

運動方程式と等価な変分汎関数と 時間積分の有限要素スキーム

A VARIATIONAL FUNCTIONAL AND TIME INTEGRATION SCHEME FOR ANALYSIS OF THE EQUATION OF MOTION

吉田 裕*・増田 陳 紀**・村田 修***

By Yutaka YOSHIDA, Nobutoshi MASUDA and Osamu MURATA

1. はじめに

電子計算機の進歩に伴って、構造物の動的応答解析の可能性が格段に開けたこと、それに伴って本格的な耐震計算を必要とするような構造物が次々と具体化されているために、動的応答解析は構造問題の中で重要な位置を占めるようになった^{1),2)}。

時間依存の問題に対して、連続型問題の離散化手法としての有限要素法を、空間のみならず時間座標をも含めて適用しようとする試みも行われている^{3),4)}が、現状では、空間と時間とを分離して考え、空間に対しては有限要素法を適用し、時間に関する常微分方程式に変換した後、時間方向には差分公式を適用して直接的に解析したり、モード解析を行った後解析解を適用したりして解析するのが一般的である。時間依存の問題の数値解析上の基本的な問題の1つは、時間方向の数値積分法に関するものである。したがって、初期値問題の微分方程式、特に運動方程式に対応する2階の微分方程式の解法に関する積分公式の提案や、それらの公式の安定性などを検討した、数多くの研究が行われてきた^{5)~22)}。

現在、構造物の動的応答の数値解析において最も広く採用されている直接積分の公式は、線型加速度法およびパラメーター β を導入して、時間刻み幅の始点と終点における加速度の、対象時間幅内の加速度の値への寄与率を調節できるように改良した Newmark の β 法⁵⁾に代表される差分公式である。差分公式の場合には、時間刻み幅との対応で安定性に対する検討が重要な問題となる。そのような背景から、線型加速度法の公式に新たに変数 θ を導入して無条件に安定になるように改良した Wilson の θ 法⁷⁾の提案がなされた。しかし、このような安

定なアルゴリズムも、高周波成分を急速に減衰させ、また得られる振動の周期が実際より長くなるといった特性が指摘されている^{9)~11)}。線型加速度法を基礎とした種々の公式の限界から、拡張された Hamilton 原理に基づき、有限要素法の手法によって誘導された積分公式の提案^{12),13)}や各時間刻み幅の始点で慣性項を Taylor 展開し、これを多項式で外挿し、有限要素法の手法を導入してマトリックス関係式を誘導して用いる方法^{14),15)}、解析的方法を実用化するための研究^{21),22)}、など多くの研究や提案がなされている。これらの方法のうち、どの方法を採用するかは、精度、安定性、計算効率などの諸要因を勘案して決めるべき問題である。

本論文は、これらの方法とは本質的に異なる位置づけにあると考えられる、運動方程式の数値積分法を提案するものである。すなわち、本方法の基本的なアイデアは、初期値問題としての変位 x に関する2階の微分方程式を、新たに導入する変数 φ に関する4階の微分方程式の境界値問題として解こうとするものである。動的応答問題における外力項は、一般に、地震入力波などとしてあらかじめ与えられている確定外力であり、このような場合には本方法は妥当である。本方法は、通常のはりの曲げの解析における部材軸を時間軸 t と対応させるとき、先端で力の条件が与えられ、終端で変位の条件が与えられる片持はりを、マトリックス法によって解析することと本質的に等価なものである。

まず、与えられた初期条件のもとでの変位 x に関する運動方程式と等価な、境界値問題としての変数 φ に関する4階の微分方程式を支配方程式として提案し、これに等価な変分汎関数を与える。この汎関数は、自然境界条件として x および $x^{(1)}$ ($\equiv dx/dt$)が対応するものである。対象時間領域を有限個の部分時間領域(要素)に分割し、各時間節点に基本変数として φ および $\varphi^{(1)}$ を導入する。各部分時間領域内の φ を、節点に導入された基本変数の関数として補間し、与えられた変分汎関数に基

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 日本国有鉄道信濃川工務局

づいて、各部分時間領域を支配する、節点基本変数 $(\varphi, \varphi^{(1)})$ と内部節点自然変数 $(x^{(1)}, x)$ を関係づけるマトリックス式を誘導する。上記の節点基本変数ははりの解析における節点変位(たわみ, たわみ角)に対応し、内部節点自然変数ははりの解析における内部節点力(せん断力, 曲げモーメント)に対応するものである。

各部分時間領域(要素)のマトリックス関係式に基づいて、動的応答問題の解析を、普通のはりの静力学的解析とまったく同じように、対象時間領域の始点と終点に与えられた境界条件のもとで、連立一次方程式を解くことに帰着させることができる。この方法による積分結果は、時間領域の終点に与える境界条件のために、位相のずれを生ずることがなく、また境界値問題として解くのであるから、丸めの誤差を別にすれば、無条件に安定である。

直接積分法が特に実用的な方法であるのは、多自由度系の積分を直接行うことができるためである。ここに提案する方法は、本文中においてはすべて多自由度系を対象としてベクトル表示したように、多自由度系の問題の直接積分法として有効である。また、Step by Step に積分していく公式に変換することも容易であり、計算機の容量および計算過程で生ずる丸めの誤差の面から、多自由度系の応答解析の場合には、この方がより効果的である。

2. 基礎方程式

有限自由度に理想化された構造系に動的な外力 $\bar{f}(t)$ が作用するとき、系の運動を支配する運動方程式は次のように与えられる。

$$ax^{(2)} + \beta x^{(1)} + \gamma x = \bar{f} \dots\dots\dots(1)$$

$$x|_{t=0} = x_0, x^{(1)}|_{t=0} = x_0^{(1)} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 x は対象構造系(自由度 n)の変位ベクトル、 $x^{(k)} \equiv d^k x / dt^k$, a は質量マトリックス, β は減衰マトリックス, γ は剛性マトリックス, \bar{f} は与えられる外力のベクトル, である。

動的応答解析は、式(2)に与えられた初期条件のもとで、与えられた動的な外力 \bar{f} に対して、式(1)を解くことである。ここでは、新たに変数のベクトル φ を導入し、変位ベクトル x を次のように、式(1)と共役な形で定義する。

$$x = a^T \varphi^{(2)} - \beta^T \varphi^{(1)} + \gamma^T \varphi \dots\dots\dots(3)$$

式(3)を式(1)に代入すると、次のような4階の微分方程式が得られる。

$$aa^T \varphi^{(4)} - (a\beta^T - \beta a^T) \varphi^{(3)} + (a\gamma^T + \gamma a^T - \beta\beta^T) \varphi^{(2)} + (\beta\gamma^T - \gamma\beta^T) \varphi^{(1)} + \gamma\gamma^T \varphi = \bar{f} \dots\dots\dots(4)$$

