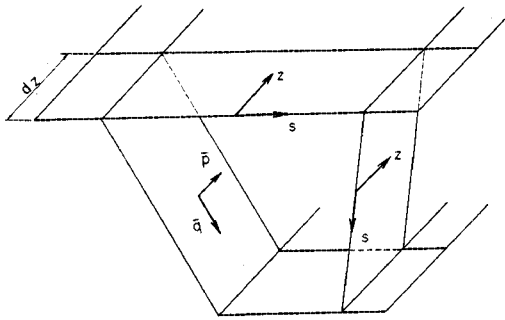


Fig. 2 Basic Cross Section

$\{\sigma_z, \sigma_s, \tau_{zs}\}$  とすれば、変位-ひずみ関係式および応力-ひずみ関係式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= u', \quad \epsilon_s = v, \quad \tau_{zs} = \dot{u} + v' \quad \dots\dots\dots (1 \cdot a, b, c) \\ \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_s \\ \tau_{zs} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & E\nu/(1-\nu^2) & 0 \\ \text{Sym.} & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_s \\ \tau_{zs} \end{Bmatrix} \\ &\dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ただし、( )' および ( ) $\dot{\phantom{x}}$  は Z および S に関する微分記号を表わし、E は縦弾性係数、G はせん断弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。

ここで、次のような理論の前提条件を考える。

- 1) 横方向の伸縮は無視する ( $\epsilon_s = 0$ )。
- 2) ポアソン比は無視する ( $\nu = 0$ )。
- 3) 板の面内剛性のみを考慮し、面外剛性は無視する。したがって、荷重も板の面内だけに作用するものとする (膜理論)。
- 4) リブは縦方向の剛性のみ考慮し、せん断剛性は無視する。

1), 2) は通常の薄肉はりの理論において採用される条件であり、3) も局部変形や特殊な場合を除いて成立する条件である。4) はリブが小さい場合には十分成り立つ条件である。

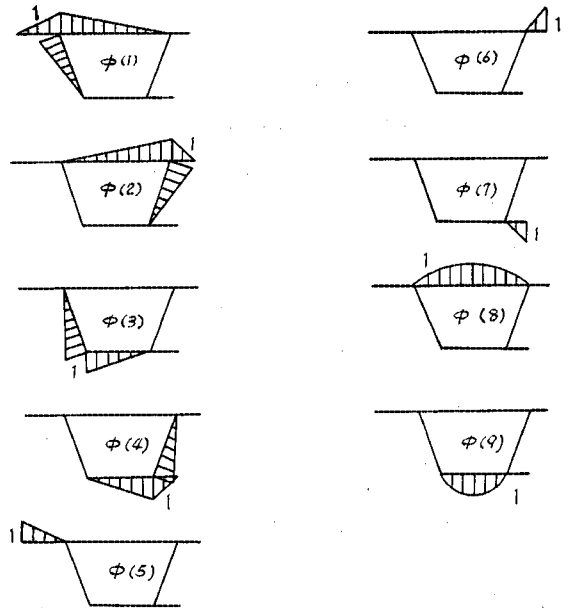
変位  $u, v$  を次のように仮定する。

$$u(Z, S) = \sum_{i=1}^9 \phi^{(i)}(S) \cdot U_i(Z) \quad \dots\dots\dots (3)$$

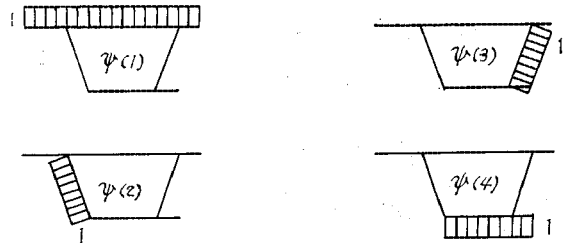
$$v(Z, S) = \sum_{j=1}^4 \psi^{(j)}(S) \cdot V_j(Z) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\phi^{(i)}(S)$  ( $i=1\sim 9$ ) および  $\psi^{(j)}(S)$  ( $j=1\sim 4$ ) はそれぞれ縦方向および横方向の変位の基本モードを表わす一般化座標であり、Fig. 3 に示されるようなものである。また、 $U_i(Z)$  ( $i=1\sim 9$ )、 $V_j(Z)$  ( $j=1\sim 4$ ) は一般化変位である。

今回採用した一般化座標について考えてみる。縦方向モード  $\phi^{(1)}\sim\phi^{(7)}$  は従来の折板理論においても採用されているものであり、実用上十分な結果を与えることが保証されている。また、 $\phi^{(8)}, \phi^{(9)}$  はせん断遅れを精度よく表現するものとして Reissner<sup>40)</sup> 以来採用されている放



a) longitudinal modes



b) transversal modes

Fig. 3 Generalized Co-ordinate

物線形状である。横方向モードは  $\epsilon_s = 0$  なる条件から必然的に採用されるものである。以上のモードの線形結合を考えれば、慣用はり理論における縦方向 4 モード (軸のび、2 方向の回転、そり) および横方向 3 モード (2 方向のたわみ、ねじり)、さらに Vlasov によって導入された断面変形モードはすべて表現される。それ以外の自由度はすべてせん断遅れに関するモードと考えるてよい。

(2) 仮想仕事の原理の適用

理論の前提条件および Hooke 則式 (2) から応力と変位の関係は次のようになる。

$$\sigma_z = E \left( \sum_{i=1}^9 \phi^{(i)} \cdot U_i' \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\tau_{zs} = G \left( \sum_{i=1}^9 \phi^{(i)} \cdot U_i + \sum_{j=1}^4 \psi^{(j)} \cdot V_j' \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

Fig. 2 に示す微小片について仮想仕事の原理を適用すると次の 2 式を得る。

$$\int_F \sigma_z \phi^{(m)} dF + \int_S \tau_{zs} \phi^{(m)} t dS + \int_S \bar{p} \phi^{(m)} dS = 0 \quad (m=1 \sim 9) \dots\dots\dots (7)$$

$$\int_S \tau_{zs} \psi^{(n)} t dS + \int_S \bar{q} \psi^{(n)} dS = 0 \quad (n=1 \sim 4) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\bar{p}$  および  $\bar{q}$  は縦方向および横方向の分布荷重であり、また  $t$  は板厚、添字  $F, S$  は全断面積および全周にわたる積分を示すものとする。

式 (7)、式 (8) を部分積分を用いて変形し、式 (5)、式 (6) を代入すると次のような微分方程式を得る。

$$E \sum_{i=1}^9 (A_{mi} U_i') - G \left( \sum_{i=1}^9 B_{mi} U_i + \sum_{j=1}^4 C_{mj} V_j' \right) + \bar{p}_m = 0 \quad (m=1 \sim 9) \dots\dots\dots (9)$$

$$G \left( \sum_{i=1}^9 C_{in} U_i + \sum_{j=1}^4 D_{nj} V_j' \right) + \bar{q}_n = 0 \quad (n=1 \sim 4) \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A_{mi} &= \int_F \phi^{(m)} \phi^{(i)} dF \\ B_{mi} &= \int_S \phi^{(m)} \phi^{(i)} t dS \\ C_{mj} &= \int_S \phi^{(m)} \psi^{(j)} t dS \\ D_{nj} &= \int_S \psi^{(n)} \psi^{(j)} t dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_m &= \int_S \bar{p} \phi^{(m)} dS \\ \bar{q}_n &= \int_S \bar{q} \psi^{(n)} dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

