

立体骨組構造物の有限変位解析*

FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF SPACE
FRAMED STRUCTURES前田 幸雄**・林 正***
By Yukio MAEDA and Masa HAYASHI

1. 緒 言

マトリックス法による構造物の幾何学的非線形解析については、数多くのすぐれた研究成果が報告されている。骨組構造物の立体解析についても多くの論文が発表されているが、3次元空間における有限変位の考え方が不十分であるために、厳密な立体有限変位解析は行われていない^{1)~5)}。すなわち、3次元空間における有限な回転はベクトル則には従わないにもかかわらず、回転がベクトル的に取り扱われている。したがって、座標変換が正しく行われていないので、適合条件と平衡条件とが厳密には満足されていない。

薄肉断面部材については、精度の高い弾性方程式が報告されている^{6),7)}。しかし、これらの式を、多数の部材から構成される立体構造物に適用するためには、適合条件と平衡条件を弾性方程式と同程度以上の精度で求めておかなければならない。また、これらの論文において示された変位関数には有限な回転による連成項が含まれておらず、回転に関しては線形化有限変位理論といえるものである。

立体骨組構造物の幾何学的非線形問題を扱った研究のなかで、Tezcan & Mahapatra²⁾、Chu & Rampetsreiter³⁾、結城・前田⁴⁾などは、コード・アングル (chord angle) を修正することにより変形後の部材座標系を定めて、材端変位と材端力を求めている。このとき、変形後の部材の両端でそれぞれ異なった変換行列を用いてたわみ角を求めており、材端力の算出に矛盾がある^{2),3)}。文献 4) の研究ではこの点が改良されているが、曲げ変形により部材の両端の断面主軸が平行にならないことが

考慮されていない。さらに、上記のいずれの研究においても、節点回転角を有限な回転として扱っていない欠点がある。

上記の研究に対し、Oran の研究⁵⁾は注目すべきものであって、全体座標系に関する節点の回転量から変形後の部材の両端における方向余弦を求め、これからたわみ角を求めている。このとき、回転運動が大きいたまには回転量はベクトルとしては表現できないことに着目し、回転行列^{注1)}を用いて変形後の部材端の方向余弦を導いている。しかしながら、具体的に与えられた回転行列は微小回転に対する式であって、有限な回転に対する式ではない。さらに、たわみ角とねじれ角を求めるときに近似式が用いられていることと、変形後の部材の座標変換行列^{注2)}が両端における方向余弦の平均値として与えられていることなどによる誤差が、大変位問題では無視できないものと思われる。

本論文では、有限な回転に対する回転行列を用いて厳密な回転の合成手順を説明し、これを用いて精度の高い座標変換行列と部材端変位の表示式を示す。この計算式を用いれば、非線形方程式を解くための Newton-Raphson 法の収束性が良くなることを、数値計算例により示す。

応力と変位の関係を表わす非線形の剛性行列は、前述の文献^{1)~3),5)}に与えられているが、座屈後の大変位問題に適用するには十分な精度を有していないと思われる。文献⁴⁾では、薄肉断面の棒部材に対する剛性行列の誘導過程が詳細に説明されているが、具体的な式は示されていない。そこで、本文ではエネルギー原理に基づいて、曲げねじりの影響を無視した場合の剛性行列を求めた。

エネルギー原理に基づいた有限要素法を用いる場合、変位場の仮定が極めて重要であることは、しばしば指摘

* 日本鋼構造協会第9回マトリックス構造解析法研究発表会 (昭和50年6月) にて一部発表済

** 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 大阪大学講師 工学部土木工学科

注 1) 原論文⁵⁾では、joint orientation matrix とよばれている。

注 2) 同じく、member orientation matrix とよばれている。

されている^{7)~9)}。有限な回転場における変位には、回転の3成分の連成項が含まれるが、このような変位場は過去の研究では用いられていない。この理由は、棒理論における断面不変の仮定から導かれた変位とひずみの関係式において、部材軸方向の変位の微係数の2次項を省略したことによるものであり、軸方向の変位を含まない微分方程式の解として求められた変位には、上述の連成項は現われない。これは、明らかに厳密な有限変位とはいえないものである。本文の終りにおいて、棒理論における断面不変の仮定とベルヌーイの仮定のもとに、過去の論文で報告された変位より精度の高い有限変位を示した。また、従来の研究において省略されている軸方向変位の微係数の2次項は、すべてを省略することができないことを数値計算例により指摘する。

2. 有限回転

(1) 3次元空間における有限変位

剛体の空間運動に関する基本的な性質により、有限な変位は平行移動と回転に分けることができる。このうち、平行移動は一つのベクトルとして表わすことができるので、その取り扱いについては問題はない。しかし、有限な回転は微小回転のようにベクトル的な合成はできない。すなわち、2つの回転を合成する際、合成の順序を変えると結果が異なるために可換則が成立しない。そこで、本文では回転変位を合成するために回転行列¹⁰⁾を用いることにする。

節点の回転を求めるために、節点に固定され節点とともに回転する直交座標系を考える。この座標系の変形前の基本ベクトルを i, j, k とし、回転後のそれらを i^*, j^*, k^* とすれば、これらの間には回転行列 R を用いて次の関係式が成立つ。

$$i^* = Ri, j^* = Rj, k^* = Rk \dots\dots\dots(1)$$

ここに、

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

であって、第1列目の要素 $r_{i1} (i=1, 2, 3)$ は直交座標系 i, j, k に対する i^* の、第2, 3列目の要素はそれぞれ j^*, k^* の方向余弦を表わす。したがって、回転前に p_0 なるベクトルが回転 R_1 により p_1 になったとすれば

$$p_1 = R_1 p_0 \dots\dots\dots(3)$$

と表わすことができる。引続いて n 回の回転 R_2, R_3, \dots, R_n を行った後のベクトル p_n は、次のようになる。

$$p_n = R_n p_{n-1} = (R_n R_{n-1} \dots R_2 R_1) p_0 \dots\dots\dots(4)$$

微小回転の場合には、回転ベクトルの各成分を $(\Delta\theta_x,$

$\Delta\theta_y, \Delta\theta_z)$ とすれば、式(2)の回転行列は定義よりただちに次式で与えられる。

$$\Delta R = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z & 1 & -\Delta\theta_x \\ -\Delta\theta_y & \Delta\theta_x & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5)$$

式(4)を用いて微小回転の合成を行うとき、2次の微小項を省略すれば合成結果は回転の順序によらないことがわかる。すなわち、

$$\Delta R_2 \Delta R_1 \approx \Delta R_1 \Delta R_2 \dots\dots\dots(6)$$

ところが、式(5)で与えられる回転行列は正規直交行列ではなく、また式(6)によって回転を合成していくと合成結果には誤差が累積されていく。そこで、有限な回転に対する回転行列を以下のようにして求める。

(2) 回転行列

剛体の回転に関するオイラーの定理¹⁰⁾により、節点はある空間ベクトル ϕ を中心として有限な角 α だけ回転する。いま、このベクトルの全体座標系に対する方向余弦を (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) とし、その大きさ $|\phi|$ が α に等しくなるように成分 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ を定めると注、次の関係式が成り立つ。

$$(\phi_x, \phi_y, \phi_z) = (\theta_x/\alpha, \theta_y/\alpha, \theta_z/\alpha) \dots\dots\dots(7)$$

$$\alpha^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 \dots\dots\dots(8)$$

図-1に示すように、ベクトル ϕ の方向に単位ベクトル e_3 をとり、2つの単位ベクトル e_1, e_2 を e_3 と直交右手系をなすように定める。

節点に固定された任意のベクトル r を

$$r = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 \dots\dots\dots(9)$$

と表わせば、 ϕ を回転軸とし、角 α だけ回転した後のベクトル r^* は

$$r^* = (r_1 \cos \alpha - r_2 \sin \alpha) e_1 + (r_1 \sin \alpha + r_2 \cos \alpha) e_2 + r_3 e_3 \dots\dots\dots(10)$$

