

測定値の誤差を考慮した信頼性解析

RELIABILITY ANALYSIS WITH UNCERTAINTIES OF THE
MEASURED VALUES

馬場 俊介*・中川 建治**・成岡 昌夫***

By Shunsuke BABA, Kenji NAKAGAWA and Masao NARUOKA

1. 序

無載荷状態にある鋼，コンクリート，土構造物などの静的安定の問題，ならびに，雪荷重のように長期的に変動の少ない荷重，および，自動車荷重，温度応力のように小規模で，かつ，衝撃効果をほとんど持たない常時荷重の作用下にある前記構造物の破壊に対する安全性の問題を扱う場合に，静的信頼性解析の手法が，従来の許容応力設計，荷重係数設計に裏付けを与えるものとして発達してきた。静的信頼性解析は，構造物の強度と構造物に作用する外力とをそれぞれ定常な確率量として扱うことにより，構造物の安全性に対する基準を与えるものである。1947年，Freudenthalら¹⁾によって，いわゆる古典的信頼性論が創始されて以来，その概念が，荷重係数設計の改善という方面と，拡張信頼性論という方面の2つに分かれて発展してきた。古典的信頼性論では，構造物，あるいは，構造物部材の強度（以後， R と記す），ならびに，作用する外力，すなわち，部材に発生する応力（以後， S と記す）の母集団の確率密度が正確に知られている場合に限り，計算の結果得られる破壊確率も真に正しい値が得られる。しかし，現実には，強度 R や外力 S の母集団は不明であり，実験値や実測値を通してそのほんの一部が知られているにすぎない。このようにわずかな実測値に基づいて母集団の性状を仮定し，信頼性解析を行うと，結果の破壊確率の信頼度自体が低下してしまう。この危険性への改善の試みとして，まず，測定値の属する母集団の分布（確率密度）を種々の既知確率密度関数で代用し，古典的信頼性論の手法を用いて，破壊確率（以後， P_f と記す）がJorgenson²⁾，Ang³⁾らにより計算された。母集団分布の仮定のいかんによ

て，結果として得られる P_f の変動する状態が，代表的な確率分布を例にとり示されている。一方，指数分布を用い， R と S の双方に影響係数を乗ずることによって実測値の有する不確実性を考慮しようとしたのが，Benjamin⁴⁾，Cornell⁵⁾，Esteva⁶⁾らであり，この方針に添って，CEB-FIPのコンクリート構造物に対する設計施工指針が樹立された。一方，Angら⁷⁻⁹⁾は，拡張信頼性の概念を示し，先に自ら提起した母集団分布の仮定による P_f の変動という問題を解消しようとした。この方法は，実用性という面では大いに進展を見たが，測定値から直接に破壊確率を推定することに付随するもろもろの誤差を合理的に扱うという面では不十分な点が多く残されている。せっかく信頼性という合理的な理論を用いながら，その基盤となる R ， S の分布の決定に誤差があったのでは，しかも，その誤差の存在により，設計結果が危険側になる可能性も十分あるとあっては，信頼性理論を使うことの有用性が半減してしまう。

これらの方向から離れて，数少ない標本の個数と，それに伴う母平均，母分散の推定誤差が， P_f に与える影響を明確にすることは必要なことではなからうか。本論文では，測定値から分布を決定するまでの間に介在する誤差を3つの段階に分離し，個々の誤差の性質を明確にすることにより，信頼性理論そのものの信頼度を向上することを試みている。3種類の誤差は，誤差が発生する順に示すと，①人為的原因により生ずる種々の誤差，②母集団分布を推定するにあたって使われる平均値，分散が，標本平均，標本分散にすぎず，母平均，母分散ではないことによる誤差，③母集団の分布形を，すでにわかっている平均値，分散に基づいて，既知の確率密度分布で仮定することによる誤差，である。①は，測定者，測定器具，測定環境の違いによる個体差誤差，解析上の誤差，製作施工による誤差などの人為的原因による誤差である。②は，強度 R と外力 S の分布を推定するにあたって必要とされるパラメーター（平均値，分

* 学生会員 工修 名古屋大学大学院博士課程 工学部土木工学科

** 正会員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

散)を、数量的に僅かしか得られていない測定値から推定する場合に生ずる誤差であり、①とは逆に、純粋に確率統計論上の問題としての取り扱いが可能である。

①,②は、それぞれ、測定値自体に内在する主観的、および、客観的な誤差といえよう。これらの誤差とは異なり、③は、すでに決定されたパラメーターに基づいて、母集団の分布形を既知の確率密度関数で代用することにより生ずる誤差であり、 P_f を計算するにあたって母集団分布を使うという信頼性理論の定義上生ずる誤差である。この論文では、以上3種類の誤差のうち、特に②の誤差に注目し、この種の誤差が存在しても、結果の破壊確率 P_f が過小評価にならないように、すなわち、設計そのものが危険側の設計とならないように修正する手法を提案している。また、③の誤差については、拡張信頼性のように、あらゆる分布に対して④の誤差を減少させるというような方針を避けて、測定値から最尤分布を1つ決定したら、以後は、その1つの分布に限定して P_f を求める。解析の対象とした分布は、正規分布、gamma分布、対数正規分布の3つである。③の誤差そのものは、荷重測定値からの標本抽出法で誤差の影響を減らすことを考える。最後に、①の誤差については、簡単にその取り扱い方針を述べる。

ワレントラス橋の下弦材(引張材)について、許容応力設計法と、この論文の②,③の誤差を考慮した場合の信頼性解析法により、部材の必要断面積を計算し、計算例とするとともに、許容応力設計のもつ絶対安全率を推定している。

2. 基本概念

②の誤差、すなわち、測定値の平均値、分散が、母平均、母分散と一致しないことによる誤差を、破壊確率の定義にあたって考慮することの必要性について述べよう。その理由は、実験、実測の結果得られる片寄った、しかも、数量的にも乏しい測定値が、測定値の含まれる母集団を真に代表している可能性がはなはだ低いからである。測定値は、大きさ無限大の母集団から任意に抽出されたたかだか数十個の標本値にすぎないことが多く、測定値の平均値、分散と、母平均、母分散とは一般に一致しない。この両者の隔りが問題である。特に分散の場合には、測定値の分散と母分散との間の相関関係が著しく低い。母集団が正規分布に従う場合を考えると、母分散の検定は χ^2 分布によって行われるのであるが、この場合、たとえば、20個の測定値から計算された分散が2であると、母分散の存在する区間は、90%の信頼度で1.27~3.69となる。また、50個の測定値が得られても、95%の信頼度では、信頼区間は1.40~2.88のよ

うに依然として開きが大きい。このことは、測定値が20個得られていて、その分散が2である場合には、その母分散が1.27である可能性も、3.69である可能性も、90%の信頼度で存在することを意味している。そのうえに、母分散が1.27以下となったり、3.69以上となる確率が10%も残されているのである。このような測定値の分散と母分散との不一致は、誤差①,③以上に、結果の破壊確率 P_f に大きな影響を与える。②の誤差は、①,③の誤差に比較して、解析的取扱いが容易である。信頼性解析に伴う誤差としては、②の誤差が最も重要なものとみなすことができよう。