これをマトリックス表示すると次のようになる。

$$E([A(Z)] \cdot \{U'(Z)\})' - G([B(Z)] \cdot \{U(Z)\} + [C(Z)] \cdot \{V'(Z)\}) + \{\bar{p}(Z)\} = \{0\} \dots\dots (13)$$

$$G([C(Z)]^T \cdot \{U(Z)\} + [D(Z)] \cdot \{V'(Z)\})' + \{\bar{q}(Z)\} = \{0\} \dots\dots\dots (14)$$

式 (13)、式 (14) が Fig. 2 に示す基本断面形状を有する箱桁の基礎常微分方程式群である。

### 3. 有限要素法による解法

#### (1) Galerkin 法による有限要素法定式化

いま、Fig. 4 のような  $Z$  方向に長さ  $L_k$  の有限要素  $k (Z_k \leq Z \leq Z_{k+1})$  を考える。局部座標を  $x$  とし、形状関数を以下のように仮定する。

$$\{U(Z)\} = w^{(k)} \cdot \{U_k\} + w^{(k+1)} \cdot \{U_{k+1}\} \dots\dots (15)$$

$$\{V(Z)\} = w^{(k)} \cdot \{V_k\} + w^{(k+1)} \cdot \{V_{k+1}\} \dots\dots (16)$$

ここで、

$$w^{(k)} = 1 - x/L_k, \quad w^{(k+1)} = x/L_k$$

$\{U_k\}, \{U_{k+1}\}, \{V_k\}, \{V_{k+1}\}$  はそれぞれ要素  $k$  端、 $k+1$  端の節点変位ベクトルである。

式 (13)、式 (14) に Galerkin 法を適用すると次の式を得る。

$$\int_0^{L_k} [E([A] \cdot \{U'\})' - G([B] \cdot \{U\} + [C] \cdot \{V'\}) + \{\bar{p}\}] \cdot w^{(l)} dx = 0 \quad (l=k, k+1) \dots\dots\dots (17)$$

$$\int_0^{L_k} [G([C]^T \cdot \{U\} + [D] \cdot \{V'\})' + \{\bar{q}\}] \cdot w^{(l)} dx = 0 \quad (l=k, k+1) \dots\dots\dots (18)$$

式 (17)、式 (18) より部分積分を適用して次の式を得る。

$$\{\bar{P}_l\} = \int_0^{L_k} [E[A] \cdot \{U'\} \cdot w^{(l)} + G([B] \cdot \{U\} \cdot w^{(l)} + [C] \cdot \{V'\} \cdot w^{(l)})] dx \quad (l=k, k+1) \dots\dots\dots (19)$$

$$\{\bar{Q}_l\} = \int_0^{L_k} [G([C]^T \cdot \{U\} \cdot w^{(l)} + [D] \cdot \{V'\} \cdot w^{(l)})] dx \quad (l=k, k+1) \dots\dots\dots (20)$$

ここで、部材端外力ベクトル  $\{\bar{P}_l\}, \{\bar{Q}_l\}$  は次のように定義される。

$$\{\bar{P}_l\} = E[A] \cdot \{U'\} \cdot w^{(l)} \Big|_0^{L_k} + \int_0^{L_k} \{\bar{p}\} \cdot w^{(l)} dx \quad (l=k, k+1) \dots\dots\dots (21)$$

$$\{\bar{Q}_l\} = G([C]^T \cdot \{U\} + [D] \cdot \{V'\}) \cdot w^{(l)} \Big|_0^{L_k} + \int_0^{L_k} \{\bar{q}\} \cdot w^{(l)} dx \quad (l=k, k+1) \dots\dots\dots (22)$$

最終的には以下のような要素剛性マトリックス方程式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_k \\ \bar{Q}_k \\ \bar{P}_{k+1} \\ \bar{Q}_{k+1} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} U_k \\ V_k \\ U_{k+1} \\ V_{k+1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

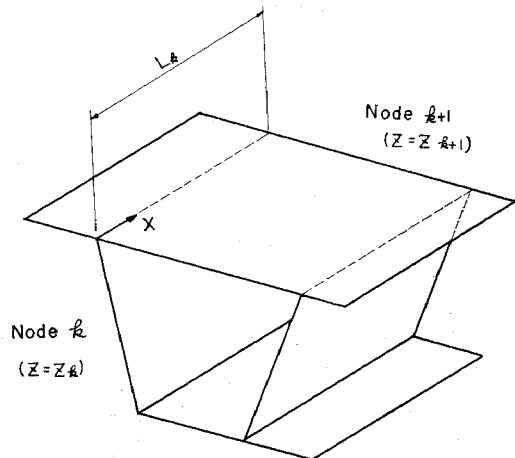


Fig. 4 Block Finite Element

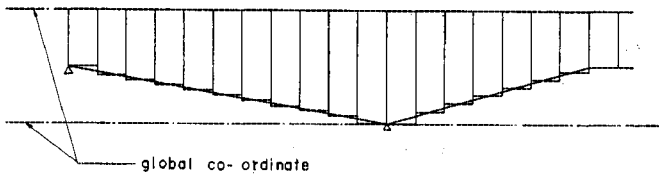


Fig. 5 Global Co-ordinates for variable Web Height

すなわち,  $[K]$  は Fig. 4 のブロック要素の剛性マトリックスである.

(2) 桁高さの変化する変断面桁の取り扱い

変断面桁の取り扱いは2種類考えられる. 一つは桁を等断面要素の集合体とみなして解析する手法であり, 他は変断面桁形状に対応する要素剛性マトリックスを利用して解析する手法である. 後者は要素剛性マトリックス

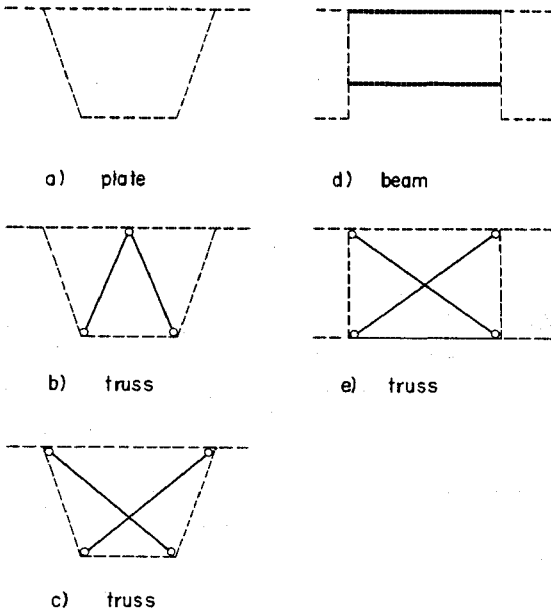


Fig. 6 Types of Diaphragms, Bracing and Cross Beam

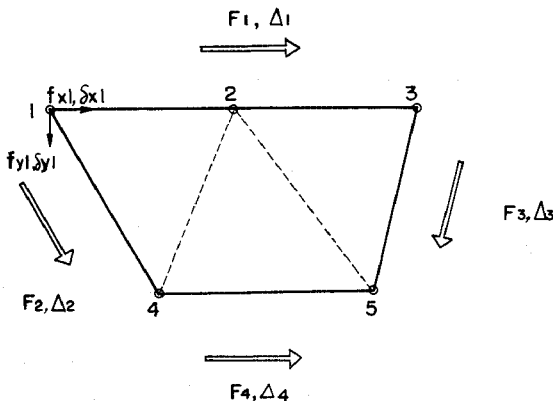


Fig. 7 Co-ordinate Transformation for a Diaphragm

の誘導が煩雑になるので, 本解法においては前者の手法を採用した. この場合変位の適合条件から, 要素剛性マトリックスを基準座標に対して変換する必要がある. 基準座標の設定は Fig. 5 に示すようにすればよい.