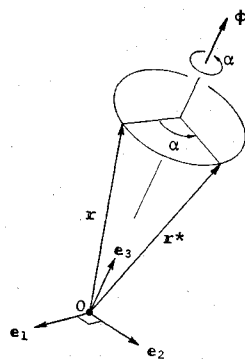


Fig. 1 Rotation of vector

注) 回転は大きさと方向をもつ量であるが、ベクトルとして表現できない。したがって、方向を表わす ϕ の大きさが回転の大きさ α ではないので、 ϕ の大きさは任意でよい。ただし、微小回転は1つのベクトルとして表現できる。

となる。上式を変形して

$$r^* = r \cos \alpha + r_3(1 - \cos \alpha)e_3 + (r_1e_2 - r_2e_1)\sin \alpha \dots (11)$$

さらに、ベクトルとディアド (dyad) のスカラー積注1)を用いて変形する。このとき、基本ベクトルの性質を考慮すれば次式のようになる。

$$r^* = [E \cos \alpha + (1 - \cos \alpha)e_3e_3 + (e_2e_1 - e_1e_2)\sin \alpha] \cdot r \dots (12)$$

ここに、 E は単位行列、 e_3e_3 、 e_2e_1 、 e_1e_2 はディアドを表わす。

E は単位ベクトルのディアディック (dyadic) を用いて表わすことができるから注2)、 e_3 とのベクトル積注1)をとると

$$e_3 \times E = (e_3 \times e_1)e_1 + (e_3 \times e_2)e_2 + (e_3 \times e_3)e_3 = e_2e_1 - e_1e_2 \dots (13)$$

の関係式を導くことができる。

式 (13) を式 (12) に代入すると

$$r^* = [E \cos \alpha + (1 - \cos \alpha)e_3e_3 + e_3 \times E \sin \alpha] \cdot r \dots (14)$$

となる。したがって、有限な回転に対する回転行列、式 (2) は次式で与えられる。

$$R = E \cos \alpha + (1 - \cos \alpha)e_3e_3 + e_3 \times E \sin \alpha \dots (15)$$

この行列 R は正規直交行列であり、次の関係式を満たしている。

$$RR^T = R^T R = E \dots (16)$$

ここに、 R^T は転置行列を表わす。また、回転の向きが逆の回転行列、すなわち式 (15) において α の符号を反対にしたものは、もとの行列の逆行列になる。

角 α が微小な場合には、微小回転ベクトル

$$\Delta \phi = (\Delta \phi_x, \Delta \phi_y, \Delta \phi_z) \dots (17)$$

を用いると、式 (15) の R は

$$\Delta R \approx E + e_3 \times E \Delta \alpha = E + \Delta \phi \times E \dots (18)$$

となり、式 (5) に一致することがわかる。この式 (18) を式 (4) に代入して微小回転の合成を行うときに、2次以上の微小項を省略すればベクトルの合成則が成り立ち、行列は可換となることがわかる。

$$\Delta R_n \dots \Delta R_2 \Delta R_1 \approx E + (\Delta \phi_1 + \Delta \phi_2 + \dots + \Delta \phi_n) \times E \dots (19)$$

$$\approx \Delta R_1 \Delta R_2 \dots \Delta R_n \dots (20)$$

さて、式 (15) の各要素を求めるために、右辺の第3項を展開する注3)。

$$e_3 \times E = \phi_x(kj - jk) + \phi_y(ik - ki) + \phi_z(ji - ij) = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} \dots (21)$$

ゆえに、式 (15) の回転行列、すなわち式 (2) の各要

注 1) a をベクトル、 bc をディアドとすると、

$$a \cdot (bc) = (a \cdot b)c$$

$$a \times (bc) = (a \times b)c$$

注 2) $E = e_1e_1 + e_2e_2 + e_3e_3$

注 3) 全体座標系で表わせば

$$e_3 = \phi_x i + \phi_y j + \phi_z k$$

$$E = ii + jj + kk$$

素は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= \phi_x^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \\ r_{21} &= \phi_y \phi_x(1 - \cos \alpha) + \phi_z \sin \alpha \\ r_{31} &= \phi_z \phi_x(1 - \cos \alpha) - \phi_y \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= \phi_x \phi_y(1 - \cos \alpha) - \phi_z \sin \alpha \\ r_{22} &= \phi_y^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \\ r_{32} &= \phi_z \phi_y(1 - \cos \alpha) + \phi_x \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{13} &= \phi_x \phi_z(1 - \cos \alpha) + \phi_y \sin \alpha \\ r_{23} &= \phi_y \phi_z(1 - \cos \alpha) - \phi_x \sin \alpha \\ r_{33} &= \phi_z^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

3. 部材座標系と材端変位

立体骨組部材は曲げとねじりの作用を受けて変形し、さらに剛体的な回転を伴うために変形後の部材座標軸が簡単には求められない。本節では、部材両端の節点の変形後の座標値と回転とから部材座標軸を定め、この座標系で表わした部材端変位を求める。

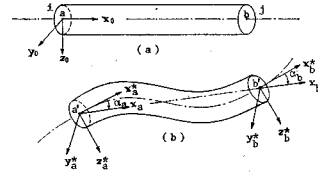


Fig. 2 Member coordinates

(1) 部材座標系

節点 i に a 端、節点 j に b 端を持つ直線部材において、断面の重心点 a 、 b を結ぶ直線を変形前後の部材座標の x 軸とし、この x 軸と直交右手系をなすように y 、 z 軸を定める。変形前において y 、 z 軸を断面の主軸方向に定め注)、この部材座標系を全体座標系に変換する行列を T_0 で表わす。いま、部材の両端 a 、 b に固定され、変形前の部材軸の方向と一致する2組の正規直交系を考える。節点の回転により、この2組の直交系は変形後それぞれ (x_a^*, y_a^*, z_a^*) 、 (x_b^*, y_b^*, z_b^*) になったものとする。これらの座標軸の方向余弦でつくった行列をそれぞれ T_a^* 、 T_b^* とすると、節点 i 、 j の回転行列 R_i 、 R_j を用いて次のように表わせる。

$$T_a^* = R_i T_0, T_b^* = R_j T_0 \dots (25)$$

まず a 端において、変形後の x 軸上に単位ベクトル x_a を考え、 x_a^* となす角を α_a とする。そして、 x_a^* と x_a とに直交する軸を回転軸として、直交系 (x_a^*, y_a^*, z_a^*) を角 α_a だけ回転させて x_a^* を x_a に一致させる。このとき、 y_a^* および z_a^* はそれぞれ y_a および z_a になったものとする。この回転軸の方向に単位ベクトル ϕ_a を考えると、

$$x_a^* \times x_a = \phi_a \sin \alpha_a \dots (26)$$

注) このとき、コード・アングルを用いると便利である¹³⁾。

となるから、この回転を表わす行列 R_a を x_a^* と x_a とのスカラー積とベクトル積を用いて表わすことができる。すなわち、式 (15) より

$$R_a = (x_a^* \cdot x_a)E + \frac{(x_a^* \times x_a)(x_a^* \times x_a)}{1 + (x_a^* \cdot x_a)} + (x_a^* \times x_a) \times E \dots\dots\dots(27)$$

となる。したがって、 (x_a, y_a, z_a) の方向余弦でつくった行列 T_a は、式 (25) より次のように表わせる。

$$T_a = R_a T_a^* = \Phi_a T_0 \quad (\Phi_a = R_a R_0) \dots\dots\dots(28)$$

b 端においても同様に、 (x_b, y_b, z_b) なる直交系を考えると、

$$T_b = \Phi_b T_0 \quad (\Phi_b = R_b R_0) \dots\dots\dots(29)$$

a および b 端において、ベクトル y_a と z_a および y_b と z_b とが作る平面は互いに平行であるから、角 $\widehat{y_a y_b} = \widehat{z_a z_b} = \phi$ とおくと、この角 ϕ が部材の相対ねじり角である。 ϕ の値は次の関係式から求められる。

$$\left. \begin{aligned} y_a \cdot y_b = z_a \cdot z_b = \cos \phi \\ -y_a \cdot z_b = z_a \cdot y_b = \sin \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