測定値の平均値、分散に含まれる誤差を考慮して信頼性解析を行うには、これらの平均値、分散が、ある一組の実現値として得られた場合に、その測定値が抽出された母体であるところの母集団の平均値、分散がとり得るであろう値の確率密度を求めておく必要がある。母集団が正規分布に従う正規母集団である場合には、測定値の平均値、分散より推定される母平均、母分散の確率密度は、それぞれ、 t 分布、 χ^2 分布より誘導することができる。ただし、正規分布以外の場合には、これらの確率密度を直接誘導することが困難であり、近似的手法を採用せざるを得ない。対数正規分布の場合には、変数の対数変換したものが正規分布となるという関係を用いて、 t 分布、 χ^2 分布の変数を対数変換することにより、対数正規母集団における母平均の確率密度、および、母分散の確率密度を近似的に誘導することができよう。一方、gamma分布、beta分布などの場合には、それぞれ特有の変数変換により近似的に正規分布に帰着され得る。この関係より、gamma分布母集団、beta分布母集団についても、それぞれ、 t 分布、 χ^2 分布に相当する分布が近似的に誘導できよう。以上のように正規分布に近似的にせよ帰着可能な分布と異なり、Weibull分布、2重指数分布などの場合には、いかなる変数変換によっても正規分布で近似することができない。したがって、 t 分布、 χ^2 分布に相当する誤差分布を直接的にせよ、近似的にせよ、誘導することは困難である。

信頼性解析を行う場合、強度 R と外力 S の双方で、測定値の平均値に伴う誤差、分散に伴う誤差を同時に考えると、 P_f を計算するのに必要な R と S に関する2重積分以外に、 R と S の平均値、分散の誤差の計4つについて、4重積分をする必要があり、精度上からも好ましくない。そこで、平均値に伴う誤差と分散に伴う誤差とが独立に発生するものと仮定する。さらに、 R に関するこれらの誤差と、 S に関するこれらの誤差とは、独立に取り扱わず、 P_f を一定に保つという条件のもとで、新たにパラメーターを導入して両者を1つに結びつける。こうすると、 R と S の個々の独立性は保たれたま

まで、平均値に伴う誤差という現象と、破壊確率 P_f の誤差との関係、あるいは、分散に伴う誤差と P_f の誤差との関係が一对一で表示できるという利点をもつ。

次に、③の誤差の問題であるが、強度 R 、外力 S の測定値から、すでに決められている平均値、分散に基づいて、母集団の分布形を推定する場合にも、破壊確率 P_f に誤差を発生させる。著者らは、母集団分布形として、②の誤差に対する解析的な取扱いが可能な3種類の分布を考える。そして、分布の検定、確率紙などによる判定を行った結果、測定値が3種類の分布のいずれか1つの分布で近似できる場合には、②の誤差を考慮した合理的な信頼性解析が可能となる。しかし、3種類の分布のいずれとも一致しないような測定結果が得られる場合には、本論文で与えられている式を適用することはできない。

強度 R 、外力 S の母集団として仮定される3種類の確率密度分布としては、正規分布、gamma分布、対数正規分布を考える。正規分布は、 t 分布、 χ^2 分布、 F 分布などのように、正規分布をも含めて、正規分布から直接誘導される分布の代表として選ばれる。そして、正規分布は、最も普遍的な確率統計分布であり、実際のデータへの高い適合性が期待できる分布でもある。一方、gamma分布は、変数の平方根変換により、近似的に正規分布に帰着され得る。そして、gamma分布は、下端打ち切り分布であって工学上合理的であるし、寿命、クラック長さなどのばらつきを表わす確率統計分布としても使用度の高い分布である。最後に、対数正規分布は、変数の対数変換により、正規分布とすることができる。そして、gamma分布と同様に、下端打ち切り分布であり、さらに、疲労強さの分布などにおいて、Weibull分布とならんで適合度の高さでよく知られた分布である。

強度 R と外力 S の分布を仮定するにあたって、 R と S の分布のそれぞれについて3種類の分布を独立に仮定し、計9通りの組合せについて、誤差の影響を考慮した P_f の定義式を与える必要はないと思われる。 R の平均値は S の平均値より必ず大きく、また、一般的に、 R の分散は S の分散に比較して小さい値をとることが経験的に得られている。このような場合、 P_f の値は S の分布に大きく左右されるが、 R の分布にはほとんど影響されない。すなわち、 R の分布は3種類の分布のいずれでもよく、数式的な取扱いやすさという点から、つねに、 S の分布と同種の分布を仮定するのが最適と思われる。したがって、以後は、 R と S とが、ともに、正規分布に従う場合、gamma分布に従う場合、対数正規分布に従う場合、の3通りについてのみ、 P_f の修正定義式を誘導していこう。

3. 平均値、分散の変動誤差の確率密度

ある試行により n 個の標本 x_1, x_2, \dots, x_n が抽出された場合を想定する。 n 個の標本からの標本平均を \bar{x} 、標本分散を s_x^2 とする。また、標本の属する母集団の母平均推定値を μ_x 、母分散推定値を σ_x^2 とする。まず、母集団が正規分布に従う正規母集団である場合について、平均値、分散の変動を表わす確率密度を求めよう。 n 個の標本から平均値 \bar{x} が得られたとすると、その母平均 μ_x の存在範囲は、信頼度 α で、

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \sigma_x / (n-1)^{1/2} < \mu_x < \bar{x} + t_{\alpha/2} \sigma_x / (n-1)^{1/2}$$
 と与えられる。ここに、 $t_{\alpha/2}$ は t 分布上で上側確率を $\alpha/2$ とする点であり、

$$\alpha/2 = \int_{t_{\alpha/2}}^{\infty} f_t(u) du$$

と表わされる。ここに、 f_t は t 分布の確率密度である。一方、分散については、標本分散 s_x^2 から母分散 σ_x^2 の存在範囲が、信頼度 β で、次のように与えられる。

$$(n-1)s_x^2 / \chi_{1-\beta/2}^2 < \sigma_x^2 < (n-1)s_x^2 / \chi_{\beta/2}^2$$

ここに、 $\chi_{\beta/2}^2$ は χ^2 分布上で上側確率を $\beta/2$ とする点であり、

$$\beta/2 = \int_{\chi_{\beta/2}^2}^{\infty} f_{\chi^2}(u) du$$

と表わされる。ここに、 f_{χ^2} は χ^2 分布の確率密度である。

標本平均が \bar{x} と得られた場合に、母平均が μ_x となるという関係は、次のように示される。

$$P\{\mu_x \leq (\text{母平均推定値}) = (\mu_x + dx) | (\text{標本平均}) = \bar{x}\} = f_{\mu_x}(\mu_x) dx$$

ここに、 f_{μ_x} は平均値の変動の確率密度である。この f_{μ_x} と f_t とは、次の関係にある。

$$\int_{\mu_x}^{\infty} f_{\mu_x}(x) dx = \int_{(n-1)^{1/2}(\mu_x - \bar{x})/s_x}^{\infty} f_t(u) du$$

この関係を満たすように f_{μ_x} が決められる。すなわち、

$$f_{\mu_x}(x) = \{(n-1)^{1/2}/s_x\} \cdot f_t\{(n-1)^{1/2}(x - \bar{x})/s_x\} \dots \dots \dots (1.1)$$

となる。式 (1.1) により、標本平均が \bar{x} と得られた場合に母平均のとるであろう値とその頻度を表わす確率密度が求められる。

分散についても同様の議論が成立する。分散の変動の確率密度を $f_{\sigma_x^2}$ とすると、 $f_{\sigma_x^2}$ と f_{χ^2} との間には、次の関係が成立する。

$$\int_0^{\sigma_x^2} f_{\sigma_x^2}(x) dx = \int_{(n-1)s_x^2/\sigma_x^2}^{\infty} f_{\chi^2}(u) du$$

この関係を満足する $f_{\sigma_x^2}$ は、次のように表わされる。

$$f_{\sigma_x^2}(x) = \{(n-1)s_x^2/x^2\} \cdot f_{\chi^2}\{(n-1)s_x^2/x\} \dots \dots \dots (2.1)$$