すなわち、微分演算子 T を導入して式(1)を $Tx = \bar{f}$ と

表わすとき、 T と共役な演算子 T^* によって式(3)は $T^* \varphi = x$ と表わされ、したがって式(4)は $T T^* \varphi = \bar{f}$ である。

3. 基礎方程式と等価な変分汎関数

工学問題としての動的応答解析においては、対象時間領域は一般に有限である。したがって、有限の時間領域 $0 \leq t \leq T$ を対象とするものとすれば、式(4)の基礎方程式を Euler 方程式として与え、初期条件として与えられる x および $x^{(1)}$ に対応する関数を自然境界条件として与えるような変分汎関数 Π を次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} \Pi = \int_0^T & \left[\frac{1}{2} (a^T \varphi^{(2)} - \beta^T \varphi^{(1)} + \gamma^T \varphi)^T \right. \\ & \left. \cdot (a^T \varphi^{(2)} - \beta^T \varphi^{(1)} + \gamma^T \varphi) - \varphi^T \bar{f} \right] dt \\ & - [(\varphi^{(1)})^T \bar{F}_1 + \varphi^T \bar{F}_0]_{t=0, T} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

ここに、 φ は時間領域 $0 \leq t \leq T$ で定義された連続な関数のベクトルであり、 \bar{F}_1 および \bar{F}_0 は $t=0$ および T において、基本変数のベクトル $\varphi^{(1)}$ および φ に対応して与えられる自然境界条件のベクトルを意味している。

すなわち、 $t=T$ における境界条件として

$$\varphi|_{t=T} = \varphi^{(1)}|_{t=T} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

を強制するものとすれば、式(5)の汎関数の停留条件 $\delta \Pi = 0$ から次のような Euler 方程式が得られる。

$$\begin{aligned} aa^T \varphi^{(4)} - (a\beta^T - \beta a^T) \varphi^{(3)} \\ + (a\gamma^T + \gamma a^T - \beta\beta^T) \varphi^{(2)} \\ + (\beta\gamma^T - \gamma\beta^T) \varphi^{(1)} + \gamma\gamma^T \varphi - \bar{f} = 0 \\ \text{in } 0 < t < T \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(a^T \varphi^{(2)} - \beta^T \varphi^{(1)} + \gamma^T \varphi) - \bar{F}_1 = 0, \\ -aa^T \varphi^{(3)} + (a\beta^T - \beta a^T) \varphi^{(2)} \\ - (a\gamma^T - \beta\beta^T) \varphi^{(1)} - \beta\gamma^T \varphi - \bar{F}_0 = 0 \\ \text{on } t=0 \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

式(7)は式(4)とまったく同じ方程式であり、式(8)は式(3)から明らかなように、 x および $x^{(1)}$ で次のように表わすことができるものである。

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 = ax \\ \bar{F}_0 = -(ax^{(1)} + \beta x) \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

4. 有限要素技法による定式化

対象時間領域 ($0 \leq t \leq T$) を有限の数の部分時間領域(時間要素) T_m の集合として理想化し、各部分時間領域間に設定される時間節点に基本変数のベクトル φ および $\varphi^{(1)}$ を節点変数として導入する。すなわち、節点変数 u_i は

$$u_i^T = [\varphi^T (\varphi^{(1)})^T]_i \dots\dots\dots(10)$$

各時間要素内の変数ベクトル φ を、3 次の多項式で次のように補完する。

$$\varphi = \sum_{k=0}^3 a_k t^k = \phi q \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、

$$\phi = [\langle 1 | \langle t | \langle t^2 | \langle t^3 |]$$

$$q^T = \langle a_0^T \ a_1^T \ a_2^T \ a_3^T \rangle$$

であり、 $\langle 1 |, \langle t |, \dots$ は $1, t, \dots$ を対角要素とする ($n \times n$) の対角マトリックス、 a_k は ($n \times 1$) の係数ベクトルである。

いま、代表的な時間要素の両端の節点を i および j 、対応する時間座標を $t = t_i$ および t_j 、その要素の時間長さを $t_m (t_m = t_j - t_i)$ とすると、要素の両端の節点に導入された節点変数

$$u^T = \langle u_i^T \ u_j^T \rangle \quad \dots\dots\dots (12)$$

と式 (11) の係数ベクトル q との関係は次のように表わされる。

$$u = Aq \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、変換マトリックス A は次のような ($4n \times 4n$) のマトリックスである。

$$A = \begin{bmatrix} \langle 1 | & \langle 0 | & \langle 0 | & \langle 0 | \\ \langle 0 | & \langle 1 | & \langle 0 | & \langle 0 | \\ \langle 1 | & \langle t_m | & \langle t_m^2 | & \langle t_m^3 | \\ \langle 0 | & \langle 1 | & \langle 2 t_m | & \langle 3 t_m^2 | \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$k_{11} = \frac{13}{35} \gamma \gamma^T \cdot t_m + \frac{1}{2} (\beta \gamma^T + \gamma \beta^T) + \frac{6}{5} (\beta \beta^T - \alpha \gamma^T - \gamma \alpha^T) \cdot \frac{1}{t_m} + 12 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m^3}$$

$$k_{12} = \frac{11}{210} \gamma \gamma^T \cdot t_m^2 + \frac{1}{10} (\beta \gamma^T - \gamma \beta^T) \cdot t_m + \frac{1}{10} (\beta \beta^T - \alpha \gamma^T - 11 \gamma \alpha^T) + (\alpha \beta^T - \beta \alpha^T) \cdot \frac{1}{t_m} + 6 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m^2}$$

$$k_{13} = \frac{9}{70} \gamma \gamma^T \cdot t_m + \frac{1}{2} (\beta \gamma^T - \gamma \beta^T) + \frac{6}{5} (-\beta \beta^T + \alpha \gamma^T + \gamma \alpha^T) \cdot \frac{1}{t_m} - 12 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m^3}$$

$$k_{14} = -\frac{13}{420} \gamma \gamma^T \cdot t_m^2 + \frac{1}{10} (-\beta \gamma^T + \gamma \beta^T) \cdot t_m + \frac{1}{10} (\beta \beta^T - \alpha \gamma^T - \gamma \alpha^T) + (-\alpha \beta^T + \beta \alpha^T) \cdot \frac{1}{t_m} + 6 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m^2}$$

$$k_{22} = \frac{1}{105} \gamma \gamma^T \cdot t_m^3 + \frac{2}{15} (\beta \beta^T - \alpha \gamma^T - \gamma \alpha^T) \cdot t_m + \frac{1}{2} (\alpha \beta^T + \beta \alpha^T) + 4 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m}$$