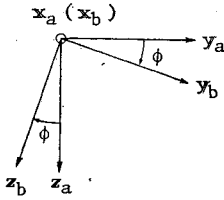


Fig. 3 Angle of torsion

変形後の y, z 軸を定めるために、 a, b 両端のねじり角 θ_a^*, θ_b^* を絶対値が等しく符号が反対になるように選ぶ。

$$-\theta_a^* = \theta_b^* = \phi/2 \equiv \theta \dots\dots\dots(31)$$

このように定めると、変形後の部材座標は一義的に決定される。変形後の座標変換行列 T は T_0 より変換して

$$T = \Phi_a T_0 R_\theta \dots\dots\dots(32)$$

$$= \Phi_b T_0 R_\theta^T \dots\dots\dots(32)'$$

ここに、

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

(2) 部材端変位

変形後の部材座標系で表わされた材端変位 d^*

$$d^* = \{u_a^*, v_a^*, w_a^*, \theta_a^*, (w_a^*)', (v_a^*)', u_b^*, v_b^*, w_b^*, \theta_b^*, (w_b^*)', (v_b^*)'\}^T \dots\dots(34)$$

の各成分は次のようになる。ここに、プライムは x に関する微分を表わす。

変位置については

$$\left. \begin{aligned} u_b^* - u_a^* &= \Delta l \\ v_a^* = w_a^* &= v_b^* = w_b^* = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

ここに、 Δl は部材の伸びである。

回転量については、定義

$$(w_a^*)' = -\frac{\partial w^*}{\partial x} \Big|_a, (v_a^*)' = \frac{\partial v^*}{\partial x} \Big|_a, \text{etc.} \dots\dots\dots(36)$$

より、 a, b 両端における重心軸の接線ベクトル x_a^*, x_b^* の変形後の座標系に対する方向余弦

$$\left. \begin{aligned} (l_a, m_a, n_a)^T &= T^T x_a^* \\ (l_b, m_b, n_b)^T &= T^T x_b^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

を用いて、次式のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} (w_a^*)' &= -n_a/l_a \\ (v_a^*)' &= m_a/l_a \\ (w_b^*)' &= -n_b/l_b \\ (v_b^*)' &= m_b/l_b \\ -\theta_a^* &= \theta_b^* = \phi/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

4. 剛性行列

本文で用いた剛性行列の誘導過程を簡単に説明する^{4), 12)}。

(1) 誘導仮定

空間骨組部材の幾何学的剛性行列を求めるときに、次の仮定を設けた。

- 1) 部材は等断面直線材で、断面は2軸対称である。
- 2) 断面形状は不変である。
- 3) 部材のひずみは小さくて、ひずみと応力の関係は線形である。
- 4) 曲げによるせん断変形と曲げねじりの影響は無視する。

部材座標は、 x 軸を重心軸に、 y, z 軸を断面の主軸方向に一致させ、これらは直交右手系をなすものとする。これらの部材軸方向の変位成分を u, v, w とし、点 (x, y, z) におけるひずみ成分には次式に示すものを用いた。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \epsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39.1 \sim 4)$$

重心軸上の x, y, z 方向の変位成分を u_0, v_0, w_0 とし、 x 軸まわりの回転を ϕ_0 、それを ω とすると、断面上の点 (x, y, z) の変位は断面の回転を微小とすれば、

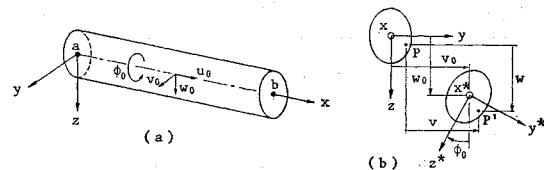


Fig. 4 Displacements of member

次のように表わせる注).

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \frac{dv_0}{dx} - z \frac{dw_0}{dx} - \omega \frac{d\phi_0}{dx} \\ v &= v_0 - z\phi_0 \\ w &= w_0 + y\phi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

(2) エネルギー原理に基づく定式化

変形前の座標系で表わした部材両端 a, b の変位を

$$\mathbf{d} = (u_a, v_a, w_a, \theta_a, w_a', v_a', u_b, v_b, w_b, \theta_b, w_b', v_b')^T \dots\dots\dots(41)$$

とし、重心点の変位を

$$\mathbf{d}_0 = (u_0, v_0, w_0, \phi_0)^T \dots\dots\dots(42)$$

とおく。

パラメーター α

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12})^T \dots\dots\dots(43)$$

を用いて、 \mathbf{d}_0 を x に関するべき級数で仮定する。

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{M}\alpha \dots\dots\dots(44)$$

ここに、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \dots\dots\dots(45)$$

α は部材の両端での境界条件より、材端変位 \mathbf{d} を用いて表わすことができる。この α を式 (44) に代入すれば

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{H}\mathbf{d} \dots\dots\dots(46)$$

となる。一例として、両端剛節点の場合には

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ 0 & 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & -l(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l(\xi^2-\xi^3) \\ 0 & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & l(\xi^2-\xi^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(47)$$

ここに、 l は部材長であり、 $\xi = x/l$ である。

部材のひずみエネルギーは

$$U = \frac{E}{2} \int_V \epsilon_x^2 dV + \frac{G}{2} \int_V (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{zx}^2) dV \dots\dots\dots(48)$$

また、ひずみは式 (39), (40) より

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_0' - v_0''y - w_0''z + \frac{1}{2}(v_0')^2 + \frac{1}{2}(w_0')^2 \\ &\quad - \phi_0'(v_0'z - w_0'y) + \frac{1}{2}(\phi_0')^2(y^2 + z^2) \dots\dots\dots(49) \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = -\phi_0'z - \phi_0' \frac{\partial \omega}{\partial y} \dots\dots\dots(50)$$

$$\gamma_{zx} = \phi_0'y - \phi_0' \frac{\partial \omega}{\partial z} \dots\dots\dots(51)$$

となるから、これらを式 (48) に代入すれば

$$\begin{aligned} U &= \frac{EA}{2} \int_0^l [(u_0')^2 + u_0' \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \} \\ &\quad + \frac{1}{4} \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \}^2] dx \\ &\quad + \frac{EI_z}{2} \int_0^l [(v_0'')^2 + u_0'(\phi_0')^2 - 2v_0''w_0'\phi_0' \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ (v_0')^2 + 3(w_0')^2 \} (\phi_0')^2] dx \\ &\quad + \frac{EI_y}{2} \int_0^l [(w_0'')^2 + u_0'(\phi_0')^2 + 2v_0''w_0'\phi_0' \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ 3(v_0')^2 + (w_0')^2 \} (\phi_0')^2] dx \\ &\quad + \frac{GJ}{2} \int_0^l (\phi_0')^2 dx + \frac{EI_T}{8} \int_0^l (\phi_0')^4 dx \dots\dots\dots(52) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_A dA, I_y = \int_A x^2 dA, I_z = \int_A y^2 dA \\ J &= \int_A \left\{ \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right\} dA \\ I_T &= \int_A (y^2 + z^2)^2 dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(53)$$

式 (52) の下線をほどこした項は、高次の微少項として省略できる。

部材端力 \mathbf{f} と材端変位 \mathbf{d} との関係式は、式 (52) に式 (46) を代入し、エネルギー原理から剛性行列 \mathbf{k} を用いて次式のような形に導くことができる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = \{ \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1(\mathbf{d}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{d}) \} \mathbf{d} \dots\dots\dots(54)$$