式 (2.1) により、標本分散が s_x^2 の場合に母分散のとり得るであろう値とその頻度を表わす確率密度が求められる。

式 (1.1), (2.1) は、母集団が正規分布に従う場合にのみ通用する確率密度の式である。gamma 分布、対数正規分布の場合には、前述したように、 t 分布、 χ^2 分布に相当する分布を数学的に厳密に誘導することはできないが、それらを近似計算により類推できる。すなわち、gamma 分布の場合、正規分布に従う変量 u を、gamma 分布に従う変量 t に変換するには、実用的近似として、次の平方根変換式を考える。誘導を付録に示す¹⁰⁾。

$$u = 2(\bar{x}t)^{1/2} - (4\bar{x}^2 - s_x^2)^{1/2} + \bar{x}$$

ここで1つの仮定を行う。すなわち、正規分布を gamma 分布に近似させる変換が、正規分布における式 (1.1), (2.1) に相当する確率密度を、gamma 分布についても与えるものと仮定する。このとき、gamma 母集団の平均値と分散の変動を表わす確率密度は、式 (1.1), (2.1) に平方根変換をほどこすことにより、次のように与えられる。

$$f_{\mu_x}(x) = \{(n-1)^{1/2}/s_x\} \cdot f_t[(n-1)^{1/2}\{2(\bar{x}x)^{1/2} - (4\bar{x}^2 - s_x^2)^{1/2}\}/s_x] \cdot (\bar{x}/x)^{1/2} \dots\dots\dots(1.2)$$

$$f_{\sigma_x^2}(x) = [(n-1)s_x^2/\{2(\bar{x}x)^{1/2} - (4\bar{x}^2 - s_x^2)^{1/2} + \bar{x}\}] \cdot f_{\chi^2}[(n-1)s_x^2/\{2(\bar{x}x)^{1/2} - (4\bar{x}^2 - s_x^2)^{1/2} + \bar{x}\}] \cdot (s_x^2/x)^{1/2} \dots\dots\dots(2.2)$$

次に、対数正規分布の場合を考えよう。正規分布に従う変量 u を、対数正規分布の変量 t に変換するには、

$$u = \ln t$$

のような対数変換による。この場合には、式 (1.1) を対数変換し、 $\bar{x} \rightarrow \ln \bar{x}$, $s_x^2 \rightarrow \delta_x^2$ とおいたものを対数正規母集団の平均値の変動を示す確率密度であると仮定し、さらに、式 (2.1) で $s_x^2 \rightarrow \delta_x^2$ とおいたものを、分散の変動を示す確率密度と仮定する。すなわち、

$$f_{\mu_x}(x) = \{(n-1)^{1/2}/\delta_x\} \cdot f_t\{(n-1)^{1/2}(\ln x - \ln \bar{x})/\delta_x\} \cdot (1/x) \dots\dots\dots(1.3)$$

$$f_{\sigma_x^2}(x) = \{(n-1)\bar{x}\delta_x^2/x\} \cdot f_{\chi^2}\{(n-1)\bar{x}\delta_x^2/x\} \cdot (1/\bar{x}^2) \dots\dots\dots(2.3)$$

となる。ここに、 δ_x は変動係数である。

以上の操作で、正規分布以外の2つの分布、すなわち、gamma 分布と対数正規分布について、ある標本平均、ある標本分散が実現値として得られた場合の、母平均と母分散のとり得るであろう値とその頻度を表わす確率密度が近似的に与えられた。

4. 古典的信頼性論

母平均、母分散の変動の確率密度が得られたところで、次は、構造系の信頼性、すなわち、破壊確率を求めることになる。測定値の平均値、分散に伴う誤差を考慮した信頼性との対比を可能にするために、従来の古典的信頼性論の基本式を以下に示す。

強度 R と外力 S の母平均を μ_R, μ_S 、母分散を、 σ_R^2, σ_S^2 とする。また、 R と S の母集団から、それぞれ、 n_R 個、 n_S 個の標本が採られたときの標本平均を \bar{R}, \bar{S} 、標本分散を s_R^2, s_S^2 とする。古典的信頼性理論では、 $\bar{R} = \mu_R, \bar{S} = \mu_S, s_R^2 = \sigma_R^2, s_S^2 = \sigma_S^2$ と仮定されている。

さて、 R と S とはそれぞれ任意の値をとり得るから、ある一組の R^* と S^* が実現値として生ずる確率は、

$$P\{(R^* \leq R \leq R^* + dR) \cap (S^* \leq S \leq S^* + dS)\} = f_R(R^*)f_S(S^*)dSdR \dots\dots\dots(3)$$

である。ここに、右肩の*は、その変量が、ある任意の値であることを示す記号であり、 f_R, f_S は、 R と S の母集団分布である。破壊確率 P_f は、 $R^* < S^*$ という事象の、全事象に対する比率であるから、図-1 (1) のように、 $R < S$ という領域での式 (3) の積分により、次のように与えられる。

$$P_f = P(R < S) = \iint_{R < S} f_R(R)f_S(S)dSdR \dots\dots\dots(4.1)$$

f_R と f_S がともに正規分布である場合、式 (4.1) は、 $P_f = \Phi\{(\bar{R} - \bar{S})/(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2}\} \dots\dots\dots(4.2)$

と表わされる。ここに、 Φ は、正規分布の上側確率を意味している。

最後に、実際の設計にあたっての指標として、中央安全率 r_0 が、次のように提示される。

$$r_0 = \bar{R}/\bar{S} \dots\dots\dots(5)$$

式 (4.2) と式 (5) とは、Cornell らによって、 R と S との変動係数 δ_R, δ_S を使って結びつけられることが示されている⁵⁾。著者らの提唱する、測定誤差を考慮した信頼性理論においても、最終的に誘導されるのは、 $r_0 - P_f$ の関係図である。

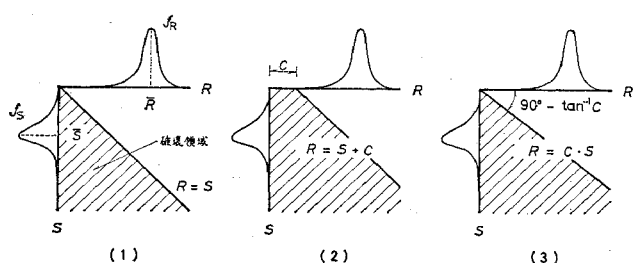


図-1 平均値、分散の変動による破壊領域の変動

5. 平均値, 分散に伴う誤差を考慮した信頼性理論 (②の誤差に対する破壊確率 P_f の既往の定義の修正)

平均値, 分散の変動の確率密度 [式 (1), (2)] と, 破壊確率 [式 (4.1)] とから, 直接に, 平均値と分散に伴う誤差を考慮して破壊確率を求めようとする, 先に述べたように, $\bar{R}, \bar{S}, s_R^2, s_S^2$ の膨大な組合せに対して数値計算を必要とし, 逆に, その精度は期待できない. たとえば, $\bar{R}, \bar{S}, s_R^2, s_S^2$ について, それぞれ 10^2 通りの場合を想定すると, 全組合せは 10^8 となる. そこで, \bar{R}, \bar{S} の独立な変動 (すなわち, 誤差) を1つのパラメーター A で, また, s_R^2, s_S^2 の独立な変動 (誤差) を別のパラメーター B で置換することにより, 数値計算を実現可能な程度に減らすことを考える. この場合, 前記の例では, 全組合せが 10^4 ですむ. このうち, 各組合せについて, 式 (4.1) の2重積分は絶対に必要であるから, この「組合せの減少」は効果的である.

パラメーター A, B は数式の取扱いが最も簡単になるように定義する. すなわち, 本来 $R=S$ である破壊境界線を R 軸に添って平行移動させるときの原点からの移動量で, 平均値の変動に関するものを A , 分散の変動に関するものを B とする. この関係を 図-1 (2) に示す. このパラメーター A, B を使うことにより, 破壊領域は,

$$R < S + (A+B) \dots\dots\dots(6.1)$$

のように表現される. さらに, $(A+B)$ を C という新しいパラメーターで表わすと, 式 (6.1) の領域は,

$$R < S + C \dots\dots\dots(6.2)$$

と表示される.