$$k_{23} = \frac{13}{420} \gamma \gamma^T \cdot t_m^2 + \frac{1}{10} (\beta \gamma^T - \gamma \beta^T) \cdot t_m + \frac{1}{10} (-\beta \beta^T + \alpha \gamma^T + \gamma \alpha^T) + (\alpha \beta^T - \beta \alpha^T) \cdot \frac{1}{t_m} - 6 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m^2}$$

$$k_{24} = -\frac{1}{140} \gamma \gamma^T \cdot t_m^3 + \frac{1}{60} (-\beta \gamma^T + \gamma \beta^T) \cdot t_m^2 + \frac{1}{30} (-\beta \beta^T + \alpha \gamma^T + \gamma \alpha^T) \cdot t_m$$

$$+ \frac{1}{2} (-\alpha \beta^T + \beta \alpha^T) + 2 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m}$$

$$k_{33} = \frac{13}{35} \gamma \gamma^T \cdot t_m + \frac{1}{2} (-\beta \gamma^T - \gamma \beta^T) + \frac{6}{5} (\beta \beta^T - \alpha \gamma^T - \gamma \alpha^T) \cdot \frac{1}{t_m} + 12 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m^3}$$

$$k_{34} = -\frac{11}{210} \gamma \gamma^T \cdot t_m^2 + \frac{1}{10} (\beta \gamma^T - \gamma \beta^T) \cdot t_m + \frac{1}{10} (-\beta \beta^T + \alpha \gamma^T + 11 \gamma \alpha^T)$$

$$+ (\alpha \beta^T - \beta \alpha^T) \cdot \frac{1}{t_m} - 6 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m^2}$$

$$k_{44} = \frac{1}{105} \gamma \gamma^T \cdot t_m^3 + \frac{2}{15} (\beta \beta^T - \alpha \gamma^T - \gamma \alpha^T) \cdot t_m + \frac{1}{2} (-\alpha \beta^T - \beta \alpha^T) + 4 \alpha \alpha^T \cdot \frac{1}{t_m}$$

また

$$k_{ij} = k_{ji}^T$$

である。

式 (11) から、式 (5) の汎関数内の微分形が次のように表わされる。

$$\alpha^T \varphi^{(2)} - \beta^T \varphi^{(1)} + \gamma^T \varphi = Pq = PBu \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

$$P = [\gamma^T | -\beta^T + \gamma^T \cdot t | 2\alpha^T - 2\beta^T \cdot t$$

$$+ \gamma^T \cdot t^2 | 6\alpha^T \cdot t - 3\beta^T \cdot t^2 + \gamma^T \cdot t^3] \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$B = A^{-1} \quad \dots\dots\dots (17)$$

したがって、基本変数 u と自然変数 F とを結ぶ時間要素マトリックスが次のように得られる。すなわち、

$$F = ku \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$= B^T \int_0^{t_m} P^T P dt B \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$F = \begin{Bmatrix} -F_i \\ F_j \end{Bmatrix}, \quad F_i = \begin{Bmatrix} -(\alpha x^{(1)} + \beta x) \\ \alpha x \end{Bmatrix}_i \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}, \quad u_i = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi^{(1)} \end{Bmatrix}_i \quad \dots\dots\dots (21)$$

なお、式 (19) の要素マトリックス k は ($4n \times 4n$) の対称マトリックスであり、 $n \times n$ の部分マトリックス k_{ij} で分割して表わすとき、要素マトリックスの具体的な内容は以下に示すとおりのもとなる。

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (22)$$

5. 解 法

式 (22) に得られた要素マトリックスは、式 (18) に示したように、時間に関する 1 次元の対象系の隣接する 2 つの節点間の、節点に導入された基本変数とそれに対応する自然変数との関係を与えるものである。したがって、構造系でいえば、基本変数としてたわみとたわみの勾配が与えられ、自然変数としてせん断力と曲げモーメントが対応する、1 次元はり要素と類似のものである。

外荷重 \bar{F} の項は、式 (5) の変分汎関数で明らかに示されるように、要素内の補間関数 φ を重み関数とした積分の意味で評価されるものであり、構造でいう、いわゆる等価節点力とまったく同じように扱うことができるものである。ここで対象としている方程式は式 (4) に与えた 4 階の微分方程式であるから、初期条件として式 (2) に与えられた 2 つの自然条件と、式 (6) に与えた 2 つの終端の条件の計 4 つの与えられた条件のもとで境界値問題として解くことができる。すなわち、節点に導入された変数の数、したがって、要素マトリックスの大きさが異なるだけで、解法ははりの解法とまったく同じである。

6. 数値計算例

(1) 1 自由度系の自由振動

非減衰固有円振動数 $\omega=1.0$ の 1 自由度系を対象として、減衰定数 $h=0\%$ および 5% の 2 ケースについて、初期条件 $x_0=1.0$, $\dot{x}_0^{(1)}=0$ のもとで、(1) Duhamel 積分、(2) Newmark β 法 ($\beta=1/4$)、(3) Wilson θ 法 ($\theta=1.5$) の各計算法で数値積分を行い、ここに提案したアルゴリズムによる計算結果と比較したものが図-1 である。積分のための時刻幅は $\Delta t=0.5$ sec であり、周期 $T=2\pi$ sec に対して $\Delta t/T=0.08$ である。

Duhamel 積分による解は正解と見なすことができるから、この結果との比較から、振幅の誤差および位相のずれの両者に対して、ここに提案したアルゴリズムが良好な結果を与えることがわかる。

(2) 1 自由度系の強制振動

強震記録 (1940 El Centro NS) を入力波として、1 自由度系の強制振動の応答を (1) に述べた 3 つの数値積分法で計算し、ここに提案した方法による結果と比較したものが図-2 である。ここで用いた強震記録は波形のピーク値を採るようにデジタル化されたものであり、したがって、時刻幅は一定ではない。平均時刻幅は約 0.06 秒である。入力波は各時刻幅内では線型補間して用いた。Duhamel 積分による結果は、ここでも正解と見なすことができる。

積分のための時刻幅が、対象構造の振動数 ω との相対で大きくなっても、ここに提案したアルゴリズムの精度が非常によいことがわかる。

(3) 多自由度系の自由振動

図-3 に示したような 5 自由度系を対象とし、初期条件として最上部の質点に 10 cm の変位を与えた場合の自由振動の解析を行い、結果を比較した。モード解析を行った後、各モードに対して Duhamel 積分の数値解を適用して得られる解析結果と比較するために、減衰マトリックスは、対角行列 β^* ($\beta^*=2h\omega$ (ω : 振動数マトリックス, h : 減衰定数マトリックス)) から逆算して作成した。対象構造の 1 次の固有周期は 1.42 秒、5 次の固有周期は 0.211 秒である。減衰定数を 5% とし、数値積分の時刻幅 Δt を $\Delta t=0.05$ 秒と 0.1 秒の 2 ケースについて、最上部の質点の応答変位を比較して図-4 に示した。比較の対象とした計算法は、(1) モード解析を行い、Duhamel 積分による方法、(2) Newmark の β 法を反復計算を必要としない形で与えた Chan の方法の 2 つである。