(3) 隔板, 対傾構, 横桁の取り扱い

隔板などは横方向に有限の剛性(弾性)を有し, 縦方向に剛性なしとした. Fig. 6 に今回採用した隔板, 対傾構, 横桁のタイプを示す. 弾性体としての取り扱いは以下のとおりである. まず, 板, はり, トラスについて通常の有限要素法で得られる剛性方程式を誘導する. 次に得られた剛性方程式の自由度とブロック有限要素の横方向自由度が対応するよう変換をおこなす. たとえば, Fig. 7 に示す板の場合, 三角形要素の集合とみなして剛性方程式を誘導する. すなわち局所座標系  $x, y$  について,

$$\{f\} = {}_{10}[k] \cdot \{\delta\} \dots\dots\dots (24)$$

これを基準座標系に変換して,

$$\{F\} = {}_4[T]^t \cdot {}_{10}[k] \cdot {}_{10}[T] \cdot \{d\} \dots\dots\dots (25)$$

なる剛性方程式を得る. ただし,  $[T]$  は変換マトリックスである. こうして得られた剛性マトリックス (4×4) をブロック有限要素の剛性マトリックスに重ね合わせればよい.

4. 計算精度の検討

一般に有限要素法は要素領域内で近似解(多項式近似)を用いるため, それに基づく誤差の問題が生じる. この誤差は有限要素の大きさを小さくするにつれて減少する. 今回の解法においても変位に区間直線近似を採用したために, それに伴う誤差の問題を解明しておく必要がある. 特に帯板ばりの場合, 通常の有限要素法で精度を保つことがなかなか困難であることが知られている<sup>4)</sup>. また, 集中荷重や連続桁中間支点部の近傍あるいは断面の急変部などの応力状態をどの程度正確に表現し得るかも問題である. したがって, ここではどのくらいの要素分割でよい精度の解が得られるかについての考察を行うことにする.

(1) 帯板ばりにおける精度

通常よく用いられる薄板有限要素法では解の収束性が悪いといわれている帯板片持ばりの例を本解法に基づいて解析してみる. モデルは Fig. 8 に示すような高さ 340 cm, 板厚 1.2 cm の腹板と軸力のみを負担するフランジで構成されているはりを用い, フランジ断面積および支間長を変化させて収束性を検討した.

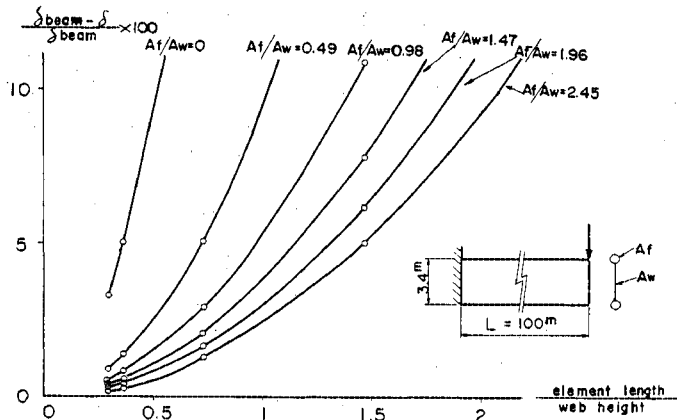


Fig. 8 Convergence of Deflection for the Values of  $A_f/A_w$

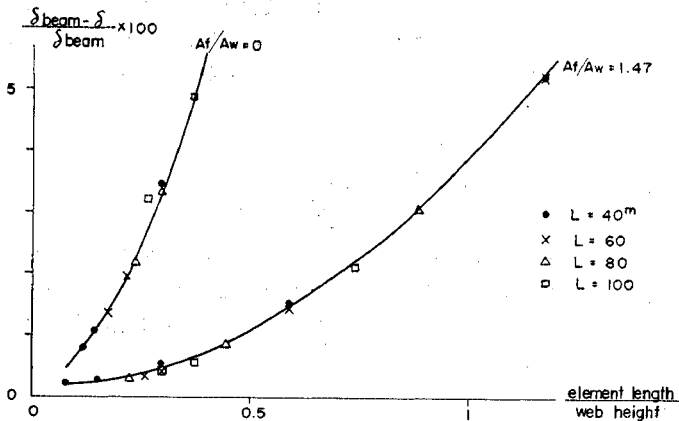


Fig. 9 Convergence of Deflection for the Values of  $L$

その結果を Fig. 8, 9 に示す。Fig. 8 は支間長 100 m の場合について先端たわみにおける誤差と要素長の関係をフランジ断面積 ( $A_f$ ) をパラメーターとして表示したものである。これより  $A_f$  が大きくなるにつれて収束性が良好になることがわかる。特に、帯板のみでは収束性が極端に悪いが、フランジの存在により収束性が著しく良くなることは注目に値する。Fig. 9 は同様の結果を支間長をパラメーターとして表示したものである。これより支間長にほとんど関係なく、 $A_f/A_w$  によるのみ収束性が決まることがわかる。このことから、たとえばたわみの誤差を 1% 程度にするためには、支間長に関係なく  $A_f/A_w=1.47$  の場合要素長をはり高さの 45% 程度にすればよいということがいえる。

(2) 等断面箱桁における精度

Fig. 10, 11 に精度比較のために採用した両端単純支持箱桁の断面形状、支間、荷重強度および断面定数を示す。有限要素法解析では Fig. 12 のような断面となる。このモデルでは断面変形を防止する意味で端ダイアフラム (板厚 2 cm) および 5 m おきの中間ダイアフラム

(板厚 1 cm) が配置されている。このモデルに対し 8 要素, 16 要素, 32 要素, 64 要素に等分割した計算を実施した。この時、計算時間については 1 ケースにつき C.P.U. time 約 1 sec である (使用計算機は IBM 370)。

Fig. 13~15 は最大たわみ, 最大曲げ応力, 最大フランジ回転角の要素分割による収束状態を示したものである。図中の実線はいわゆるはり理論による解である。いずれの場合にも要素数 32 (要素長 1.25 m) ぐらいではり理論に近い値に収束していることがわかる。

Fig. 13 においてたわみがはり理論の計算値より少し大きく出ているのはせん断遅れによる曲げ剛性低下を正しく反映しているためと考えられる。ちなみに平均曲げ応力は Fig. 14 のごとく両者の間で極めて良い一致を示している。また、フランジ最大回転角がはり理論 (Bredt) の計算値より少し大き目であるが、これは断面変形の影響であると考えられる。この場合トルク荷重による結果は良い一致を示している。

(3) 変断面桁における精度

Fig. 16 に示すような 2 種類の変断面桁について考えてみる。いずれも Fig. 10 の断面を基準として、a) は板厚を変化させ、b) は桁高さを変化させた。Fig. 17~19 は板厚変化する桁を 4.2 と同様に等分割した場合の曲げ応力分