パラメーター A, B , あるいは, C を導入することによって, $\bar{R}^*, \bar{S}^*, s_R^{2*}, s_S^{2*}$ の独立性が失われるようなことはない. パラメーター A は, \bar{R}^*, \bar{S}^* の定められた組合せと対応づけられているにとどまらず, \bar{R}^*, \bar{S}^* が定められた組合せをとるときの破壊確率 P_f そのものと対応づけられているのである. 後述の式でみられるように, A と P_f とは, 一対一の対応関係にあり, したがって, A の各値は, それぞれ, 異なる P_f の値を意味することになる. すなわち,

$$\left(\begin{array}{l} \bar{R}^* \text{ と } \bar{S}^* \text{ の定められた} \\ \text{組合せからなる集合} \end{array} \right) \rightarrow (\text{一定の } A \text{ の値})$$

という関係によって, \bar{R}^* と \bar{S}^* の独立性が失われるのではなく, むしろ,

$$(\text{一定の } A \text{ の値}) \rightarrow \left(\begin{array}{l} \bar{R}^* \text{ と } \bar{S}^* \text{ の定められ} \\ \text{た組合せからなる集合} \end{array} \right) \rightarrow (P_f \text{ の値})$$

という関係によって, \bar{R}^* と \bar{S}^* はただの媒体とされるだけで, A と P_f の間には, つねに, 一対一の対応関

係が存在するわけである. パラメーター B , および, C についても, 全く同じである.

さて, 誤差を考慮した破壊確率 P_f は, 最終的に,

$$P_f = \int \int_{R < S + C} f_C(C) f_R(R) f_S(S) dS dR dC \dots\dots\dots(7.1)$$

より求められるとする. 説明は後述する. ここに, 右肩の ν は, 平均値, 分散の変動を考慮に入れたことを示している. この場合, 前記の例に従うと, 全組合せは 10^2 で済む. f_C はパラメーター C の確率密度である.

パラメーター A, B の確率密度 f_A, f_B の誘導を, まず, R と S の母集団が正規分布である場合について行う. R と S が正規分布に従うとすると, その破壊確率 P_f は式 (4.2) のようになるが, パラメーター A , あるいは, B を考えると, 式 (4.2) は任意の A^*, B^* に対して,

$$\left. \begin{array}{l} P_f^* = \Phi \left\{ \frac{(\bar{R} - \bar{S} - A^*)}{(s_R^2 + s_S^2)^{1/2}} \right\} \\ P_f^* = \Phi \left\{ \frac{(\bar{R} - \bar{S} - B^*)}{(s_R^2 + s_S^2)^{1/2}} \right\} \end{array} \right\} \dots\dots(8.1)$$

と書かれる. この場合, $\bar{R}, \bar{S}, s_R^2, s_S^2$ は確定量であり, A^*, B^* が確率変数である. 次に, A, B と, 先に求めておいた平均値, 分散の確率密度 [式 (1), (2)] との関係を求める. この場合には, $\bar{R}, \bar{S}, s_R^2, s_S^2$ も確率変数として扱う.

$\bar{R}^*, \bar{S}^*, s_R^{2*}, s_S^{2*}$ を媒体として, パラメーター A, B と P_f とを一対一の対応関係で結びつけるための前段階として, $P_f = \text{const.}$ という条件を満たすように, 次の2つの新しいパラメーター dom, sov を導入する.

$$\left. \begin{array}{l} dom^* = \bar{R}^* - \bar{S}^* \\ sov^* = s_R^{2*} + s_S^{2*} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(9.1)$$

ここに, dom は difference of means の略, sov は sum of variances の略である. この2つのパラメーターにより, 任意の \bar{R}^*, \bar{S}^* の組合せのうち, $(\bar{R}^* - \bar{S}^*)$ という特徴を有するグループだけが, また, s_R^{2*}, s_S^{2*} の組合せのうち, $(s_R^{2*} + s_S^{2*})$ という特徴を有するグループだけが抽出される. これらのグループは, 前提条件により, それぞれ, 一定の破壊確率を意味している. したがって, この段階で, dom あるいは sov と, P_f とが, 一対一の対応関係で表現可能となったことになる. さて, 式 (1.1), (2.1) を, R と S について誘導し, それぞれ, $f_{\mu R}, f_{\mu S}, f_{\sigma R^2}, f_{\sigma S^2}$ と記す. すると, dom, sov の確率密度 f_{dom}, f_{sov} は, 次のようになる.

$$\left. \begin{array}{l} f_{dom}(dom^*) = \int_{dom^*} f_{\mu R}(\bar{R}^*) \\ \quad \times f_{\mu S}(\bar{R}^* - dom^*) d(\bar{R}^*) \\ f_{sov}(sov^*) = \int_{sov^*} f_{\sigma R^2}(s_R^{2*}) \\ \quad \times f_{\sigma S^2}(sov^* - s_R^{2*}) d(s_R^{2*}) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(10.1)$$

一方、任意の dom^* , sov^* に対する破壊確率 P_f^* は、式 (4.2) を参考にして、それぞれ、次のように書かれる。

$$P_f^* = \Phi\left\{\frac{(dom^*)}{(s_R^2 + s_S^2)^{1/2}}\right\} \\ P_f^* = \Phi\left\{\frac{(\bar{R} - \bar{S})}{(sov^*)^{1/2}}\right\} \dots\dots(11.1)$$

したがって、式 (8.1), (11.1) より、 dom^* , sov^* が、それぞれ、パラメーター A^* , B^* を使って、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} dom^* &= \bar{R} - \bar{S} - A^* \\ sov^* &= (s_R^2 + s_S^2) (\bar{R} - \bar{S})^2 / (\bar{R} - \bar{S} - B^*)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(12.1)$$

式 (12.1) により、 P_f とは結びついてはいるが測定誤差とは関係のない仮想的な量であるパラメーター A , B と、測定値 \bar{R} , \bar{S} , s_R^2 , s_S^2 に含まれる誤差の頻度を表わすパラメーター dom , sov とが結びつけられた。これにより、測定値 ($A=B=0$) から P_f が誘導された場合に、それ以外の P_f が真の値である可能性を表わす確率密度が、 f_A , f_B により規定される。

パラメーター A , B の確率密度 f_A , f_B は、式 (12.1) を式 (10.1) へ代入することにより求められる。そして、最終的に必要とされるパラメーター C の確率密度 f_C は、この f_A , f_B を使って、

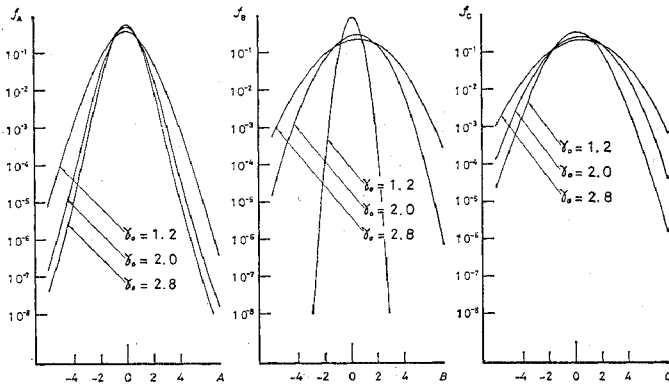


図-2 正規母集団に対する f_A , f_B , f_C

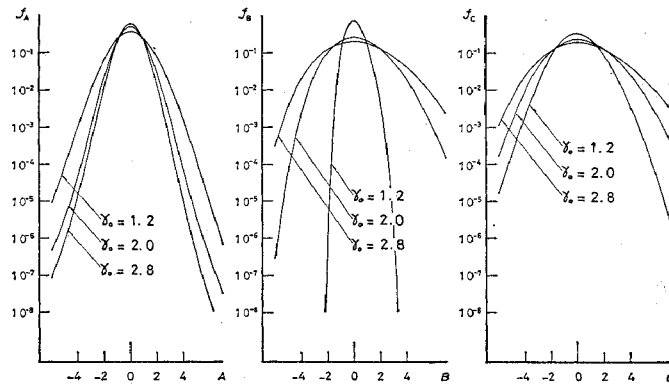


図-3 gamma 母集団に対する f_A , f_B , f_C

$$f_C(C) = \int f_A(A) f_B(C-A) dA \dots\dots(13)$$

より求められる。

標本数 $n_R = n_S = 15$, 変動係数 $\delta_R = 0.10$, $\delta_S = 0.20$ の場合について計算された f_A , f_B , f_C を、図-2 に示す。