上式において、 \mathbf{k}_0 は線形項であり、 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ はそれぞれ変位 \mathbf{d} の 1 次および 2 次の項を含む非線形項である。また、増分量に関する式は、次のようになる。

$$\Delta \mathbf{f} = \Delta \mathbf{k}(\mathbf{d}) \cdot \Delta \mathbf{d} = \{ \mathbf{k}_0 + 2\mathbf{k}_1(\mathbf{d}) + 3\mathbf{k}_2(\mathbf{d}) \} \Delta \mathbf{d} \dots\dots\dots(55)$$

剛性行列 \mathbf{k} を、両端剛節点の場合について付録 1 に示した。[] でくくった項は、式 (52) の下線をほどこした項に対応する。なお、数値計算においては、式 (54), (55) の剛性行列に含まれる材端変位 \mathbf{d} には、変形後の座標系で表わされた式 (34) の変位 \mathbf{d}^* を用いなければならない。

5. 数値計算例

(1) 解法

本文で示した式 (15), (32), (34) と前述の文献^{2)~5)} に示された式を比較するために数値計算を行った。剛性行列は文献 4) では具体的に示されておらず、その他の文献^{2), 3), 5)} に示された式は大変位問題には適用しがたいと思われるので、本文で導いた式を用いた。このとき、式 (52) の最後の積分項は省略した。座標変換と材端変位に関する式の違いを調べるために、次の 3 つの解法を用いた。

注) 仮定より部材のひずみは小さいとしているので、回転による項は線形項のみを用いた。回転による高次の項を考慮した式は、後の考察で説明する。

解法1は本文で示した式を用いたものであり、解法2はOránが示した文献5)の式(2)~(11)を用いたものである。

解法3は、文献2)~4)に示された式および考え方を用いて、次のように一部修正した解法である。すなわち、変形後の部材の両端 a, b を通るように x 軸をとり、部材の回転角からコード・アングルを修正して変形後の座標系を求めることはこれらの文献の解法と同じであるが、回転角は文献4)の考え方により、部材両端のねじり角が $\theta_a^* = -\theta_b^*$ となるように決めた^{注)}。材端変位から剛体変位および回転を除くには、文献2)の式を用いた。回転行列、座標変換行列および材端変位以外の計算式と計算手法は、すべての解法において同じである。

非線形方程式の解法には、Newton-Raphson 法と荷重増分法を併用した。このとき、解の収束性を良くするために推定増分法¹³⁾を用いた。推定増分法とは、荷重を1~2回増分した後、新たな荷重増分に対する変位増分の第1近似値を前段階までの計算結果から外挿的に推定する方法である。本文では、推定値の計算には2次の曲線式を用いた。

(2) 計算例

数値計算例として、図-5に示すような放物線固定アーチの面外座屈後の大変位問題を扱う。面内荷重として全載等分布荷重 p をアーチの面外弾性座屈荷重の2倍まで載荷した。このとき、面外変形が生じるように、初期荷重として等分布水平荷重 q をアーチの全長にわたって作用させた。計算に用いた数値は次のとおりである。

$$EA=0.4 \times 10^7, EI_y=0.1 \times 10^7, EI_z=0.1 \times 10^6$$

$$GJ=0.1 \times 10^6, p=\gamma p_{cr}, \gamma=0.0 \sim 2.0, p_{cr}=3.880$$

$$q/p_{cr}=1/10\,000, 1/100, 1/10$$

ここに、 EI_y は面内、 EI_z は面外曲げ剛性である。 p_{cr} は面外弾性座屈荷重であり、固有値問題に対する解として求めた。計算においては、アーチリブを20分割した。

計算結果の一部を、図-6~10に示した。初期荷重が $q = p_{cr}/10\,000$ の場合には、計算値は分岐座屈の性状をよく表わしている(図-6~9)。

解法の比較については、両内荷重が座屈荷重より小さ

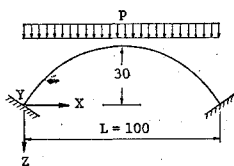


Fig. 5 Numerical example

注) 文献2),3)では、部材の両端において2つの異なる座標変換行列を用いているが、上記の假定により、この2つの行列は同一のものになる。

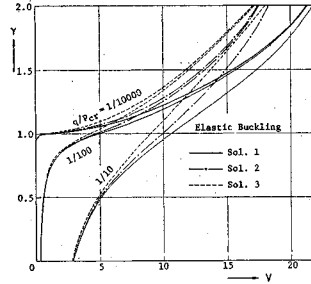


Fig. 6 Displacement at crown of arch in Y-direction

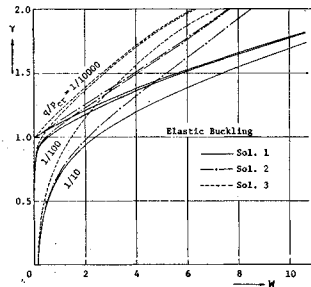


Fig. 7 Displacement at crown of arch in Z-direction

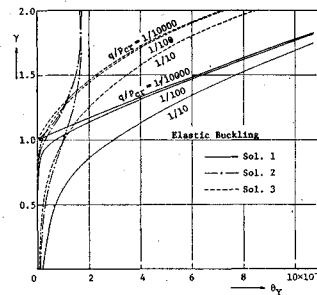


Fig. 8 Joint rotation angle at L/4 of arch about Y-axis

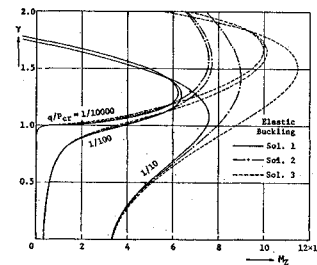


Fig. 9 Fixed-end moment about Z-axis

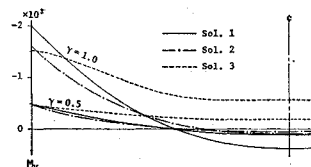


Fig. 10 Bending moment at arch rib about y-axis ($q/p_{cr}=1/10$)

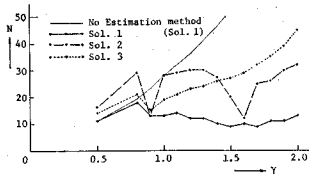


Fig. 11 Iterative numbers of Newton-Raphson method ($q/p_{cr}=1/10$)

い場合 ($r < 1.0$) にはその差はわずかであるが、 $r > 1.0$ の場合には変位、曲げモーメントともに著しい差が認められる。また、面外方向の初期荷重が大きくなると、座屈荷重以下のときにも解法による差が現われる (図-8, 10)。したがって、回転角が大きくなる場合には、従来からの解法²⁾⁻⁵⁾では精度上問題があることがわかる。

解の収束性を比較するために、Newton-Raphson 法の反復回数を調べた。収束性を反復回数の総数で表わすと、解法 1 に比べて解法 2 では約 2~3 倍、解法 3 では 2~4 倍になった。したがって、解法 1 は他の解法に比べて計算時間が 1/4~1/2 であり、極めて収束性が良いといえる。 $q/p_{cr}=1/10$ のとき、推定増分法を用いた場合の反復回数 N を図-11 に示した。また、解法 1 において推定法を用いない場合の反復回数も併せて示した。

6. 考 察

(1) 回転行列と回転の合成

前述のように、有限な回転の合成はベクトル則には従わないので、回転の合成には回転行列を用いなければならないが、そのときの合成式について考察を行う。

回転行列、式 (2) の行列式は定義より 1 でなければならない。式 (15) の回転行列は厳密な式であるので、その行列式は 1 である。また、式 (4) を用いて合成された回転行列の積も正規直交行列となる。

一方、微小回転に対する式 (5) または式 (18) の行列式は

$$\det|\Delta R| = 1 + (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \dots\dots\dots(56)$$