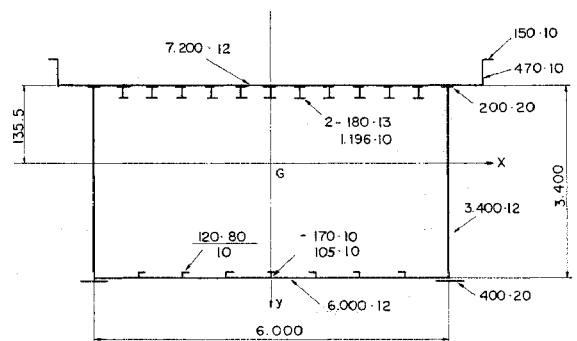


Fig. 10 Cross Section for Comparison

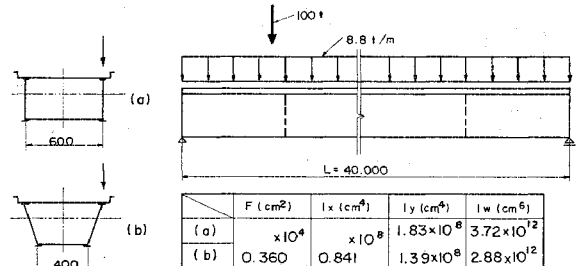


Fig. 11 Box Girder Model

布とせん断応力分布の結果である。図中 ⊙ はダイアフラム位置を示す。この場合、曲げ応力については要素数 32 ぐらいでほぼ理論による計算値と一致している。有限要素法解は板厚変化点においては理論の平均的な値を示すようであり、妥当な結果と見られる。せん断応力については要素数 16 ぐらいでほぼ収束している。しかしながら、通常の Bredt 理論による計算値とは多少異なっている。これは荷重が純粋のトルクではなく、いわゆるずり荷重であってダイアフラムと桁との間にせん

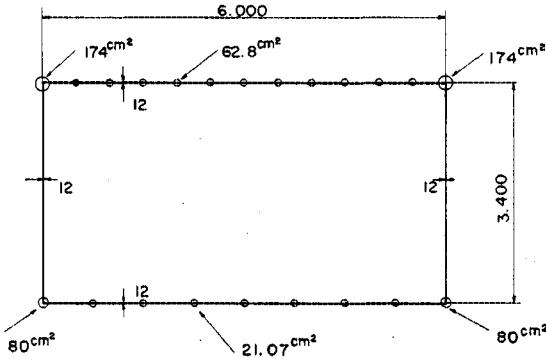
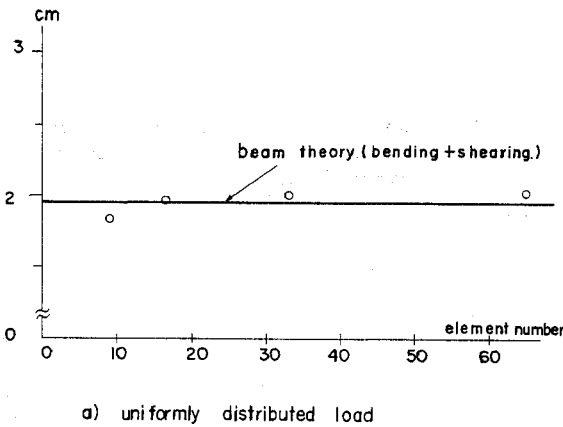
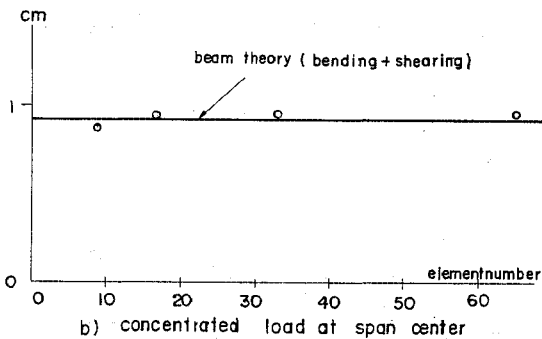


Fig. 12 Cross Section in B.F.E.M. Analysis

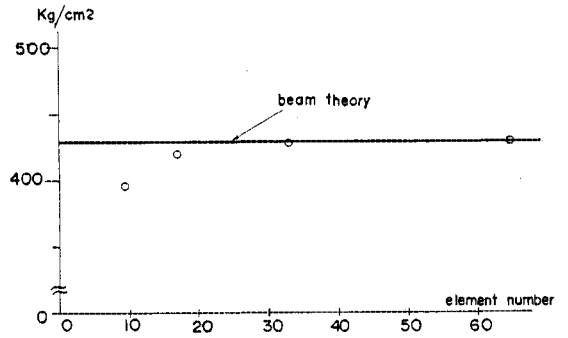


a) uniformly distributed load

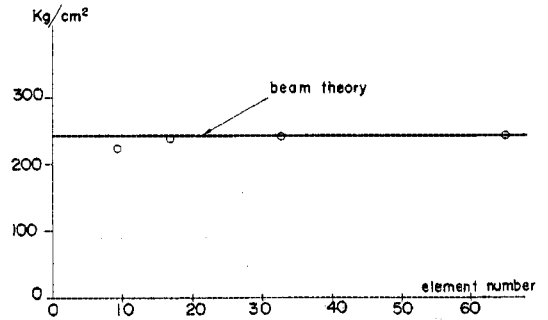


b) concentrated load at span center

Fig. 13 Convergence of max. Deflection

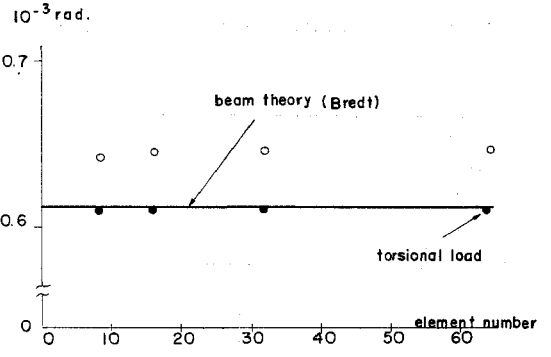


a) uniformly distributed load

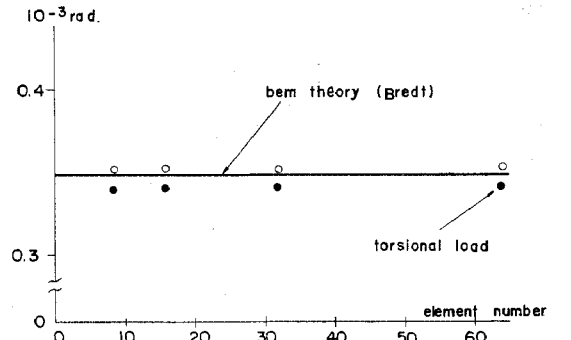


b) concentrated load at span center

Fig. 14 Convergence of max. bending Stress



a) uniform distorsional load



b) concentrated distorsional load at span center

Fig. 15 Convergence of max. rotational Angle of Flange

断力の伝達があるためである。等分布荷重の場合はこれが支間全長にわたって現われているが、集中荷重の場合には隣接する隔板の間でこの現象（腹板にしわよせがくる）がみられる。ちなみにトルク荷重の場合は Bredt 値との良い一致を示している。Fig. 20, 21 は桁高さの変化する桁における曲げ応力分布とせん断応力分布の結果である。この場合も板厚変化の変断面桁の場合とほぼ同様の結果を得た。