以上の考え方を、正規分布以外の分布にも拡張しよう。gamma 分布の場合には、gamma 分布を直接に式 (4.1) に代入しても、平方根近似して正規分布にしたものを式 (4.1) に代入しても、式 (4.2) のような形にすることができない。そこで、第一近似として、(gamma 分布の変数) \approx (正規変数) とし、式 (4.2) をそのまま使用する。したがって、式 (8.1) ~ (12.1) についてもそのまま利用することになる。ただし、式 (10.1) 中の $f_{\mu R}$, $f_{\mu S}$, $f_{\sigma R^2}$, $f_{\sigma S^2}$ は、式 (1.1), (2.1) のかわりに式 (1.2), (2.2) を使用する。標本数 $n_R = n_S = 15$, 変動係数 $\delta_R = 0.10$, $\delta_S = 0.20$ の場合について、 f_A , f_B , f_C を図-3 に示す。

対数正規分布の場合は、式 (4.2) のかわりに、近似的に、次の式が与えられる。

$$P_f = \Phi\left\{\frac{(\ln \bar{R} - \ln \bar{S})}{(\delta_R^2 + \delta_S^2)^{1/2}}\right\} \dots\dots(4.3)$$

また、パラメーター A , B は、正規分布のときのように、図-1 (2) に示されるような原点からの距離ではなく、破壊境界線 $R=S$ を原点を中心として回転させるときの S 軸から測った回転角の正切にとる。この関係を 図-1 (3) に示す。このパラメーター A , B を使うと、破壊領域は、

$$R < (A+B)S \dots\dots(6.3)$$

と表示される。前と同様に、 $C=A+B$ のようなパラメーター C を使うと、破壊領域は、

$$R < CS \dots\dots(6.4)$$

となり、測定誤差を考慮した破壊確率 P_f^v は

$$P_f^v = \int f_C(C) \int \int_{R < CS} f_R(R) \\ \times f_S(S) dS dR dC \dots\dots(7.2)$$

より求められる。これらの A^* , B^* に対する破壊確率 P_f^* は、式 (4.3) を参考にして、次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} P_f^* &= \Phi\left\{\frac{(\ln \bar{R} - \ln \bar{S} - \ln A^*)}{(\delta_R^2 + \delta_S^2)^{1/2}}\right\} \\ P_f^* &= \Phi\left\{\frac{(\ln \bar{R} - \ln \bar{S} - \ln B^*)}{(\delta_R^2 + \delta_S^2)^{1/2}}\right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.2)$$

さらに、 dom^* , sov^* は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} dom^* &= \ln \bar{R} - \ln \bar{S} \\ sov^* &= \delta_R^{2*} + \delta_S^{2*} \end{aligned} \right\} \dots\dots(9.2)$$

また, dom , sov の確率密度は, 変数が \bar{R}^* $\rightarrow \ln \bar{R}^*$, $s_{R^{2*}} \rightarrow \delta_{R^{2*}}$ と変換されるため, 式 (10.1) を参考にして, 次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} f_{som}(dom^*) &= \int_{dom^*} (1/\bar{R}^* \bar{S}^*) f_{\mu_R}(\ln \bar{R}^*) \\ &\quad \times f_{\mu_S}(\ln \bar{R}^* - dom^*) d(\ln \bar{R}^*) \\ f_{sov}(sov^*) &= \int_{sov^*} (1/\bar{R}^* \bar{S}^*) f_{\sigma_{R^2}}(\delta_{R^{2*}}) \\ &\quad \times f_{\sigma_{S^2}}(sov^* - \delta_{R^{2*}}) d(\delta_{R^{2*}}) \\ &\dots\dots\dots(10.2) \end{aligned} \right\}$$

一方, 任意の dom^* , sov^* に対する P_f^* は, 式 (11.1) のかわりに,

$$\left. \begin{aligned} P_f^* &= \Phi\{(dom^*)/(\delta_{R^2} + \delta_{S^2})^{1/2}\} \\ P_f^* &= \Phi\{(\ln \bar{R} - \ln \bar{S})/(sov^*)^{1/2}\} \\ &\dots\dots\dots(11.2) \end{aligned} \right\}$$

となる. したがって, dom^* , sov^* は, A^* , B^* を使って, 次のように表わされる.

$$\left. \begin{aligned} dom^* &= \ln \bar{R} - \ln \bar{S} - \ln A^* \\ sov^* &= (\delta_{R^2} + \delta_{S^2})(\ln \bar{R} - \ln \bar{S})^2 / \\ &\quad (\ln \bar{R} - \ln \bar{S} - \ln B^*)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(12.2)$$

式 (12.2) を式 (10.2) に代入することにより, パラメーター A, B の確率密度が得られ, 式 (13) より, パラメーター C の確率密度 f_C が求められる. 結果を図-4 に示す.

このようにして計算された f_C を式 (7) に使用することにより, 平均値と分散の変動を考慮した破壊確率 P_f^v が計算される.

P_f^v の与え方として, ここでは, 式 (7) のような平均的な定義式を採用しているが, これ以外にも, 次のような定義式が考えられる.

a) $P_f^v = \iint_{R < S + C^{**}} f_R(R) f_S(S) dS dR$
 ただし, C^{**} は, $\epsilon = \int_{C^{**}}^{\infty} f_C(C) dC$ となるように決める. ここに, ϵ は危険率で, たとえば $\epsilon = 10^{-3}$

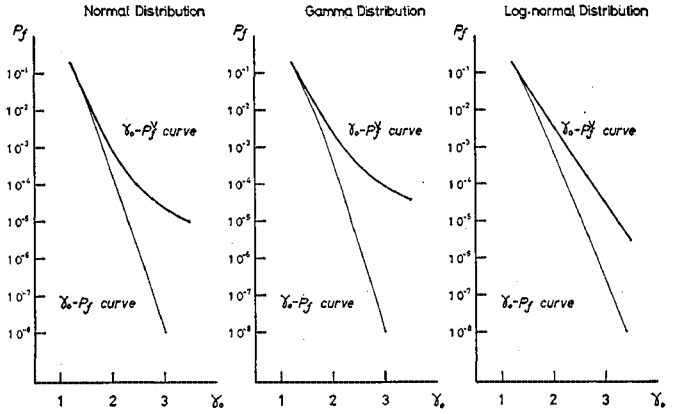


図-5 3種類の分布に対する γ_0 - P_f^v 曲線

b) $P_f^v = \iint_{R < S + C^{***}} f_R(R) f_S(S) dS dR$

ただし, C^{***} は, $\int_{C^{***}}^{\infty} f_C(C) dC \cdot \iint_{R < S + C^{***}} f_R(R) f_S(S) dS dR$ を, 最小にするように決める.

a) の定義では, 平均値, 分散の変動が P_f に及ぼす影響度に関する確率密度 $f_C(C)$ の下側確率が, ある微小量 ϵ となるときの P_f をそのまま使っている. 換言すれば, もし, この P_f^v で設計すると, 平均値, 分散に誤差があっても, 設計としての安全性は確率 $(1-\epsilon)$ で保証される. この定義式によると, 得られる P_f^v の信頼度ははっきりしているという意味では確かに有利であるが, ϵ としてどのような値を採用すべきなのかが全く不明であるという欠点が依然として存在する. 一方, b) の定義式では, ある C^{***} の値に対する破壊確率 P_f と, ある C^{***} 以上の値が生ずる確率との積, すなわち, $(P_f \times \epsilon)$ が最小となるときの P_f^v を使っている. この関係は, ある C^{***} の値に相当する誤差を考慮して設計する場合に必要なとする建造費と, その設計では過小評価であることによる破壊の危険率 ϵ との積, すなわち, 一種の期待損失費と解釈することもできる. この期待損失費を最小にするように選ぶのであるから, 安全性と経済性のバランス点を求めるということにも通ずる定義式であろう. ただし, $\iint_{R < S + C^{***}} f_R(R) f_S(S) dS dR$ は, 結果的には建造費と解釈できたとしても, 値そのものは P_f であり, 数値上の性格 (前者は算術的に変化, 後者は対数的に変化する) を異にする. この両者の相違が, 対数的に変化する ϵ との積を考えた場合に, 最小値の選定にどの程度の誤差を生じさせるのかが不明である点が欠点である.