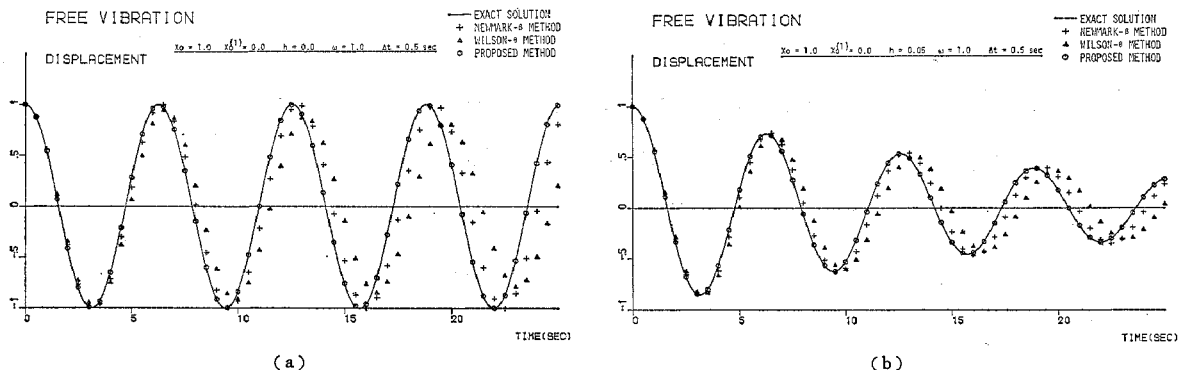


図-1 1 自由度系の自由振動

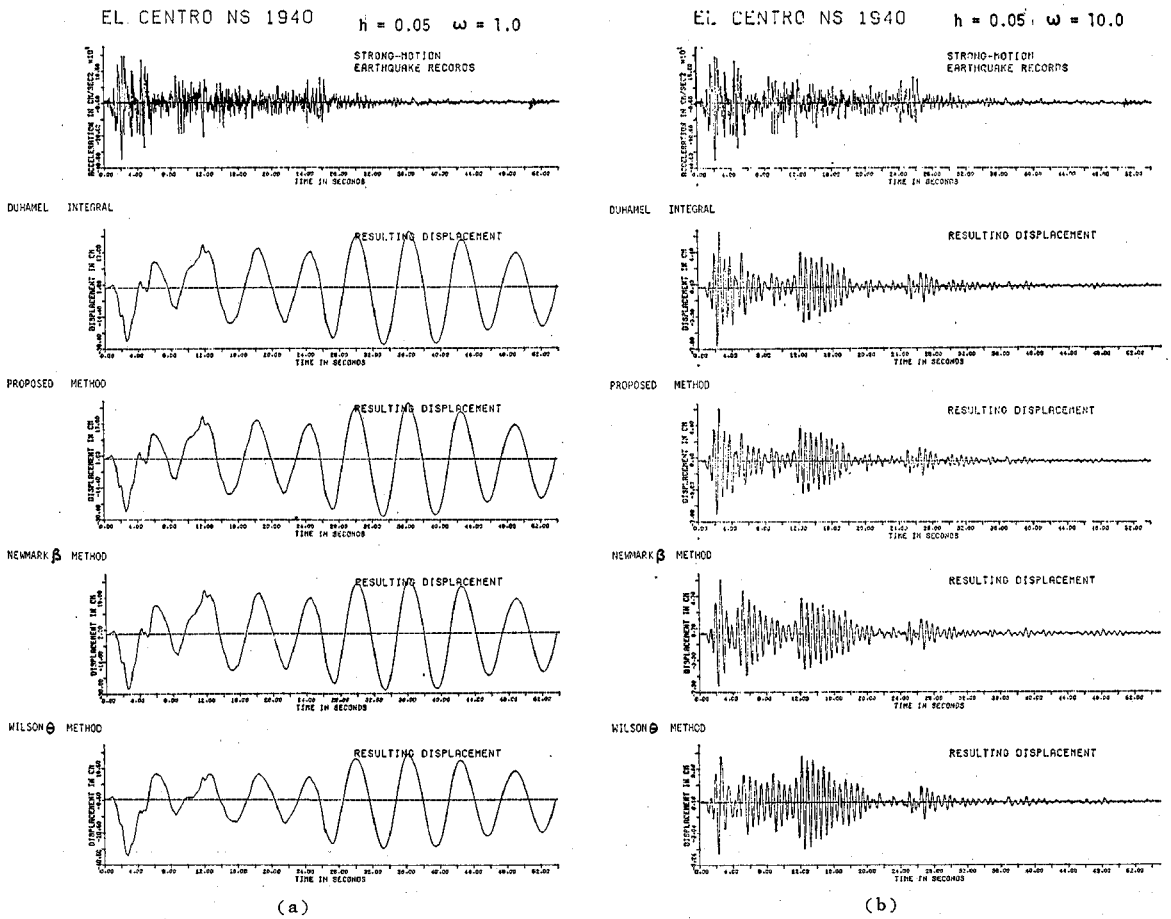


図-2 1自由度系の強制振動

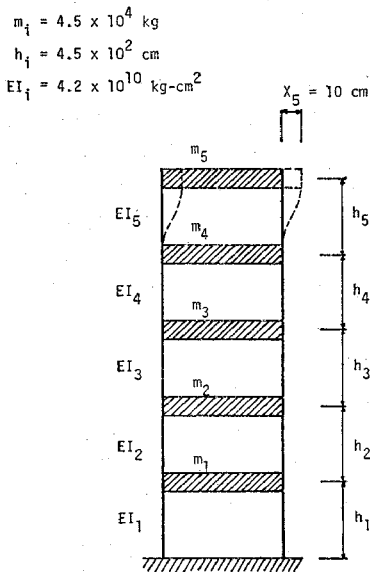


図-3 解析対象

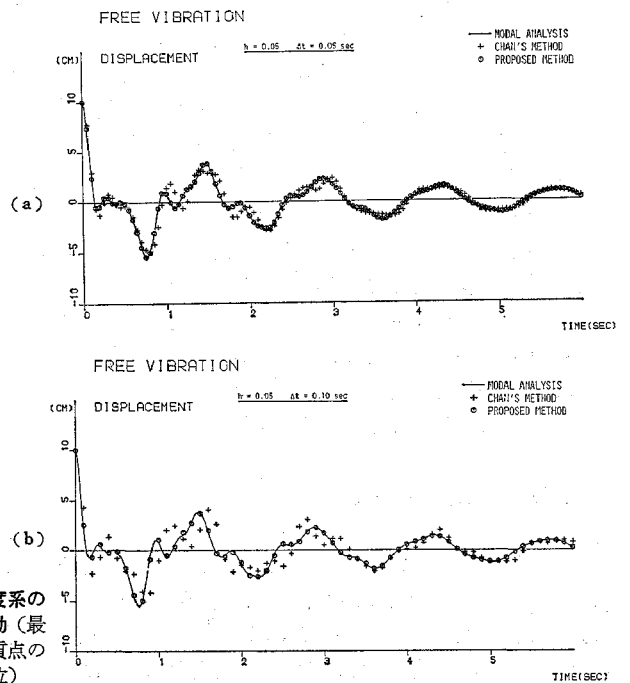


図-4 多自由度系の自由振動 (最上部の質点の応答変位)