(4) 連続桁の中間支点部における精度

Fig. 22 に等分布満載荷重をうける等断面の2径間連

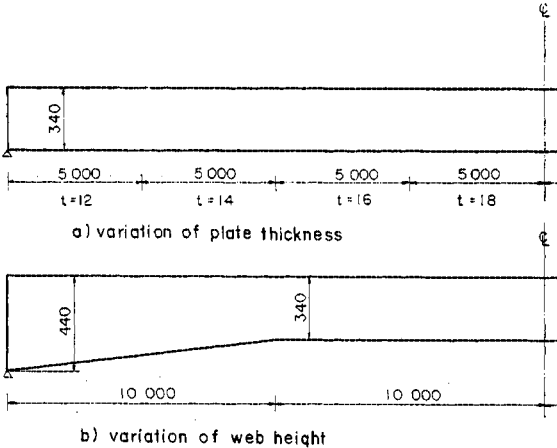


Fig. 16 Model of Girders with variable Cross Section

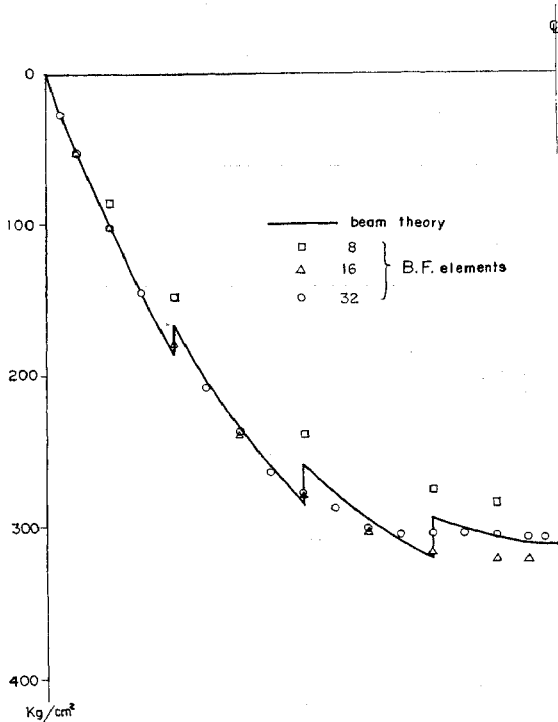


Fig. 17 Bending Stress Distribution in a Girder with variable Plate Thickness (uniform load)

続桁（断面は Fig. 10）の中間支点部における曲げ応力分布図を示す\*。この図より、前と同程度の要素分割状

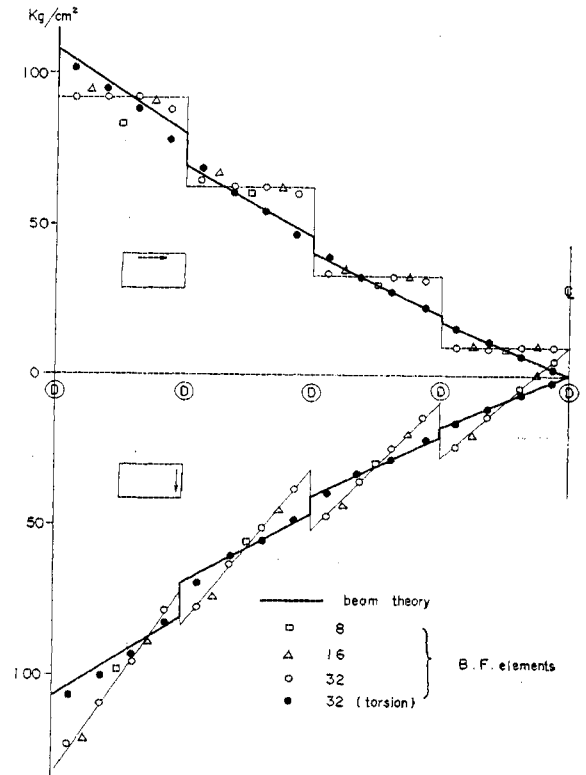


Fig. 18 Shear Stress Distribution in a Girder with variable Plate Thickness (uniform distortional load)

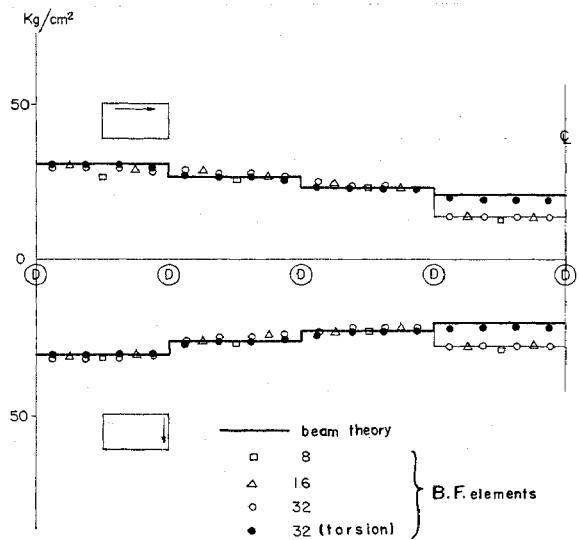


Fig. 19 Shear Stress Distribution in a Girder with variable Plate Thickness (concentrated distortional load at span center)

\* 図中 BFEM とは本論で導いた有限要素法による計算値である。



態で計算し外挿推定すれば、支点上の最大応力について十分な精度が得られることがわかる。また、はり理論による計算値との差は支間中央の反力が異なる（せん断遅れが考慮されている）ためである。

以上より、この程度の桁に対して要素長 1.25~1.5 m ぐらいで実用上十分な値が得られることがわかった。ここに述べた以外の荷重状態（たとえば等分布半載荷重など）や片持ばりなどの場合についても検討の結果ほぼ同

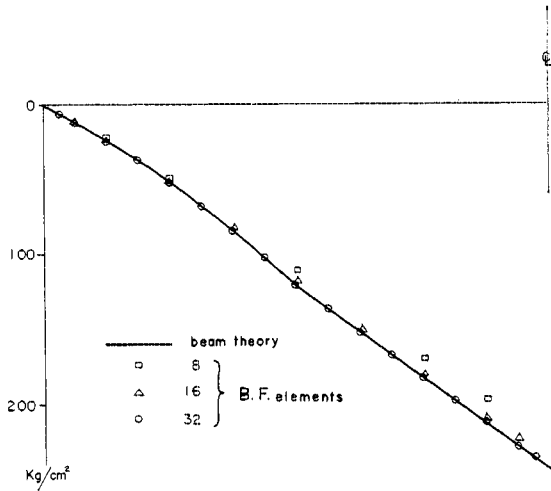


Fig. 20 Bending Stress Distribution in a Girder with variable Web Height (concentrated load at span center)

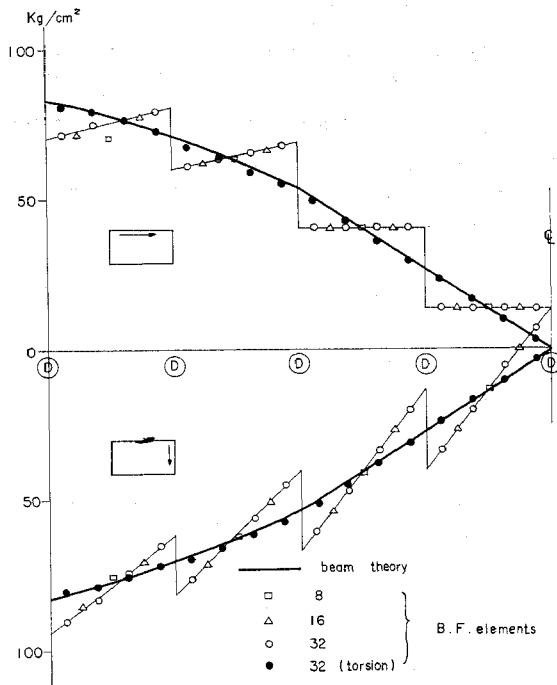


Fig. 21 Shear Stress Distribution in a Girder with variable Web Height (uniform distorsional load)