これら a), b) の定義式に比較して, P_f^v

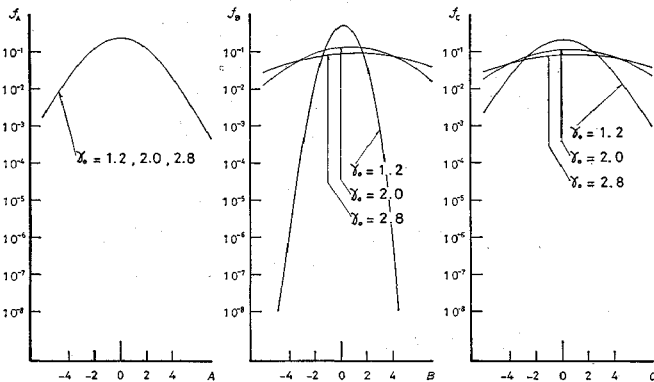


図-4 対数正規母集団に対する f_A, f_B, f_C

を式(7)のように定義することは、単に、平均値、分散に伴う誤差の生起確率に基づいて、 P_f の重み付き平均値を求めているにすぎず、有利な点もとり立ててないかわりに、数学的平均化ということで、不明瞭な点、説明のつかない点がない。したがって、a)で、 ϵ の性質がわからず、b)で、 P_f と建造コストとの関係が確かめられていない現時点では、 P_f として式(7)の定義式を用いるのが、誤差の生ずる可能性を最も少なくするという意味で適当であると思われる。

正規分布、gamma分布、対数正規分布のそれぞれについて、式(7)により P_f を計算し、 r_0 に対してプロットしたものを、図-5に示す。

6. 部材の破壊確率 P_f と寿命 T 、ならびに、外力の実測値 S の抽出法との関連性

5. までの記述により、構造物、あるいは、構造部材に対する R と S の分布が 図-5 のいずれか(3種類の分布)に適合し、かつ、 P_f があらかじめ知られている場合には、その構造系の安全に必要とされる安全率 r_0 が計算できる。そして、 $\bar{R} = r_0 \bar{S}$ の関係から、部材の必要断面積が決定できる。

一般に、構造物、あるいは、構造部材の耐用年限(寿命) T は、経済的な視点、あるいは、行政的な視点から、計画決定の段階ですでに決定されていることが多い。この、あらかじめ決められている T と、信頼性解析で得られる破壊確率 P_f とを、どのように結びつけるかということは、重要な問題である。それは、 T と P_f の関係が、時間的に連続して得られる外力の実測結果から S の標本をいかに抽出するかという問題と、密接に結びついているからである。たとえば、構造物の期待される寿命 T を 50 年とすると、 S を実測結果より抽出する際の抽出時間間隔 ΔT (つまり、 ΔT 中の最大値だけを集めて S の標本とするのである) と P_f との関係は、次のようになる。

P_f	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
ΔT	30 min.	5 hours	2 days

この関係を満たすように S の標本抽出がなされるのであれば、 P_f 自身の選択は、 10^{-6} 、あるいは、 10^{-4} のどちらでもいいといえよう。すなわち、30分に1度生ずる S_{max} を n_s 個集めて \bar{S} 、 s_s^2 を計算し、破壊水準 $P_f = 10^{-6}$ で設計する場合も、2日に1度の S_{max} を ($n_s/100$) 個集め \bar{S} 、 s_s^2 を計算し、 $P_f = 10^{-4}$ で設計する場合も、原則的には50年という同一の寿命が期待できる。ただし、前述の①～③の誤差が存在していることを考えると、結果として得られる P_f の精度、すなわち、設計自体の信頼度は、 ΔT の選び方によって相違を

生ずることになる。この相違は、前記の3種類の誤差が原因となって生ずると考えられるから、これらの誤差が P_f と ΔT の関係に及ぼす影響について検討しよう。

順序は逆になるが、まず、③の誤差について考えよう。③の誤差は、 S の分布 (R についても同じ) を、正規分布、gamma分布、対数正規分布などの既知の確率密度分布で仮定することにより生ずるものである。これらの分布は、平均値、分散については測定値と一致しているが、分布形まで完全に一致しているようなことはほとんど期待できない。この分布形の相違が P_f に及ぼす影響は、数値的に解明することが困難と思われる。厳密な理論的裏付けは得られないが、著者らは、 P_f (あるいは、 ΔT) の選び方のいかんによって、この種の誤差が減少するものとする。一般に、分布の仮定は分布検定などにより行われるが、そこでは、標本平均の近傍が重視されて、偏差の大きい部分(極大値近傍)に対しては精度(適合度)が低くなる。すなわち、 P_f を小さく選ぶほど、標本数が多いので全体としての精度は向上するが、極大値近傍での精度は相対的に低くなる。さらに、 P_f を計算する場合に積分の対象となる部分は、 P_f を小さく選ぶほど、精度の低い極大値近傍のみに限定されるようになる。このような検討、事実から、 P_f を1に近づけるような、すなわち、 ΔT を大きくするような標本抽出法が望ましいことが推測される。ただし、 P_f を過大にすると、標本数が減少し、分布検定で級間に所属する標本数が5以下となって、検定の精度そのものが低下するので注意しなければならない。

②の誤差は、本論文の主題である、標本平均、標本分散に伴う誤差である。この種の誤差については、5. までの手法により、その影響が結果の P_f に含まれている。すなわち、誤差が存在しても、その誤差が数量的に評価できるので、誤差の減少を議論する必要がなくなるわけである。したがって、 P_f は小さいほど望ましいとは断言できず、統計処理が可能な程度の標本数さえ確保されている限り、 P_f をどのように選択しようとも問題はない(危険側の結果はもたらさない)といえよう。

最後に、①の誤差については、不明確な点が多くて、 P_f との関係が不明であるので、 P_f の選び方のいかんにかかわらず一定であると仮定する。

以上、①～③の誤差との関連性から、破壊確率 P_f は、統計処理が可能な程度の標本数が確保される範囲内で、1に近いほど、すなわち、時間間隔 ΔT は大きいほど、望ましいことが予測されよう。

7. 実際の橋梁設計への応用例

平均値、分散の変動を考慮した信頼性理論を実際の構

表一 R と S の平均値, 変動係数 (設計例)

	R (kg/mm ²) 降伏強度 (SM 41 B)	S (ton) 下弦材引張力 (トラス)
標本個数	21	31
平均値	27.5	14.27
分散	1.40	3.922
標準偏差	1.18	1.980
変動係数	0.0430	0.1338

造設計に適用してみよう。実測値より、強度 R, 外力 S の平均値, 分散, 変動係数を計算し、式 (7) より P_f^0 を求める。この作業を \bar{R} と \bar{S} の各