となる。さらに、式 (19) を用いて合成した結果は

$$\det|\Sigma \Delta R| = 1 + (\Sigma \Delta\theta_x)^2 + (\Sigma \Delta\theta_y)^2 + (\Sigma \Delta\theta_z)^2 \dots\dots\dots(57)$$

となる。そこで、これらの計算式の精度を調べるために数値を代入して比較する。

回転角の 3 成分が等しい場合について、第 k 回目の回転角の成分を θ_k とし、これを 10 回続けて回転したときの合成結果を調べる。このとき、回転角の増分量 $\Delta\theta$ について次の 2 通りを考えた。

- a) 各回の回転角を一定とする場合

$$\theta_k = \theta_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, 10)$$

Table 1 Determinant and elements of composite rotation matrix

	Equations		$\Sigma \theta_k = 10.0^\circ$		$\Sigma \theta_k = 15.0^\circ$	
	R	Σ	$\Delta\theta = 0^\circ$	$\Delta\theta = 0.2^\circ$	$\Delta\theta = 0^\circ$	$\Delta\theta = 0.3^\circ$
Det.	(15)	(4)	1.0	1.0	1.0	1.0
	(18)	(4)	1.0092	1.0122	1.0208	1.0277
	(18)	(19)	1.0914	1.0914	1.2056	1.2056
r_{11}	(15)	(4)	0.9698	0.9698	0.9326	0.9326
	(18)	(4)	0.9727	0.9737	0.9389	0.9410
	(18)	(19)	1.0	1.0	1.0	1.0
r_{12}	(15)	(4)	-0.1568	-0.1568	-0.2192	-0.2192
	(18)	(4)	-0.1590	-0.1597	-0.2248	-0.2266
	(18)	(19)	-0.1745	-0.1745	-0.2618	-0.2618
r_{13}	(15)	(4)	0.1870	0.1870	0.2866	0.2866
	(18)	(4)	0.1863	0.1860	0.2859	0.2855
	(18)	(19)	0.1745	0.1745	0.2618	0.2618

- b) 各回の回転角を一定の増分量で増加させる場合

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \Delta\theta \quad (k=2, 3, \dots, 10)$$

回転角の 3 成分が等しい場合には、あとで説明するように合成された回転行列の要素には次の関係が成立つ。

$$r_{11} = r_{22} = r_{33}, \quad r_{12} = r_{33} = r_{31}, \quad r_{13} = r_{31} = r_{32} \dots\dots\dots(58)$$

表-1 に合成された回転行列の行列式と各要素の値を示した。表より、式 (18) と (19) を用いて回転をベクトル的に扱った場合の誤差は、行列式で約 9% と 20%、 r_{12} 要素で 11% と 19% になることがわかる。しかし、回転行列に微小回転に対する式 (18) を用いても、式 (4) により合成時において高次の微小項を省略しなければ、そのときの誤差は 1/5~1/10 に減少している。一方、式 (15) と (4) を用いた厳密な値の場合には、a) と b) の値が一致しているが、これは次の理由による。

回転角の 3 成分が等しい場合、回転角の合成量 α_k は式 (8) より

$$\alpha_k = \sqrt{3} \theta_k$$

となる。この α_k を用いれば、式 (4) による合成結果は次式のようになる。

$$\prod_{k=1}^n R_k = E \cos\left(\sum_k \alpha_k\right) + \left\{1 - \cos\left(\sum_k \alpha_k\right)\right\} e_3 e_3 + e_3 \times E \sin\left(\sum_k \alpha_k\right) \dots\dots\dots(59)$$

特に、各回の回転角が一定な a) 場合には、 $\alpha_k \equiv \alpha$ とおくと注)

$$\prod_{k=1}^n R_k = R^n = E \cos(n\alpha) + [1 - \cos(n\alpha)] e_3 e_3 + e_3 \times E \sin(n\alpha) \dots\dots\dots(60)$$

したがって、厳密な式を用いれば a) と b) の合成結果は同一な回転となる。また、式 (59) より式 (58) の関係式が成り立つことは容易にわかる。

アーチの計算例において節点の回転角の合成量を調べ

注) 式 (60) は回転角の 3 成分が異なる場合でも、各回の回転角が一定ならば成り立つ。

ると、 $q/p_{cr}=1/10$ の場合、 $r=1.0$ で約 10° 、 $r=2.0$ で約 30° であった。したがって、解法 2, 3 では回転の合成だけで 10~20% の誤差が生じていると思われる。

表-1 の計算結果は回転角の 3 成分が等しい特別な場合であり、一般的な場合には近似式を用いると計算誤差はさらに大きくなるが、各回の回転量が大きくなりないうように荷重増分量を小さくし、かつ式 (4) により回転の合成を行えば、微小回転に対する回転行列を用いても計算精度を上げることができる。

(2) 座標変換とたわみ角

数値計算に用いた各種の座標変換式を部材端のたわみ角表示式について考察する。

計算例として長さ 5 の片持ばりを考え、その変形前の部材座標は全体座標と一致しているものとする。そして、固定端 a 側に節点 i 、自由端 b 側に節点 j があるものとし、この節点 j を平行移動または回転させた場合に生じるねじり角とたわみ角および変形後の座標変換行列について調べる。式 (34) の材端変位のなかで、平行移動に関する成分はいずれの解法においても式 (35) が成立するので問題はない。

a) 平行移動のみの場合

断面の主軸 y, z 方向に節点 j をそれぞれ 1 だけ平行移動させる。このとき、いずれの解法においても次式が成立する。

$$\theta_a^* = \theta_b^* = 0, (w_a^*)' = -(v_a^*)' = (w_b^*)' = -(v_b^*)' = \tau \dots\dots\dots(61)$$

たわみ角 τ の値は、解法 1 では 0.2 であるのに対して、解法 2, 3 ではともに 0.19245 となる。この違いは、解法 2 では図-2 の α_a, α_b を無視して、 $\cos \alpha_a = \cos \alpha_b = 1$ としているために

$$(w_a^*)' = (w_b - w_a)/L, (v_a^*)' = -(v_b - v_a)/L \text{ etc.} \dots\dots\dots(62)$$

となる。ここに、 L は変形後の部材長である。解法 3 では節点回転角が 0 であるので、たわみ角は部材回転角に等しくなる。したがって、式 (62) が成り立つ注)。

ゆえに、両者の解法では平行移動のみを与えた場合、たわみ角は変形前の座標系で表わされていることになる。一方、解法 1 では、たわみ角は変形後の x 軸の方向余弦を用いて式 (38) で与えられるから、たわみ角は変形後の座標系で表わされている。

変形後の座標変換行列については、解法 2 では原論文²⁾の式 (9)~(11) より行列の要素 r_{23} と r_{32} が 0 になる。しかし、節点移動により断面主軸は 2 軸まわりの回転を行うために、上述の要素は 0 にはならない。さら

に、原式 (11) で与えられている変換行列は正規直交行列ではない。解法 3 でも、変形後のコード・アングルの求め方が厳密でないために、変換行列の要素 r_{23} が 0 になる注)。

b) 回転のみの場合

節点 j を全体座標軸 X, Y, Z のまわりにそれぞれ 10° ずつ回転させる。この場合には、変形前後の x 軸が一致するために、変形後の座標系で表わされた固定端側のたわみ角は、すべての解法において 0 である。

Table 2 Relative end rotations of member

	θ_b^*	$(w_b^*)'$	$(v_b^*)'$
Linear	0.17453	0.17453	0.17453
Sol. 1	0.08771	0.17793	0.17793
Sol. 2	0.08727	0.17453	0.17453
Sol. 3	0.08727	0.18908	0.15866