モード解析を行い、Duhamel 積分によって得られた解は、ここでも正解と見なすことができる。したがって、このグラフから $\Delta t=0.1$ 秒 (最小固有周期 T_{\min} に対して $\Delta t/T_{\min} \approx 1/2$) の場合でも、ここに提案したアルゴリズムによる積分結果が非常に良好であることがわかる。

7. 問題点

ここに提案した積分法によれば、初期値問題としての運動方程式の積分を、構造解析においては最も初等的な 1 次元はり構造の解析とまったく同様に、1 次元時間座標に関する境界値問題として解くことができるので、解法そのものは非常に簡単である。しかし、1 つの時間節点に導入される変数の数は対象構造系の自由度 n に対して $2n$ であり、したがって、式 (22) からわかるように、時間要素マトリックスは $4n \times 4n$ の大きさとなる。時間軸は 1 次元であるから、時間方向には $2n \times 2n$ の部分マトリックスに関して 3 重対角のバンドマトリックスとはなるが、いずれにしても対象とする構造系の自由度が大きい場合には、時間領域までを含めた全体の方程式の大きさはぼう大なものとなり、いかに大容量の計算機といえども、これを直接解くことは実際問題として不可能になる。また、これまでに述べてきたように、対象時間領域の始端と終端に与えられる境界条件だけを考慮して、対象時間領域全体を対象とする場合には、対象時間領域が大きくなると、領域内に含まれる時間要素の数が非常に多くなり、その結果、数値計算の過程で生ずる丸めの誤差が大きく影響し解析精度が悪くなる。

また、式 (22) に示した要素マトリックスの具体的な内容を見つけて明らかなように、一般的な差分公式と比較して、要素マトリックスはかなり複雑なものとなる。しかし、これは α, β, γ の次の 6 つの組合せ

$$\alpha\alpha^T, \beta\beta^T, \gamma\gamma^T, \alpha\beta^T, \beta\gamma^T, \gamma\alpha^T \dots \dots \dots (23)$$

で構成され、部分時間領域 (要素) の時間長 t_m はそれぞれに対する係数として考慮することができるので、もし、上記の 6 つのマトリックス乗算の結果を保存することができるならば、要素時間長 t_m がランダムに与えられるような積分計算に対しても要素マトリックスの内容のすべてをその都度計算する必要はない。

8. 漸化公式への変換

7. で述べたように、対象時間領域全体を 1 度に対象とする解法には、いくつかの問題点が内在する。しかし、ここで提案するアルゴリズムを以下に述べるような Step by Step に積分していく方法に変換することによ

って、内在する問題点のいくつかを解決することができる。

具体的内容を明確にするために、式 (18), (20), (21) における j を $i+1$ と書き改めて再びここに示す。

$$\begin{Bmatrix} -F_i \\ F_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (24)$$

$$F_i = \begin{Bmatrix} -(\alpha x^{(i)} + \beta x) \\ \alpha x \end{Bmatrix}_i, \quad u_i = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi^{(i)} \end{Bmatrix}_i \dots \dots (25)$$

式 (22) から明らかなように、式 (24) の K_{ij} は要素マトリックスを構成する $n \times n$ の部分マトリックス k_{ij} を 4 つ含んだ $2n \times 2n$ の部分マトリックスである。式 (18) に与えられた要素関係式、したがって式 (24) は時間要素の両端の時間節点 $t=t_i$ および $t=t_{i+1}$ に導入される基本変数 u_i, u_{i+1} とそれらと共役対をなす自然変数 F_i, F_{i+1} との関係を与えるものである。いま、部分時間領域の始端 i において与えられる F_i に対して終端における F_{i+1} を知りたい。

いま、式 (5) に与えられた汎関数の変分問題を、ここで対象としている部分領域に当てはめてみると、 F_{i+1} に対応する u_{i+1} を $u_{i+1}=0$ として強制して、 $t=t_{i+1}$ における境界の項を削除する必要があり、 F_{i+1} は $u_{i+1}=0$ に対応して得られる反力に相当するものであることは明らかである。したがって、式 (24) から次のような関係式が得られる。

$$-F_i = K_{11}u_i \dots \dots \dots (26)$$

$$F_{i+1} = K_{21}u_i \dots \dots \dots (27)$$

式 (26), (27) から、次のような漸化式が得られる。

$$F_{i+1} = K_{21}K_{11}^{-1}(-F_i) \dots \dots \dots (28)$$

式 (28) は 1 つの時間要素の始端と終端における F に関する漸化式である。しかし、式 (28) に関して 2 つの事項に注意する必要がある。1 つは、 F の符号の問題である。すなわち、 F は自然変数であるから、式 (28) から明らかなように、要素 $(i-1, i)$ の i 端で得られた $F_{i,i-1}$ を要素 $(i, i+1)$ の i 端の条件として用いる場合には、符号を逆にする必要がある。このことは、一番最初に与えられる初期条件に対しても同じであり、与えられた x_0 および $x_0^{(i)}$ から得られる \bar{F} を符号を逆にして $-\bar{F}$ として考慮する必要がある。もう 1 つの注意は、与えられた外力 \bar{F} の扱いである。すなわち、強制振動の応答計算においては、与えられた外力 \bar{F} の項を考慮する必要がある。ここで、時間節点 i を共有する隣接する 2 つの要素領域内に分布する外力 \bar{F} に対して、それぞれの要素内に仮定される重み関数 φ を乗じて積分した意味において節点 i で評価される等価節点外力を \bar{F}_i と書くものとする。要素 $(i, i+1)$ の i 点で評価されるべき自然変数 $F_{i,i+1}$ は、要素 $(i-1, i)$ の i 点で評価された $F_{i,i-1}$ の値に \bar{F}_i の影響を加えたものとなる。すなわ