組合せ, すなわち $r_0 (= \bar{R}/\bar{S})$ に対して行い, $r_0-P_f^0$ 曲線を得る。この $r_0-P_f^0$ 曲線を使って部材設計を行い, 従来の許容応力設計法による結果と対比し, 集中応力のない普通の部材の破断に対して, どの程度の絶対安全率が見込まれているかを検討する。

鋼材としては SM 41 B 鋼を想定し, 部材には引張力のみが軸方向に作用するという最も簡単な場合を考える。SM 41 B 鋼の耐荷強度としては, 日本鋼構造協会において, 1968 年に行われた鋼材引張試験における降伏点応力の測定結果¹¹⁾を利用する。標本数は 21 であり, それから計算された諸量を表一に示す。

橋梁形式としては, 引張力のみを想定しているため, 図-6 (1) のような平行弦ワレントラスを考え, トラス最端部下弦材の必要断面積を計算する。トラス橋は一方通行 2 車線とし, その床版横断面を 図-6 (2) に示す。計算に使われる影響線 (許容応力設計で使われる) は, 主構と床版の双方について, 図-6 (1), (2) に示す。

トラス橋の寿命 T は 100 年を想定する。そして, S の標本数 n_S は, 6. の主旨に添って $\Delta T=1$ 週間, $n_S=31$ とする。この場合, $P_f^0 \approx 2 \times 10^{-4}$ となる。

外力, すなわち, 部材に発生する引張力を求めるには, モデル発生させた擬似交通流をトラス橋に時間的に連続して作用させる。そして, 注目する下弦材に発生する刻々の引張力を計算し, その中から 1 週間に 1 度の最大引張力のみを集めて S の標本とし, \bar{S}, s_S^2 を計算する。結果を表一に示す。交通流モデルは, 日本道路公団により, 1968 年, 名神高速道路天王山トンネル付近でほぼ 31 週間にわたって連続測定された軸重計記録, ならびに, 1 日の時間当り交通量記録に基づいて, 計算機により自動車列をランダム発生させたものを使用する。航空写真判定, あるいは, 拠点における連続写真撮影などによる自動車列の作成と比較して, 軸重計を使用するということは, 荷重を軸重としてしか把握できない (1 台の車両としては把握できない) という欠点があるが, 反対に, わが国の法定上限荷重である一軸当り 16 ton を越える車両をも, 的確に把握できるという大きな利点を有する。また長

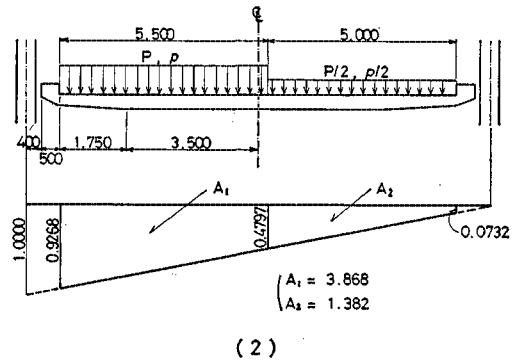
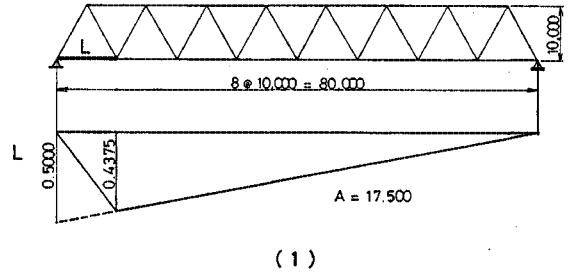


図-6 トラス主構および床版の規格ならびに影響線 (設計例)

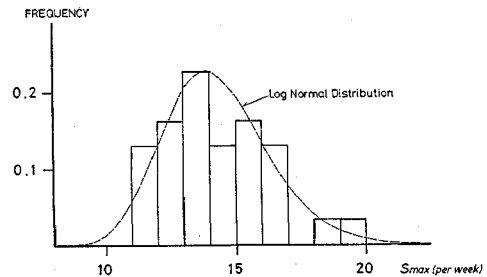


図-7 S の頻度分布 (設計例)

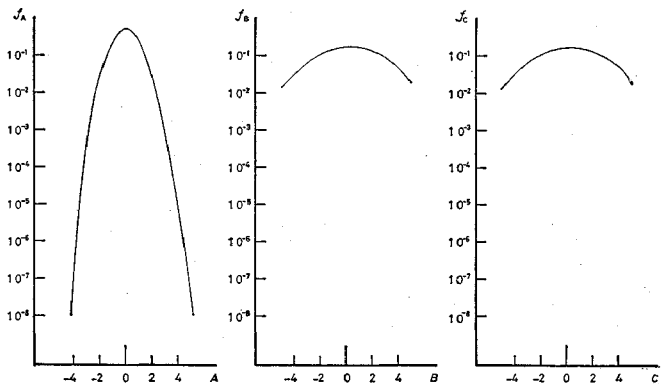


図-8 f_A, f_B, f_C (設計例-対数正規分布)

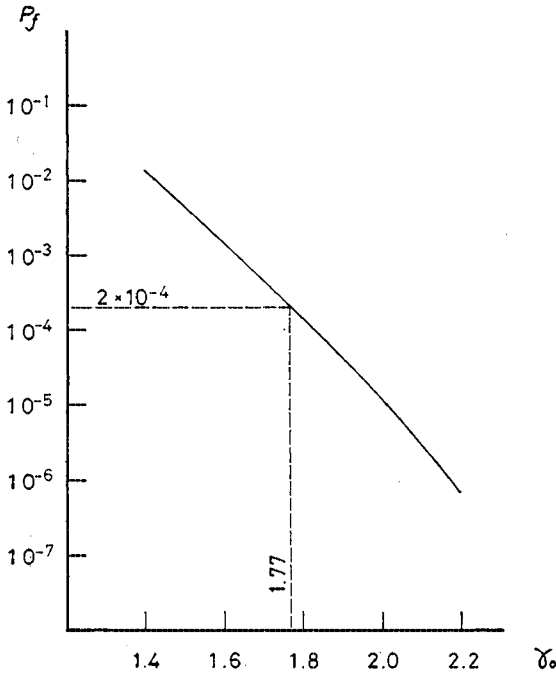


図-9 r_0 - P_f 曲線との推定 (設計例)

期間にわたる測定が可能である。

S の頻度分布により、 S の母集団分布形を仮定する。 S の頻度分布を 図-7 に示す。この場合、対数正規分布のあてはめが適切な仮定と思われる。 R と S とが、表-1 の分布特性を有する対数正規分布である場合に、変動のパラメーター A, B, C の確率密度 f_A, f_B, f_C は、図-8 のように計算される。この f_C を用い、 r_0 に対して式 (7) により P_f を計算し、図-9 に示す。この r_0 - P_f 曲線を利用して、次のように部材断面積 A_S が決定される。

- ① 設計する部材の破壊確率 P_f に相当する r_0 を、図-9 より読む。ここに、 $r_0=1.77$ である。
- ② r_0 より \bar{R} を求める。ここに、 $\bar{R}=r_0\bar{S}$ であり、 \bar{S} が表-1 より 14.27 ton であるから、 $\bar{R}=25.26$ ton である。
- ③ \bar{R} より部材断面積 A_S を求める。ここに、 $A_S=\bar{R}/(\text{降伏強度})=25.26/2.75=9.2$ cm² である。

一方、従来の許容応力設計法 (一等橋) によると、線荷重 P 、等分布荷重 p は、図-6 (2) より、それぞれ $5 \times 4.559=22.795$ ton、 $0.35 \times 4.559=1.5957$ ton/m となり、さらに、図-6 (1) より、活荷重 $L_l=22.795 \times 0.4375+1.5957 \times 17.5=37.90$ ton となる。したがって、部材断面積 A_S は、 $A_S=37.90/1.400=27.1$ cm² と求められる (1.400 ton/cm² は SM 41 B 鋼の許容応力である)。