自由端 b における部材のねじり角とたわみ角を表-2 に示した。ねじり角は、解法 2, 3 とも相対ねじり角 ϕ ($=2\theta_b^*$) の値が線形解に一致している。しかし、厳密には 3 軸まわりの回転の連成効果により、線形解には一致しない。たわみ角は、解法 2 では微小回転の回転行列を用いているために線形解と同じ値になる。解法 3 では、変形後の座標変換行列には θ_Y, θ_Z が影響しないので、変換行列は変形前の部材軸回りの平面的な回転を表わすことになる。すなわち、2 主軸回りの回転による端面の傾きを無視していることから、2 つのたわみ角の値は一致していない。

座標変換行列については、解法 3 では上述のような問題点があり、解法 2 では部材両端における断面主軸の方向余弦の算術平均を用いているために、変換行列の要素の値が 1 を越える矛盾が生じている。

c) 平行移動と回転の場合

平行移動と回転が同時に起きる場合には、これらが独立に起きる場合よりも解法 2, 3 の精度が悪くなる。

一例として、前述の a) と b) を同時に行った場合の計算例を示す。計算では、1 回の移動量を 0.1、回転量を 1° とし、これを 10 回引続いて行った。自由端における 10 回目の総ねじり角と総たわみ角を表-3 に示す。また、解法 2 と 3 による各回の値を解法 1 による値に対

Table 3 Relative end rotations of member

	θ_b^*	$(w_b^*)'$	$(v_b^*)'$
Linear	0.17453	0.17453	0.17453
Sol. 1	0.10480	0.36430	-0.03853
Sol. 2	0.08727	0.32681	-0.05809
Sol. 3	0.11756	0.34225	-0.07556

注) 原論文^{2), 3)}では、部材の a 端と b 端とで異なった座標変換行列を用いているが、いまの場合にはねじり角が 0 であるので、2 つの変換行列は一致する。

注) Tezcan の原論文²⁾では、部材回転角の arcsine を用いているので、この場合には $\tau=0.19366$ となる。

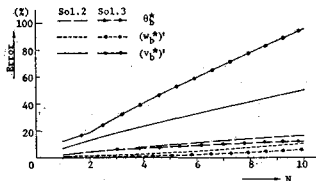


Fig. 12 Error of relative end rotations of member

する相対誤差で表わし、この絶対値を図-12に示した。解法3による $(v_0^*)'$ の誤差が、a) と b) の場合にはそれぞれ約4%と10%であったのが、表-3では96%になっている。この誤差は、図-12で第1回目のとき不連続になっているが、この解法ではコード・アングルを修正することにより変形後の座標系を求めているために、第1回目は線形解のコード・アングルを用いるので不連続になる注)。

以上の考察により、解法2, 3とも変形後の座標およびその座標系で表示されたたわみ角は厳密なものではなく、有限変位問題ではかなりの誤差が生じることがわかる。計算例では1端を固定したが、両端で移動と回転が生じて剛体回転を伴う一般的な場合には、近似式による誤差はさらに大きくなる。

(3) 剛性行列

式(54)で与えた剛性行列の性質を調べるために、前述のアーチについて若干の計算を行った。

まず、解法1において式(54), (55)の2次の非線形項 k_2 を省略した場合、 $q/p_{cr}=1/10000$ のときには $r=0.99$ までは収束したが、弾性座屈荷重のとき ($r=1.0$) には解は収束しなかった。 $q/p_{cr}=1/10$ のときには、 $r=0.5$ で急に収束性が悪くなり、Newton-Raphson法の反復回数は k_2 を省略しない場合の約5倍になった。このときの解の誤差 (k_2 を省略しない場合の値との差) は3~7%であった。さらに荷重を増加させると、解は収束しなかった。

次に、 k_2 の要素のなかで、式(52)のひずみエネルギー $(EA/8) \int_0^l \{(v_0')^2 + (w_0')^2\} dx$ から導かれる項を残し、残りの曲げ剛性 EI_y, EI_z を含む項を省略した場合には、 $q/p_{cr}=1/10$ のとき、 $r=1.0$ においてすべての変位と断面力の誤差は1%以下であり、 $r=2.0$ では変位で1~2%、曲げモーメントで2~4%の誤差が生じた。

以上の数値計算の結果から、式(52)のひずみエネルギーの表示式に含まれている変位の4次項のうち、ねじり率の2乗を含む4次項、すなわち下線をほどこした項

注) 座標系が定まらなければ、変形後のコード・アングルを求めることができない矛盾がある。

は省略できるが、すべての4次項を省略することはできないといえる。

(4) 有限な回転場における変位

前項で考察した剛性行列は式(40)の変位から導かれたものであり、この式は部材断面の回転が微小として表わされたものである。そこで、有限な回転場における変位の表示式を導き、この変位を用いて誘導される剛性行列について考察する。

図-4において、断面上の点 $P(x, y, z)$ の変位を求めるために、この断面内に位置ベクトル $\mathbf{r}(=\overrightarrow{OP})$ を考える。断面剛の仮定により、点 P の変位を \mathbf{d} とすれば、これを平行移動 \mathbf{d}_1 と回転 \mathbf{d}_2 とに分けることができる。したがって、式(15)の回転行列を用いれば

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1 + (\mathbf{R} - \mathbf{E})\mathbf{r} \dots\dots\dots(63)$$

となる。0点の回転角を α 、回転中心軸の成分を $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ とすれば注)，変位 \mathbf{d} の各成分は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \left\{ \frac{\theta_x \theta_y}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha) - \frac{\theta_z}{\alpha} \sin \alpha \right\} y \\ &\quad + \left\{ \frac{\theta_x \theta_z}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha) + \frac{\theta_y}{\alpha} \sin \alpha \right\} z \\ v &= v_0 + (1 - \cos \alpha) \left(\frac{\theta_y^2}{\alpha^2} - 1 \right) y \\ &\quad + \left\{ \frac{\theta_y \theta_z}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha) - \frac{\theta_x}{\alpha} \sin \alpha \right\} z \\ w &= w_0 + \left\{ \frac{\theta_z \theta_y}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha) + \frac{\theta_x}{\alpha} \sin \alpha \right\} y \\ &\quad + (1 - \cos \alpha) \left(\frac{\theta_z^2}{\alpha^2} - 1 \right) z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(64.1\sim3)$$

ここに、

$$\alpha^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 \dots\dots\dots(65)$$

式(64)が有限な回転場における有限変位を表わしていることは、ひずみと変位の関係式に代入すれば理解される。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(66.1\sim3)$$

に代入すると、式(39.4)の関係を満足していることがわかる。

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \dots\dots\dots(39.4)$$

式(64)が従来から用いられている次式^{4), 6), 7)}

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - (y \cos \phi_0 - z \sin \phi_0) v_0' \\ &\quad - (y \sin \phi_0 + z \cos \phi_0) w_0' \\ v &= v_0 - z \sin \phi_0 - y(1 - \cos \phi_0) \\ w &= w_0 + y \sin \phi_0 - z(1 - \cos \phi_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(67.1\sim3)$$

注) p. 14 の脚注参照

と異なるのは注)，有限な回転を考慮したために3軸まわりの回転が連成していることによる。この連成作用を無視すれば，式(67)は式(64)から導けることを示す。

まず，回転の3成分を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &\doteq \phi_0 \\ \theta_y &\doteq \tan^{-1}\left(-\frac{dw_0}{dx}\right) \doteq -w_0' \\ \theta_z &\doteq \tan^{-1}\left(\frac{dv_0}{dx}\right) \doteq v_0' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(68.1\sim 3)$$

次に，回転の連成作用を無視すれば，断面の回転中心軸はx軸に一致するから，式(65)のαは

$$\alpha = \phi_0 \dots\dots\dots(69)$$

となる。式(68)，(69)を式(64.1)に代入すれば

$$\begin{aligned} u &= u_0 - \left\{ y \left(\frac{\sin \phi_0}{\phi_0} \right) - z \left(\frac{1 - \cos \phi_0}{\phi_0} \right) \right\} v_0' \\ &\quad - \left\{ y \left(\frac{1 - \cos \phi_0}{\phi_0} \right) + z \left(\frac{\sin \phi_0}{\phi_0} \right) \right\} w_0' \dots\dots\dots(70) \end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{\sin \phi_0}{\phi_0} \doteq \cos \phi_0, \quad \frac{1 - \cos \phi_0}{\phi_0} \doteq \sin \phi_0 \dots\dots\dots(71)$$