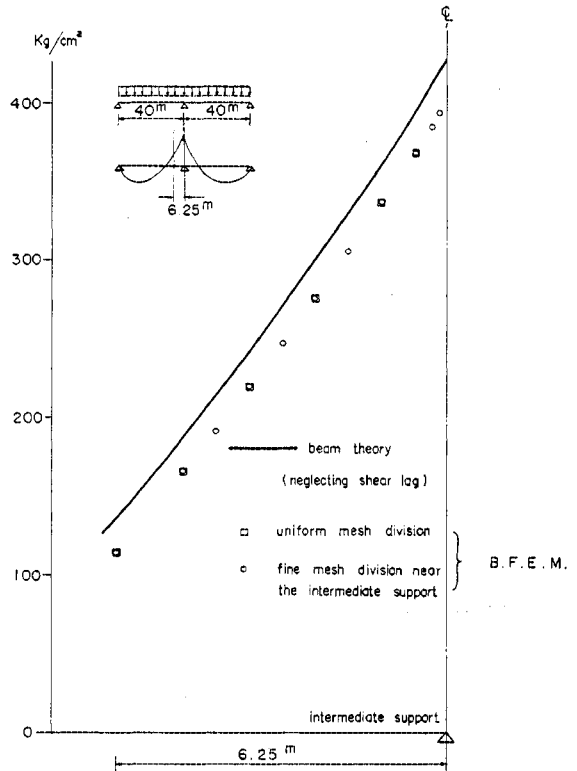


Fig. 22 Bending Stress Distribution near the intermediate Support

様の結論を得ている。

## 5. 本解法の応用例

### (1) 断面変形問題

まえがきで述べたように箱桁の断面変形に関する問題は、設計において隔板、対傾構の間隔、剛度をいかに決定するかという点、また通常設計計算で使用するせん断流理論が成立するための前提条件を準備するという点きわめて重要な問題である。この点に関してはいろいろな研究が行われているが、わが国の道路橋示方書<sup>42)</sup>などにおいても明確な設計規準は存在しない現状である。最近、英国の Merrison 委員会の中間規準<sup>43)</sup>(1973年版)に B.E.F. アナロジー<sup>12)</sup>の結果を用いた比較的明確な照査式が発表され、現在のところ唯一の実際的な設計規準となっている。これに基づき著者ら<sup>44)</sup>はダイアフラムの間隔決定に関する一試案を提案し、単一箱桁の場合の設計法に若干の進歩が見られたが、いまだ非常に不十分な状態であり、今後とも設計法を確立する努力がなされねばならない。

ここでは Fig. 11 に示すモデルについて先に第一著

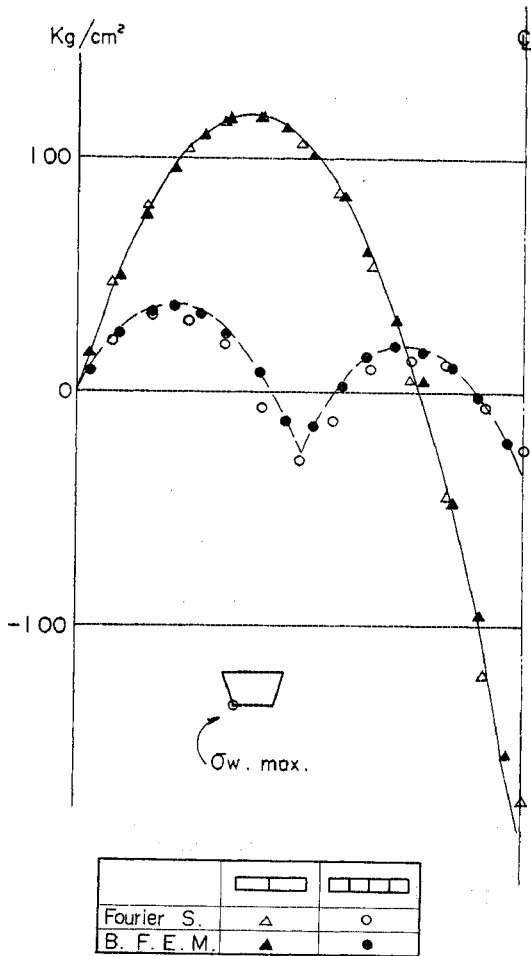


Fig. 23 Comparison between B.F.E.M. Solution and Fourier Solution (uniform distortional load)

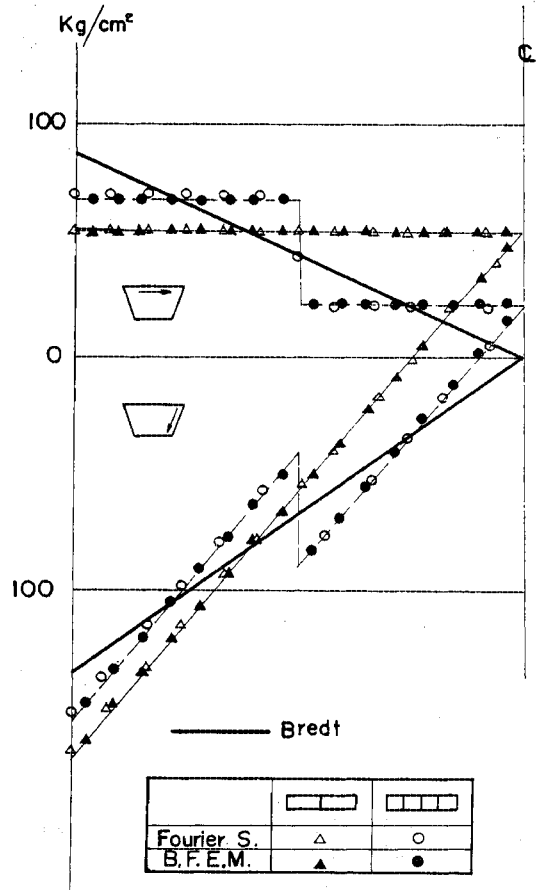


Fig. 24 Comparison between B.F.E.M. Solution and Fourier Solution (uniform distortional load)

者がフーリエ級数を用いて解いた結果<sup>21)</sup>と今回の有限要素法による結果を比較する。結果の一部を Fig. 23, 24 に示すが、両者の一致はきわめて良好であり、ダイアフラムを剛と仮定した文献<sup>21)</sup>の結果は妥当であったことが今回の有限要素法解析で確認された。このように本解法は箱桁の断面変形問題を簡便に精度よく扱うことができ、解析において特別の仮定を必要としないので、この種の問題を詳細に検討するのに適していると考えられる。

(2) 有効幅の問題

有効幅の研究は古くから実施されており現象そのものはほぼ研究しつくされた感がある。わが国の道路橋示方書(以下、道示と略称する)においては II. 8.3.4 でフランジを等方性板と仮定した理論<sup>23)</sup>に基づき有効幅を規定してい

る。しかし、近年の研究では鋼床版箱桁のように多数の縦リブを有する場合には有効幅が小さくなることも指摘されている<sup>25)</sup>。また、実際的な設計と関連して変断面桁や多室箱桁の場合に有効幅がどうなるかなどまだ未解明