これらの A_S には死荷重分が含まれておらず、純粋に

静的活荷重だけに対するものである。このとき、許容応力設計の絶対安全率は、 $27.1/9.2=2.9$ となる。

トラス圧縮材については、軸方向圧縮 (座屈) 実験結果を用いて同じように断面決定が行われよう。また、はりのような曲げ部材に対しては、部材断面積のかわりに断面係数が得られる。この場合、曲げ破壊、横倒れ座屈のいずれが卓越するかに注意する必要がある。

8. 結 論

静的信頼性の分野で問題となるのは3種類の誤差である。すなわち、① 人為的原因により生ずる種々の誤差、② 測定値の平均値、分散が、標本平均、標本分散にすぎず、母平均、母分散でないことによる誤差、③ 強度、および、外力の母集団分布を、既知の確率密度で仮定することによる誤差、の3つである。

以上のうち、最も重要な②の誤差については、②の誤差が生じて、結果として得られる破壊確率の値が危険側の見積りとならないように修正する手法が提案された。これにより、測定値を全面的に信頼しても、 P_f の過小評価により思わぬ破壊が生ずるような危険性は、ほとんど解消されたものと期待される。

③の誤差については、目下のところ、解析的に扱うのが困難であるので、少しでもその影響を減らすことを目的として、外力の測定値から標本を抽出する間隔 ΔT を大きくすることを提案した。 R 、および、 S の分布については、正規分布、gamma 分布、対数正規分布の3種類に限定した。測定値の分布が、これら3種類の分布のいずれかで仮定できる場合には、十分信頼できる結果を与えるものと期待される。

①の誤差については、従来より、システム理論的立場から段階的な誤差評価への試みがなされている¹²⁾。これらの誤差が、主として測定値の平均値の変動としてとらえられる場合には、破壊領域 $R < (A+B)S$ のうち、パラメーター A の確率密度 f_A を、 A に関して平行移動させることで、 P_f への影響を表わすという仮定が考えられる。分散の変動としてとらえられる場合には、パラメーター B について、同じように仮定が考えられる。

以上3つの問題点 (誤差) に対して提案された改善により、静的信頼性理論の誤差評価という面における信頼度の向上が果たされたものと考えられる。

謝 辞 本論文の計算例として、日本道路公団により長期間測定された軸重計記録と、日本鋼構造協会による鋼材引張試験値とを利用させていただいた。ともに謝意を表わしたい。

数値計算にあたっては、名古屋大学大型計算機センタ

一の FACOM 230-60 を使用した。

9. 付 録

gamma 分布の確率密度 f_{ga} は,

$$f_{ga}(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} (t-\xi)^{\alpha-1} e^{-(t-\xi)/\beta} dt \quad (t \geq \xi)$$

である。ここに、 α, β, ξ は、それぞれ、形の母数、尺度の母数、位置の母数である。また、この分布の平均値と分散は、それぞれ、 $\alpha\beta, \alpha\beta^2$ で表わされる。したがって、標本平均 \bar{x} 、標本分散 s_x^2 を使って、 α 、および、 β は、モーメント法により、次のように推定される。

$$\alpha = (\bar{x}/s_x)^2, \quad \beta = s_x^2/\bar{x}$$

さて、gamma 分布で、 $t' = (t-\xi)/\beta$ という変数変換を行うと、標準 gamma 分布が、次のように得られる。

$$f_{ga}(t') dt' = (1/\Gamma(\alpha)) t'^{\alpha-1} e^{-t'} dt' \quad (t' \geq 0)$$

この分布は、 $\nu = 2\alpha, \chi^2 = 2t'$ と変換することにより、自由度 ν の χ^2 分布となる。すなわち、

$$f_{\chi^2}(\chi^2) d(\chi^2) = (1/2 \Gamma(\nu/2)) (\chi^2/2)^{\nu/2-1} e^{-\chi^2/2} d(\chi^2)$$

が得られる。

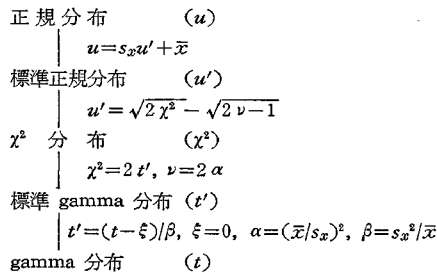
χ^2 分布は、種々の近似式により、正規分布と結びつけられているが、ここでは、中程度の近似度を有する Fisher の近似式を用いる。すなわち、 χ^2 分布の変数 χ^2 を、

$$u' = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu-1}$$

と変数変換することにより、変数 u' は、 ν が十分大きい場合 ($\nu > 10$) には、近似的に標準正規分布となる。最後に、もとの gamma 分布と同じ平均値、分散をもつ正規分布を得るために、 u' を次のように強制的に変換させる。

$$u = s_x u' + \bar{x}$$

これらの関係を1つの流れ図にすると、次のようになる。



すなわち、gamma 分布に従う変数 t は、次の式により、正規分布変数 u に、近似的に変換される。

$$\begin{aligned} u &= s_x u' + \bar{x} \\ &= s_x \sqrt{2\chi^2} - s_x \sqrt{2\nu-1} + \bar{x} \\ &= s_x \sqrt{4t'} - s_x \sqrt{4\alpha-1} + \bar{x} \\ &= 2s_x \sqrt{t/\beta} - s_x \sqrt{4\alpha-1} + \bar{x} \\ &= 2s_x \sqrt{t\bar{x}/s_x^2} - s_x \sqrt{4\bar{x}^2/s_x^2 - 1} + \bar{x} \\ &= 2\sqrt{\bar{x}t} - \sqrt{4\bar{x}^2 - s_x^2} + \bar{x} \end{aligned}$$

参 考 文 献

- 1) Freudenthal, A.M. : Safety of Structure, Trans. ASCE, 112, 1947, pp. 125-180.
- 2) Jorgenson, J.L. : The Sensibility of Failure Probabilities to Probability Distributions, Memorandum of Committee on Factors of Safety, 1967.
- 3) Ang, A.H.S. and Amin, M. : Reliability of Structures and Structural Systems, Proc. ASCE, 94, EM 2, 1968, pp. 559-583.
- 4) Benjamin, J.R. and Cornell C.A. : Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers, McGraw-Hill, 1970.
- 5) Cornell, C.A. : A Probability-Based Structural Code, ACI J., 66, 1969, pp. 974-985.
- 6) Esteva, L. and Rosenblueth, E. : Use of Reliability Theory in Building Codes, Proc. 1st. Inter. Conf. on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engng., Hong Kong, 1971, pp. 17-34.
- 7) Ang, A.H.S. and Amin, M. : Safety Factors and Probability in Structural Design, Proc. ASCE, 95, ST 7, 1969, pp. 1389-1405.
- 8) Ang, A.H.S. : Probability Considerations in Design and Formulation of Safety Factors, Proc. Symp. on Concepts of Safety of Structures and Methods of Design, London, IABSE, 1969, pp. 13-23.
- 9) Ang, A.H.S. and Ellingwood, B.R. : Critical Analysis of Reliability Principles Relative to Design, Proc. 1st. Inter. Conf. on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engng., Hong Kong, 1971, pp. 1-15.
- 10) 山内二郎編 : 統計数値表, JSA-1972, 日本規格協会, pp. 19-20, 96-97, 1972.
- 11) 堀川浩甫 : 引張試験片の形状に関する実験報告, JSSC, 5(48), pp. 52-67, 1969.
- 12) 高木 昇 : 信頼性概論, 信頼性工学講座 1, 東京電機大学出版局, pp. 64-93, 1972.

(1975.10.29・受付)