ち、式(28)の漸化式は一般的には外力項を考慮して、次のように書く必要がある。

$$F_{i+1} = K_{21} K_{11}^{-1} (-F_i + \bar{F}_i) \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 \bar{F}_i は時間の関数として与えられる外乱に対応する等価節点外乱であり、初期条件は与えられた x_0 および $x_0^{(1)}$ によって得られる \bar{F} を $F_i = \bar{F}$ として考慮する。式(29)がここで提案する運動方程式の時間積分のための漸化公式である。式(29)によって、与えられた初期条件および外力項のもとで Step by Step に各時間節点における F_i を求めることができる。

なお、式(20)に明確に示したように、 F_i の内容は下記のようなものである。

$$F_i = \left\{ \begin{array}{l} -(\alpha x^{(1)} + \beta x) \\ \alpha x \end{array} \right\}_i \dots\dots\dots (30)$$

したがって、各時間節点において得られた F_i から、まず変位 x を求め、次に速度 $x^{(1)}$ を求める計算が必要となる。

9. 提案する漸化公式の解析精度の確認

式(29)に基づいて 6. に示したそれぞれの問題に対する解析を行った結果、5. に述べた方法では全対象時間領域を大きくとった場合には丸めの誤差が大きくなるために、必然的に全体の対象時間領域を小さくとらざるを得なかった多自由度系の自由振動の問題を含めて、すべての問題に対して非常に精度の解が得られることを確認した。

しかし、いかに精度がよいといっても、連続な解を離散点で評価するために多項式近似を採用しているのだから、自ら適用限界がある。提案した時間積分のスキームが有効に利用されるためには、その適用限界を明確にしておくことが必要であると考え、得られたスキームが複雑なものであるため、現段階では安定性などに関する数学的な検討は行っていない。

したがって、ここでは適用限界を判断する手がかりとして、具体的な数値計算結果を示すことにする。図-5 は非減衰固有円振動数 $\omega=1.0$ の 1 自由度系に対して、減衰定数をそれぞれ $h=0\%$ 、 5% および 10% に設定した 3 種類の対象に対して、初期条件 $x_0=1.0$ 、 $x^{(1)}=0.0$ のもとでの自由振動の問題の解析結果を示したものである。適用限界を示すという目的のために、積分のための時間間隔 dt は極端に大きくとり、 $\omega \cdot dt$ の値で 1, 2, 4, 8 の 4 通りの場合の結果を選び、式(29)の漸化公式によって解析した結果を正解および Newmark β 法による解と比較して示した。

図中には積分に用いた点の値はすべて記入している。したがって、プロットされた点の数またはその間隔と正

解を示す波形とを対応すれば、提案した漸化公式の解析精度のあらましは明らかである。

ここに提案した時間積分のスキームの位置づけを明確にするためにこれまでに示した計算例は、すべて応答変位の結果である。当然のことではあるが、応答速度、加速度の結果も変位と同様の精度で得ることができる。

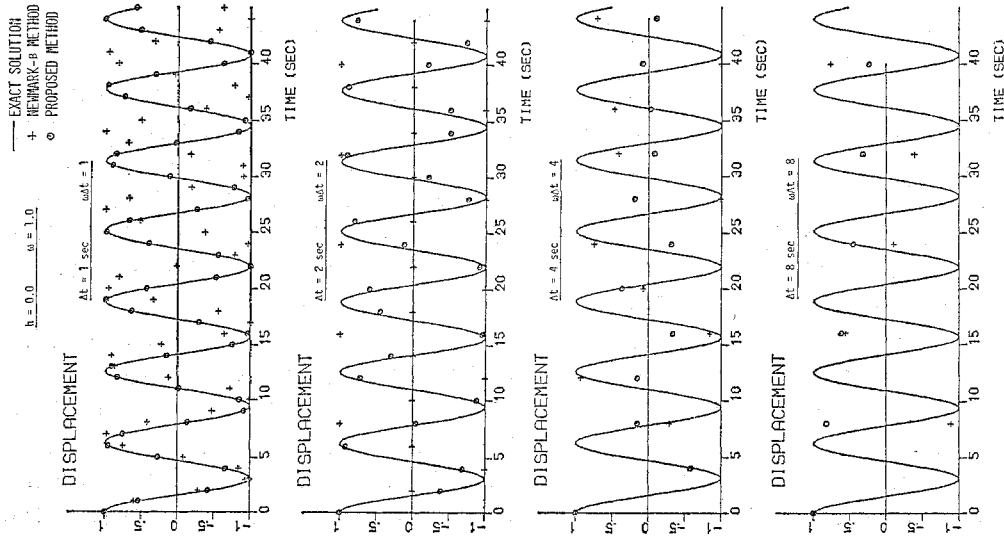
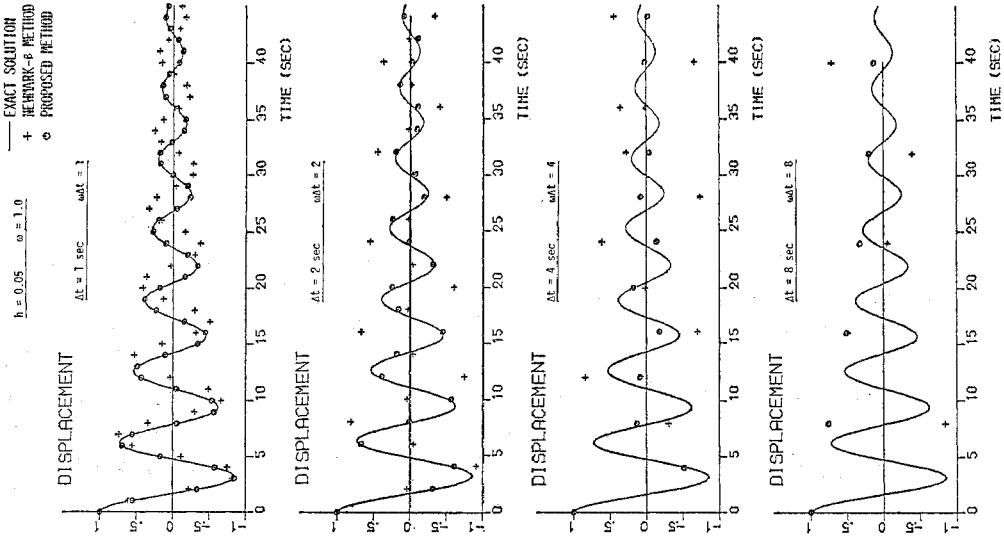
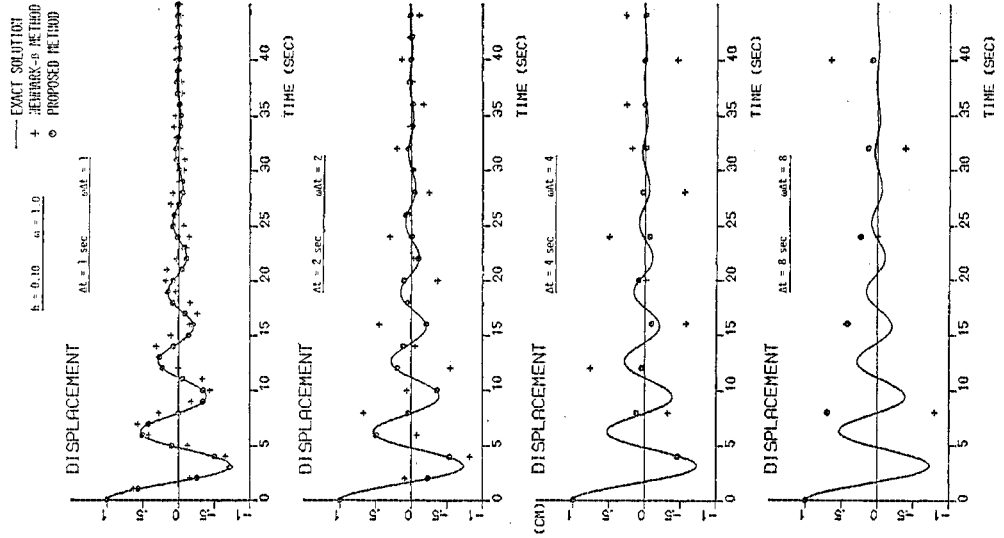
解析結果の 1 例として、図-3 に示した 5 自由度系を対象として、基礎部に強震加速度記録 (1940 El Centro NS (記録は、図-2 (a) および (b) の最上段に掲載している)) を入力波として、多自由度系の強制振動の応答解析を行い、結果のうち最上部の質点の相対変位、相対速度、および絶対加速度の結果を、モード解析を行い Duhamel 積分による結果と比較して示したものが図-6 である。