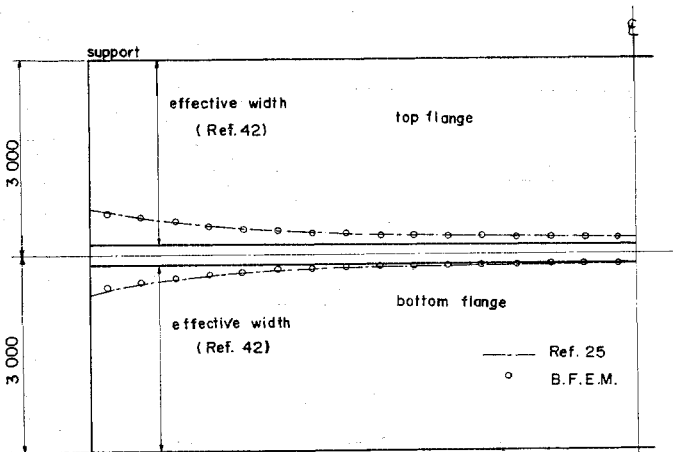


Fig. 25 Effective Width (uniform load)

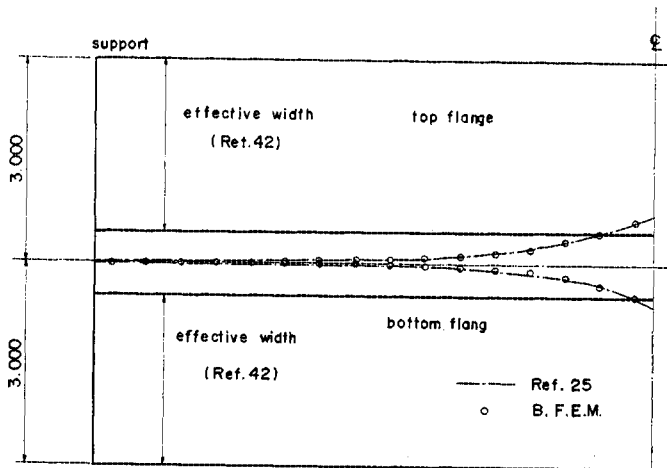


Fig. 26 Effective Width (concentrated load at span center)

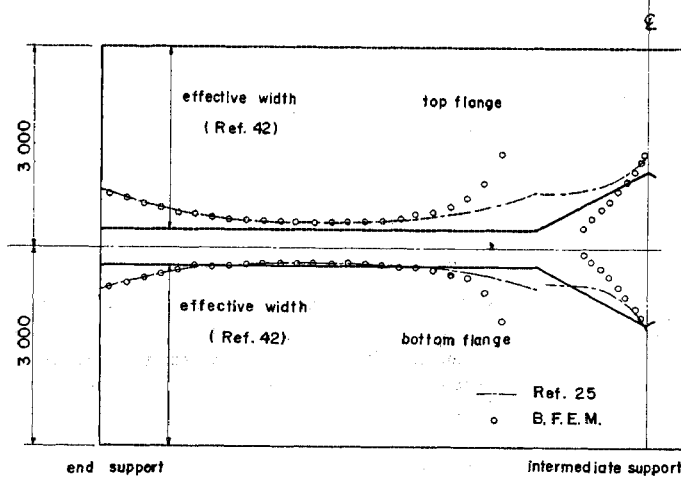


Fig. 27 Effective Width in a two-spanned continuous Girder (uniform load)

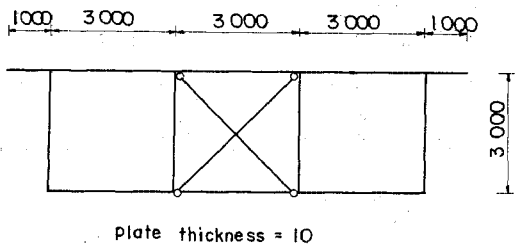


Fig. 28 Cross Section of two Boxes with Deck Plate

の問題もあるように思われる。

ここでは Fig. 10 に示すモデルについて文献 25) および道示との比較を行った。その結果を Fig. 25, 26 に示すが、文献 25) と本解法による値は等分布荷重、集中荷重に対して上、下フランジとも良い一致を示した。道示との比較は若干の相違を示したが、これは文献 25) で

も指摘しているように縦リブによる影響と考えられる。次に 4.(4) と同様な 2 径間連続桁に等分布満載荷重が載荷された場合の有効幅を Fig. 27 に示す。図中モーメント符号が反転する領域では、フランジ内に圧縮および引張りの両方の応力が生じ、また negative shear-lag<sup>24)</sup> の現象がみられるなど有効幅の定義が判然としないので解析結果を示していない。

### (3) 床版付 2 箱桁のねじりの問題

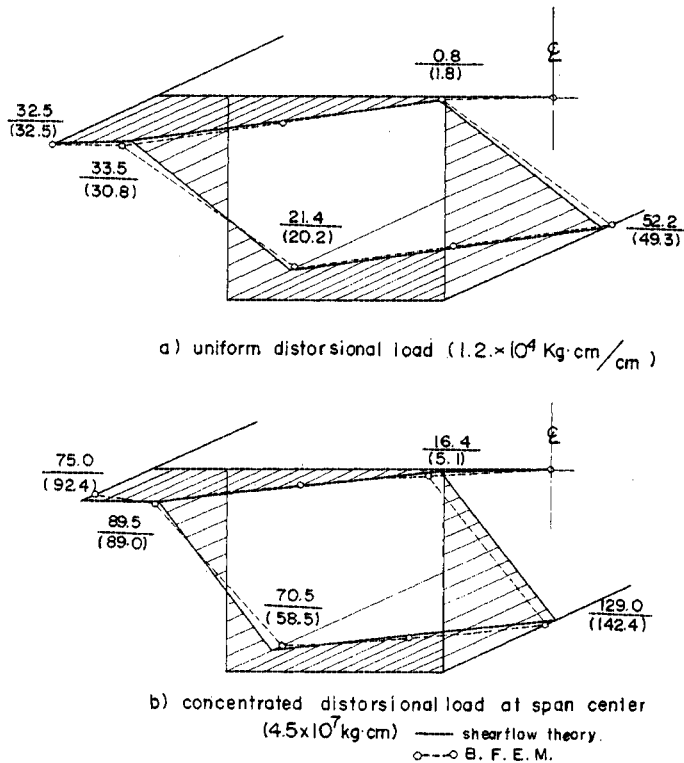
複雑な断面構成を有する箱桁橋の荷重分配機能の解明は重要な問題にもかかわらずあまりなされていない。ここではそのような点に関連して、Fig. 28 に示すような断面を有する支間 50 m 単純支持桁モデルのねじり解析を行った例を述べる。Fig. 29 はそり応力の分布を示すものであるが、有限要素法解とせん断流理論解はよい一致を示している。この例は断面全体が十分剛となるようにダイアフラム、対傾構を配した結果であるが、実際の橋梁などではこのような点に関して十分な調査がなされているとはいえず、今後検討を要する問題と考えられる。

## 6. おわりに

以上、Vlasov の提案した一般化座標法を適用して直線箱桁の基礎方程式を導き、それを有限要素法定式化することにより、ブロック有限要素法を開発した。これによって実際上考えられるいろいろな断面形状の直線箱桁

の断面変形やせん断遅れを含む立体解析が可能であり、任意の支持条件、横結材、断面変化に伴う複雑な挙動を簡便に解析することができる。また、本解法を簡単な例について適用し、実用上十分な結果が得られることがわかった。今後、本解法を利用して不明確なままに残されている箱桁構造問題を解明することは有益であると考えられ、著者らは現在応用例に述べたような問題について検討を進めているところである。