が成り立てば，式(70)は式(67.1)に一致する。式(71)はφ₀が無限小のときに成立する。

式(67.2, 3)の変位v, wは平面的な回転から導かれた式である。すなわち，yとz軸まわりの回転による成分を無視し，式(68.1)と(69)を式(64.2, 3)に代入すれば，式(67.2, 3)を得る。

以上の考察により，式(67)は部材のねじり角φ₀が微小で，かつ回転の連成効果を無視したときに導かれる式であり，有限な回転場における変位を表わしていない。

次に，有限変位の近似式を求める。いま，式(65)の合成回転量が小さくてα² ≪ 1と仮定することができ，かつ式(68)が成り立つときには，これらの式を式(64)に代入し，回転の3次以上の項を省略すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - v_0'y - w_0'z - \frac{1}{2}\phi_0'(w_0'y - v_0'z) \\ v &= v_0 - \phi_0 z - \frac{1}{2}\{\phi_0^2 y + (v_0')^2 y + v_0'w_0'z\} \\ w &= w_0 + \phi_0 y - \frac{1}{2}\{\phi_0^2 z + (w_0')^2 z + v_0'w_0'y\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(72.1\sim 3)$$

式(72)の非線形項を省略した式は，式(63)において回転行列Rに微小回転に対する式(18)を用いれば導くことができる。この線形の式が，式(40)と同一のものである。ここで，式(67)を級数展開しても，式(72)を得ることができないことには注意すべきである。

結局，式(66)を式(39.4)に代入した微分方程式の解としての変位は，有限な回転を考慮しなければ求められないことが理解されよう。

注) ベルヌーイの仮定から，その項は省略した。

(5) 有限回転の影響

式(72)を用いて，1次の非線形剛性行列k₁を求める。ひずみε_xは，式(39.1)の代りに

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \dots\dots(73)$$

を用いると，3次以上の微小項を省略して次式のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_0' - v_0'y - w_0'z + \frac{1}{2} \{ (u_0')^2 + (v_0')^2 + (w_0')^2 \} \\ &\quad + \frac{1}{2} (v_0'')^2 y^2 + \frac{1}{2} (w_0'')^2 z^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\phi_0')^2 (y^2 + z^2) + v_0'' w_0'' y z \\ &\quad - \frac{1}{2} (\phi_0 w_0'' - \phi_0' w_0' + 2 u_0' v_0'') y \\ &\quad + \frac{1}{2} (\phi_0 v_0'' - \phi_0' v_0' - 2 u_0' w_0'') z \dots\dots\dots(74) \end{aligned}$$

式(74)によるひずみエネルギーは，4次以上の項を省略して

$$\begin{aligned} \frac{E}{2} \int_V \epsilon_x^2 dV &= \frac{EA}{2} \int_0^l [(u_0')^2 + (u_0'')^2 + u_0' (v_0'')^2 \\ &\quad + u_0' (w_0'')^2] dx \\ &\quad + \frac{EI_z}{2} \int_0^l [(v_0'')^2 + u_0' (\phi_0')^2 + 3 u_0' (v_0'')^2 \\ &\quad + \phi_0 v_0'' w_0'' - \phi_0' v_0' w_0'] dx \\ &\quad + \frac{EI_y}{2} \int_0^l [(w_0'')^2 + u_0' (\phi_0')^2 + 3 u_0' (w_0'')^2 \\ &\quad - \phi_0 v_0'' w_0'' + \phi_0' v_0' w_0'] dx \dots\dots\dots(75) \end{aligned}$$

式(75)を式(52)と比較して新しく導かれた項をΔUとおけば

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{E}{2} \int_0^l [A (u_0'')^2 + 3 I_{yz} u_0' (v_0'')^2 \\ &\quad + 3 I_{yx} u_0' (w_0'')^2] dx \\ &\quad + \frac{E}{2} (I_z - I_y) \int_0^l \phi_0 v_0'' w_0'' dx \\ &\quad + \frac{E}{2} \int_0^l [I_z \phi_0' v_0' w_0' - I_y \phi_0' v_0' w_0'] dx \dots\dots\dots(76) \end{aligned}$$

となる。式(76)の右辺第1項は，式(73)の(∂u/∂x)²/2の項から導かれたものであり，通常は高次の微小項として省略できる。

第2項は文献4)でも考察されているが，この文献に示された式では係数の値が2倍になっている。これは，有限変位の表示式(64)と(67)の相違によるものであって，式(64)を級数展開した式(72.1)の右辺第4項の係数が異なるためである。また，式(76)の第3項は式(52)でも現われているが，係数の違いにより式(75)との差として求められた。変位の表示式として式(67)を用いた場合には，たまたま，ひずみの式(39.1)において異符号の変位の2次項が現われるために，この第3項はひずみエネルギーには含まれなくなる。

結局，式(67)を用いる限り，最低次の非線形項を含む剛性行列を正しく求めることができず，有限変位解析

としては不十分といわざるをえない。

式(76)による剛性行列を求める。この剛性行列を \tilde{k}_i と書き、それぞれの項から導かれる剛性行列を $[d_{i,j}]$, $[e_{i,j}]$, $[f_{i,j}]$ とおけば

$$\tilde{k}_i = [d_{i,j}] + [e_{i,j}] + [f_{i,j}] \dots\dots\dots(77)$$

と書き表わすことができる。各項の要素を付録2に示す。

式(77)による付加剛性行列の影響を、アーチの計算例について調べてみる。計算では、式(54)の剛性行列に式(77)の各項を加えた式を用いた。剛性行列以外の式は、解法1と同じである。

初期荷重の値を $q = p_{cr}/10$ とし、面内荷重が $r=1.0$ と2.0の場合について付加剛性行列の各項の影響を表4に示した。表の値は、付加剛性を含まない場合の値に対する相対誤差で表わした。なお、 V は面外変位、 W はたわみ、 N は軸力、 M は部材軸まわりの曲げモーメントであり、それぞれの絶対値最大の値を示した。

Table 4 Relative errors of calculated values (%)

r	$[d_{i,j}]$		$[e_{i,j}]$		$[f_{i,j}]$	
	1.0	2.0	1.0	2.0	1.0	2.0
V	0.3	0.4	4.1	3.1	1.2	1.9
W	0.6	1.5	9.4	20.8	2.4	3.0
N	-0.1	-0.4	0.2	6.0	-1.2	-9.3
M_x	0.6	1.4	42.8	43.0	3.5	8.2
M_y	0.4	0.6	1.1	-5.3	1.8	3.7
M_z	0.1	0.5	3.6	23.7	3.2	7.0

表4の結果より、ひずみと変位の関係式における軸方向変位の微係数の2次項について、 $(\partial u/\partial x)$ の2次項は高次の微小項として無視できるが、他の微係数 $(\partial u/\partial y)$, $(\partial u/\partial z)$ の2次項は、3次元の有限変位解析では省略することができないと考えられる。

7. 結 語

立体骨組構造物の幾何学的非線形問題を扱った研究のなかから、有限変位をなるべく厳密に扱った研究を選び、本文で示した解析法と比較検討を行った。その結果、従来の研究においては3次元空間における有限変位の表示が正確でないために、有限変位解析としては次の諸点で不十分であることが明らかになった。