モード解析を行った後、各モードに対して Duhamel 積分の数値解を適用して得られる解析結果と比較するために、減衰マトリックスは対角行列 $\beta^*(\beta^*=2h\omega)$ (ω : 振動数マトリックス、 h : 減衰定数マトリックス (減衰定数はここでは 5% とした。)) から逆算して作成した。したがって、モード解析を行い、Duhamel 積分による解は正解と見なすことができる。ここで用いた入力加速度記録は波形のピーク値を探るようにデジタル化されたものであり、時間刻み幅は一定ではない。平均時間刻み幅は約 0.06 秒であるが、中には 0.2 秒を越す時間刻み幅も含まれている。図-6 の解析には、この記録の時間刻み幅をそのまま用いているが、このような時間刻み幅を用いた場合でも、図-6 (a) と (b) を比較して明らかのように、ここに提案した時間積分のスキームによる解析結果が非常に良いことがわかる。なお、対象構造の 1 次の固有周期は 1.42 秒であり、5 次の固有周期は 0.211 秒である。

10. おわりに

以上に、2 階の連立常微分方程式を 4 階の微分方程式に変換し、初期値問題としての積分計算を境界値問題として解くことを基本として構成される、運動方程式の数値積分法を提案し、その詳細を説明した。有限要素法の概念が発表されて以来、工学問題の数値解析法は格段の進歩を遂げ、いまなお急速に進歩しつつある。

有限要素法を変分原理に基づいた数値解法としてとらえるとき、現象を支配する方程式および境界条件と等価な変分汎関数が存在し、変分原理が構成されるかどうか、有限要素法が適用できるかどうかの鍵となる。対象系が自己随伴の場合には、線型境界値問題に対して変分原理を構成し得ることはよく知られている。非自己随伴の場合には、必ずしも変分原理を構成し得るとは限らな



(c)

(b)

(a)

図-5 提案する漸化式の精度

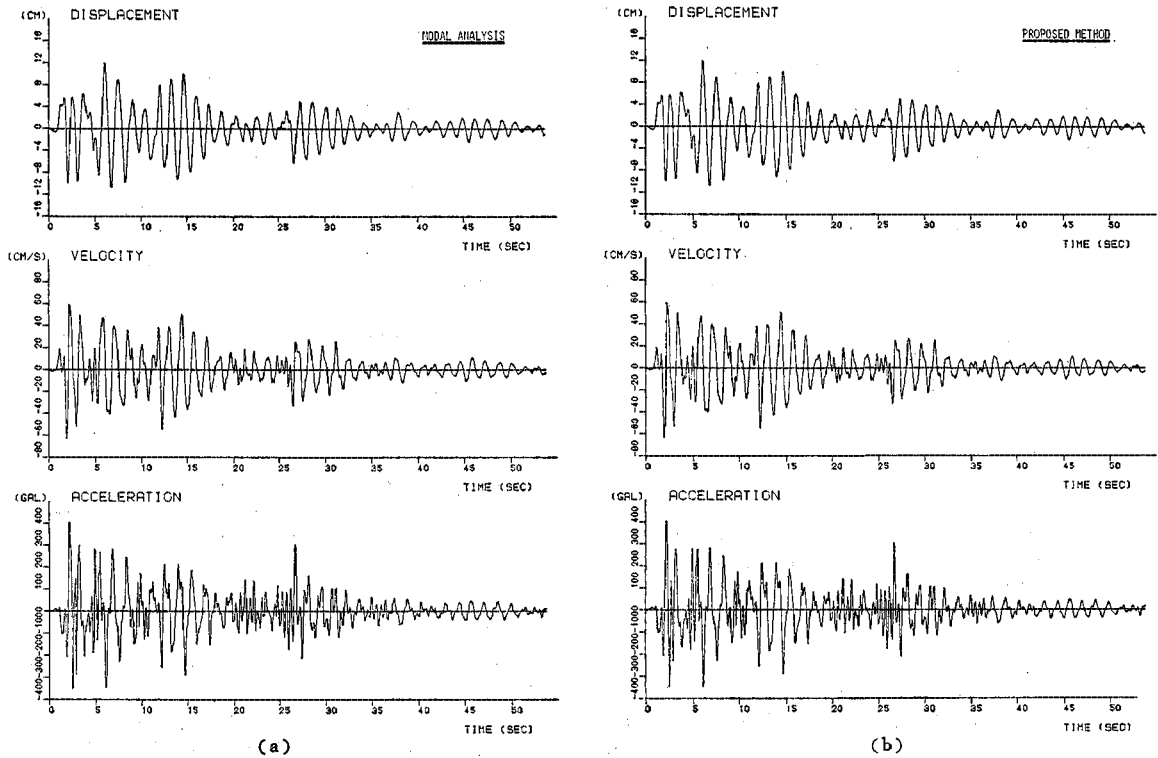
EL CENTRO NS 1940
RESPONSE OF TOP POINT

図-6 多自由度系の強制振動 (最上部の質点の応答)