謝 辞：本研究は川崎重工業鉄構事業部鉄構設計室で行われている一連の箱桁橋研究の一部である。本研究に取り組み機会を与えられた岡田統夫室長、橋梁設計部 中谷忠男部長、またご協力いただいた橋梁設計部 近藤藤舒氏に厚く感謝の意を表す。

Fig. 29 Warping Stress Distribution (at  $Z/L=0.475$ )

## 参考文献

- 1) Subcommittee on Box Girder Bridges ASCE-AASHO Committee on Flexural Members: Trends in the Design of Steel Box Girder Bridges, Proc. of ASCE, Vol. 93, No. ST 3, June, 1967.
- 2) Subcommittee on Box Girder of the ASCE-AASHO Task Committee on Flexural Members: Progress Report on Steel Box Girder Bridges, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. ST 4, April, 1971.
- 3) 小西一郎: 鋼橋 (設計編 I), 丸善, 1975.
- 4) Ebner, H.: Die Beanspruchung dünnwandiger Kastenträger auf Drillung bei behinderter Querschnittswölbung, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Nr. 23, 1933.
- 5) Vlasov, V.Z. 著 (奥村敏恵ほか訳): 薄肉弾性梁の理論, 技報堂, 1967.
- 6) Resinger, F.: Der dünnwandige Kastenträger, Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues, Heft 13, Stahlbau-Verlag, Köln, 1959.
- 7) Lacher, G.: Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische oder starre Querschotte versteiften Tragwerken mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querlast, Der Stahlbau, Oct, 1962.
- 8) Daborowski, R.: Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion der Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil, Der Bauingenieur, Heft 11, 1965.
- 9) Richmond, B.: Twisting of thin-walled Box Girders, Proc. of ICE, No. 33, April, 1966.
- 10) Dalton, D.C. and Richmond, B.: Twisting of thin-walled Box Girders of trapezoidal Cross Section, Proc. of ICE, No. 39, Jan., 1968.
- 11) Richmond, B.: Trapezoidal Boxes with continuous Diaphragms, Proc. of ICE, No. 43, Aug., 1969.
- 12) Wright, R.N., Abdel-Samad, S.R. and Robinson, A.R.: BEF Analogy for Analysis of Box Girders, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. ST 7, July, 1968.
- 13) Abdel-Samad, S.R., Wright, R.N. and Robinson, A.R.: Analysis of Box Girders with Diaphragms, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. ST 10, Oct., 1968.
- 14) 能町純雄: 剛なダイアフラムで等区画に分けられる薄肉長方形箱げたの曲げねじりについて, 土木学会論文集, 第146号, 1967年10月.
- 15) 尾崎 諒: 折板構造解析による単一箱桁の曲げねじりについて, 土木学会論文報告集, 第179号, 1970年7月.
- 16) 落合重俊: 隔壁の影響を考慮した箱げた解析, 土木技術, 23巻2号, 1968年4月.
- 17) 落合重俊・北原俊男: 箱げたにおける隔壁の性状, 橋梁と基礎, 1970年5月.
- 18) 桜井英也・浜中順一・大沢勝次: 箱げたの仕切板枚数および剛性決定に関する研究と設計への適用, 石川島播磨技報, 別冊第1号, 1968年8月.
- 19) 奥村敏恵・坂井藤一: 箱型ばりの断面変形と中間ダイアフラムの影響, 土木学会論文報告集, 第190号, 1971年6月.
- 20) 奥村敏恵・坂井藤一: トランスファー・マトリックス法による箱型梁の断面変形の解析, マトリックス構造解析シンポジウム, 日本鋼構造協会, 1971年6月.
- 21) 奥村敏恵・坂井藤一: リブ付台形げたの断面変形挙動とダイアフラムの効果, 土木学会論文報告集, 第209号,

- 1973年12月.
- 22) Kuhn, P. : Stresses in Aircraft and Shell Structures, McGraw-Hill, New York, 1956.
- 23) Fukuda, T. : Ein Beitrag zur Lösung der mitwirkenden Bereiche, Report of the Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo, Vol. 12, 1960.
- 24) 小松定夫 : 連続箱げたの Shear-lag について, 土木学会論文集, 第 58 号, 1958 年 9 月.
- 25) 近藤和夫・小松定夫・中井 博 : 鋼床版桁橋の有効幅に関する研究, 土木学会論文集, 第 86 号, 1962 年 10 月.
- 26) Abdel-Sayed : Effective Width of Steel Deck-Plate in Bridges, Proc. of ASCE, Vol. 95, No. ST 7, July, 1969.
- 27) Ramberger, G. : Der Angriff beliebiger Einzellasten in orthotropen Scheibenstreifen und die mitwirkende Breite orthotrope Gurtscheiben, Dissertation, Technische, Hochschule, Wein, 1969.
- 28) Malcolm, D.J. and Redwood, R.G. : Shear Lag in Stiffened Box Girders, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. ST 7, July, 1970.
- 29) de Boer, R. : Die näherungsweise Ermittlung der mittragenden Bereiche bei geraden prismatischen Stäben mit geschlossenen dünnwandigen Profilen, Der Stahlbau, Jan., 1970.
- 30) 山村信道・成岡昌夫 : フランジ有効幅に関する最近の研究の展望, 橋梁と基礎, 1973 年 5 月.
- 31) 小西一郎・小松定夫 : 箱桁橋の立体的応力解析, 土木学会論文集, 第 43 号, 1957 年 2 月.
- 32) Bencotter, S.U. : A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams, J. of Applied Mech., March, 1954.
- 33) 小松定夫 : 薄肉構造物の理論と計算 ( I ), 山海堂, 1969.
- 34) Kollbrunner, C.F. und Hajdin, N. : Dünnwandig Stäbe, Band 1, Springer-Verlag, 1972.
- 35) Goldberg, J.R. and Leve, H.L. : Theory of prismatic folded Plate Structures, Publ. IABSE, 1957.
- 36) Cheung, Y.K. : Folded Plate Structures by Finite Strip Method, Proc. of ASCE, Vol. 95, No. ST 12, Dec., 1969.
- 37) 奥村敏恵・坂井藤一 : 薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用, 土木学会論文報告集, 第 176 号, 1970 年 4 月.
- 38) Greene, B.E. : Calculation of Stresses in a swept Multicell cantilever Box Beam by the Direct Stiffness Method and Comparison with Test Results, Structural Analysis Res. Memo., No. 21, The Boeing Company, Oct., 1960.
- 39) Chapman, J.C., Dowling, P.J., Lim, P.T.K. and Billington, C.J. : The Structural Behaviour of Steel and Concrete Box Girder Bridges, The Structural Engineer, Vol. 94, No. 3, March, 1971.
- 40) Reissner, E. : Least Work Solution of Shear Lag Problem, Jour. of Aeronautical Sciences, Vol. 8, No. 7, 1941.
- 41) 川井忠彦・川島矩郎・三本木茂夫 : 薄板構造解析, コンピュータによる構造工学講座 II-7-A, 培風館, 1973.
- 42) 日本道路協会 : 道路橋示方書・同解説, 1973 年 2 月.
- 43) The Committee of Inquiry into the Basis of Design and Method of Erection of Steel Box Girder Bridges : Interim Design and Workmanship Rules, Her Majesty's Stationary Office, 1973.
- 44) 坂井藤一・長井正嗣 : 鋼箱げた橋におけるダイアフラム間隔の決定に関する一試案, 川崎重工社内報, 1975 年 5 月.

(1978.4.13・受付)