い、少なくとも与えられた方程式の形のままで変分原理が存在しない。したがって、与えられた方程式を変形して自己随伴の形に変換したり、対象とする方程式とその随伴方程式をいっしょにした系に変分原理を適用したりする変分原理の探究が行われてきた²³⁾。

変分原理を見出すための1つの方法として、平均2乗残差を最小にする最小2乗変分原理の考え方が²³⁾、²⁴⁾。最小2乗変分原理の立場から、与えられた系($Tx = \bar{f}$)に対応する自己随伴で高階の系($T^*Tx = T^*\bar{f}$)を作ることができる。本論文で行った変換は、与えられた問題($Tx = \bar{f}$)に対して、まったく新たな変数 φ を導入し、 $x = T^*\varphi$ と定義することによって得られる高階の系($TT^*\varphi = \bar{f}$)を対象とし、求めるべき解 x を自然条件として求めようとするものであり、最小2乗変分原理とは立場を異にしている。

ここで提案した変分汎関数に基づいて、有限要素技法を適用して得られた運動方程式の数値積分のスキームは、これまでに与えられてきた差分スキームなどに比べると格段に複雑であり、計算の手数はかなり多くなる。しかし、図-5に示したように、 $\omega \cdot \Delta t = 1.0$ 程度のかなり大きな時間間隔に対しても、位相のずれおよび振幅の誤差の両者に対して非常に精度のよい結果が得られる。

要素マトリックスを作成するための計算の複雑さも、積分時間間隔が一定ならば、1度だけ作成すればよいことになるから、計算精度に対する利点を考慮すれば、計算量の多さに対する本アルゴリズムの欠点も十分補い得ると考えている。

非自己随伴の方程式で与えられる系の解法として、また、時間依存の多くの問題の解法として、本論文に提案した解析過程が役立てば幸いである。

最後に、本研究をまとめるにあたり、東京大学工学部の鷲津久一郎教授、山本善之教授に有意義なご討議とご示唆をいただいたことを記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Clough, R.W.: Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, University of Alabama Press, pp. 441-486, 1971.
- 2) Clough, R.W. and Bathé, K.J.: Finite Element Analysis of Dynamic Response, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, University of Alabama Press, pp. 153-179, 1972.
- 3) Argyris, J.H. and Chan, A.S.L.: Application of Finite Elements in Space and Time, Ingenieur Archiv, 41, pp. 235-257, 1972.
- 4) Fried, I.: Finite-Element Analysis of Time-Depend-

- ent Phenomena, AIAA Jour., 7, pp. 1169-1173, 1969.
- 5) Newmark, N.M. : A Method of Computation for Structural Dynamics, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 85, EM 3, pp. 67-94, 1959.
 - 6) Chan, S.P., Cox, H.L. and Benfield, W.A. : Transient Analysis of Forced Vibrations of Complex Structural Mechanical Systems, Jour. Roy. Soc., 1962.
 - 7) Wilson, E.L. : A Method of Analysis for the Evaluation of Foundation-Structure Interaction, Proc. 4th World Conf. on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, Jan. 1969.
 - 8) Wilson, E.L., Farhoomand, I. and Bathe, K.J. : Non-linear Dynamic Analysis of Complex Structures, Int. Jour. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1, pp. 241-252, 1973.
 - 9) Goudreau, G.L. and Taylor, R.L. : Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2, pp. 65-68, 1972.
 - 10) Bathe, K.J. and Wilson, E.L. : Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods, Int. Jour. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1, pp. 283-291, 1973.
 - 11) 武藤 清・高瀬啓元・上野弘道・小林俊夫：動力学における数値解析の研究（その1~3），日本建築学会大会学術講演梗概集，その1，2（1972），その3（1973）。
 - 12) Pian, T.H.H. : Recent Developments in U.S.A. in Finite Element Methods in Engineering, Lecture Note at JSSC Short Course on Finite Element Methods, Tokyo, Nov. 1974.
 - 13) Geradin, M. : A Classification and Discussion of Integration Operators for Transient Structural Response, AIAA paper presented at AIAA 12th Aerospace Science Meeting, Washington D.C., 1974.
 - 14) Argyris, J.H., Dunne, P.C. and Angelopoulos, T. : Non-Linear Oscillations using the Finite Element Technique, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2, pp. 203-250, 1973.
 - 15) Argyris, J.H., Dunne, P.C. and Angelopoulos, T. : Dynamic Response by Large Step Integration, Int. Jour. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2, pp. 185-203, 1973.
 - 16) Nickell, R.E. : On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics, Int. Jour. Solids and Structures, 7, pp. 301-319, 1971.
 - 17) Dunham, R.S., Nickell, R.E. and Stickler, D.C. : Integration Operators for Transient Structural Response, Computers and Structures, 2, pp. 1-15, 1971.
 - 18) Kikuchi, F. and Ando, Y. : A Finite Element Method for Initial Value Problems, Proc. 3rd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., AFFDL-TR-71-160, pp. 170-213, 1971.
 - 19) Fujii, H. : Finite Element Schemes; Stability and Convergence, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, University of Alabama Press, pp. 201-218, 1972.
 - 20) Krieg, R.D. and Key, S.W. : Transient Shell Response by Numerical Time Integration, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, University of Alabama Press, pp. 237-258, 1972.
 - 21) 清水信行・渡辺嘉二郎ほか3名：大次元常微分方程式の直接数値積分法—積分法の評価と新しい数値積分法の提案—，機械学会講演論文集，1975。
 - 22) 塩尻弘雄・中村秀治：構造解析における動的応答解析の一方法について，土木学会論文報告集，第246号，pp. 21-33，1976年2月。
 - 23) フィンレイソン, B.A. 著，鷲津久一郎・山本善之・川井忠彦訳：重みつき残差法と変分原理，培風館，1974。
 - 24) 坂井藤一：無限領域への波動伝播について，京都大学数理解析研究所・有限要素法の数学的基礎理論・講究録，pp. 86-102，1974。
 - 25) 吉田 裕・岡山和生：地震加速度記録の積分における濾波計算のアルゴリズム，土木学会論文報告集，第221号，pp. 25-38，1974年1月。
 - 26) 吉田 裕・岡山和生：マトリックス法によるデジタル・フィルターのアルゴリズムと地震加速度波形の積分計算への応用，日本鋼構造協会第9回大会研究会マトリックス構造解析法研究発表論文集，pp. 101-106，1975。
 - 27) 吉田 裕・村田 修：構造物の動的応答解析における時間積分のアルゴリズム，日本鋼構造協会第9回大会研究会マトリックス構造解析法研究発表論文集，pp. 107-112，1975。