(1) 回転が微小回転として扱われており、3次元の有限変位場における有限な回転に対する認識が欠けている。

(2) そのために、変位関数に含まれるべき最低次の非線形項の一部が失われており、有限変位解析として不十分である。

(3) 以上のことから、構造解析における3つの基本

式、すなわち応力と変位の関係式、適合条件式、平衡条件式のすべてが厳密には満足されていない。

本文の研究結果から、立体骨組構造物の有限変位解析について次のことが判明した。

(1) 3次元空間においては、有限な回転をベクトルの扱うことはできず、回転の合成には高次の微小項まで用いなければならない。

(2) 回転行列を用いて、ねじり率一定の仮定のもとに厳密な座標変換行列と材端変位の表示式を求め、これらの式を用いると Newton-Raphson 法の収束性が良くなることを示した。

(3) 従来の文献で報告されていた変位場よりも精度の高い有限変位場を求め、ひずみと変位の関係式において、軸方向変位の微係数のすべての2次項を微小項として省略できないことを示した。

立体構造物の非線形解析においては、多次元の連立非線形方程式を数値的に解かねばならない困難な問題がある。このために種々の数値解法が発表されている^{14)~17)}。元来、マトリックス解析法は電子計算機の使用を前提とした実用的な解法であるから、理論式がいくら厳密な式であっても、数値計算において障害が起きるような解法では工学的には価値がない。マトリックス法を実際の構造物の非線形解析に応用するためには、計算時間、計算精度、記憶容量に対する制約条件が存在するために数値計算のためのアルゴリズムの研究も必要であるが、本文では省略した¹⁷⁾。

橋梁構造物の長大化が進み、いままで近似的に扱われてきた立体的な非線形性が無視できなくなってきている。本文で報告した解析法を用いれば、このような立体骨組構造物の弾性挙動を十分に追跡できると思われる。実際の構造物の解析に適用した例については、文献18)~20)を参照していただきたい。

本研究は、当時大学院生であった中村 守君(現、本四公団勤務)が行った研究²¹⁾をさらに発展させたものである。同君ならびに、式の変形と検算に多大の労力をわずらわした大学院生 森川孝義君(現、川崎製鉄勤務)と中村 滋君に謝意を表する次第である。

【付 録 1】

式(54)の剛性行列は対称行列であるので、上三角行列部分の要素を示す。式中、 $I_y + I_z = I_p$ とおいた。

(1) 線形項： $k_0 = [a_{i,j}]$

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= -a_{1,7} = a_{7,7} = EA/l \\ a_{2,2} &= -a_{2,8} = a_{8,8} = 12 EI_z/l^3 \\ a_{3,3} &= -a_{3,9} = a_{9,9} = 12 EI_y/l^3 \end{aligned}$$

$$a_{2,6}=a_{2,12}=-a_{8,8}=-a_{8,12}=6EI_z/l^2$$

$$a_{3,5}=a_{3,11}=-a_{5,9}=-a_{5,11}=-6EI_y/l^2$$

$$a_{4,4}=-a_{4,8}=a_{10,10}=GJ/l$$

$$a_{5,5}=a_{11,11}=4EI_y/l$$

$$a_{6,6}=a_{12,12}=4EI_z/l$$

$$a_{5,11}=2EI_y/l$$

$$a_{6,12}=2EI_z/l$$

その他の要素は 0.

(2) 1 次の非線形項： $k_1=[b_{i,j}]$

$$b_{1,2}=-b_{1,8}=-b_{2,7}=b_{7,8}=-\frac{3EA}{5l^2}(v_b-v_a)$$

$$-\frac{EA}{20l}(v_a'+v_b')$$

$$b_{1,3}=-b_{1,9}=-b_{3,7}=b_{7,9}=\frac{3EA}{5l^2}(w_b-w_a)$$

$$+\frac{EA}{20l}(w_a'+w_b')$$

$$b_{1,4}=-b_{1,10}=-b_{4,7}=b_{7,10}=\frac{EI_p}{2l^2}(\theta_b-\theta_a)$$

$$b_{1,5}=-b_{5,7}=-\frac{EA}{20l}(w_b-w_a)-\frac{EA}{60}(4w_a'-w_b')$$

$$b_{1,6}=-b_{6,7}=\frac{EA}{20l}(v_b-v_a)-\frac{EA}{60}(4v_a'-v_b)$$

$$b_{1,11}=-b_{7,11}=-\frac{EA}{20l}(w_b-w_a)+\frac{EA}{60}(w_a'-4w_b')$$

$$b_{1,12}=-b_{7,12}=\frac{EA}{20l}(v_b-v_a)+\frac{EA}{60}(v_a'-4v_b')$$

$$b_{2,2}=-b_{2,8}=b_{8,8}=b_{3,3}=-b_{3,5}=b_{9,5}=\frac{3EA}{5l^2}(u_b-u_a)$$

$$b_{2,4}=-b_{2,10}=-b_{4,8}=b_{8,10}=\frac{EI_p}{2l^2}(w_a'-w_b')$$

$$b_{2,5}=-b_{5,8}=-b_{2,11}=b_{8,11}=b_{3,6}=-b_{6,9}$$

$$=-b_{8,12}=b_{9,12}=-\frac{EI_p}{2l^2}(\theta_b-\theta_a)$$

$$b_{2,6}=-b_{6,8}=b_{2,12}=-b_{8,12}=-b_{3,5}=b_{5,9}$$

$$=-b_{8,11}=b_{9,11}=\frac{EA}{20l}(u_b-u_a)$$

$$b_{3,4}=-b_{3,10}=-b_{4,9}=b_{9,10}=\frac{EI_p}{2l^2}(v_a'-v_b')$$

$$b_{4,4}=-b_{4,10}=b_{10,10}=\frac{EI_p}{2l^2}(u_b-u_a)$$

$$b_{4,5}=-b_{5,10}=-\frac{EI_p}{2l^2}(v_b-v_a)+\frac{EI_z}{4l}(v_a'+v_b')$$

$$-\frac{EI_y}{4l}(v_a'-v_b')$$

$$b_{4,6}=-b_{8,10}=-\frac{EI_p}{2l^2}(w_b-w_a)+\frac{EI_z}{4l}(w_a'-w_b')$$

$$-\frac{EI_y}{4l}(w_a'+w_b')$$

$$b_{4,11}=-b_{10,11}=\frac{EI_p}{2l^2}(v_b-v_a)-\frac{EI_z}{4l}(v_a'+v_b')$$

$$-\frac{EI_y}{4l}(v_a'-v_b')$$

$$b_{4,12}=-b_{10,12}=\frac{EI_p}{2l^2}(w_b-w_a)+\frac{EI_z}{4l}(w_a'-w_b')$$

$$+\frac{EI_y}{4l}(w_a'+w_b')$$

$$b_{5,5}=b_{6,8}=b_{11,11}=b_{12,12}=\frac{EA}{15}(u_b-u_a)$$

$$b_{5,6}=-b_{11,12}=\frac{E(I_y-I_z)}{4l}(\theta_b-\theta_a)$$

$$b_{5,11}=b_{6,12}=-\frac{EA}{60}(u_b-u_a)$$

$$b_{5,12}=-b_{6,11}=-\frac{EI_p}{4l}(\theta_b-\theta_a)$$

$$b_{1,1}=b_{1,7}=b_{2,3}=b_{2,9}=b_{3,8}=b_{7,7}=b_{8,9}=0$$

(3) 2 次の非線形項： $k_2=[c_{i,j}]$

式中、 $I_y'=3I_y+I_z$ 、 $I_z'=I_y+3I_z$ なる記号を用いた。

$$c_{2,2}=-c_{2,6}=c_{8,8}$$

$$=\frac{EA}{70l}\left\{\frac{72}{l^2}(v_b-v_a)^2+\frac{24}{l^2}(w_b-w_a)^2\right.$$

$$-\frac{18}{l}(v_b-v_a)(v_a'+v_b')+\frac{6}{l}(w_b-w_a)(w_a'+w_b')$$

$$\left.+(w_a'^2+w_b'^2)+3(v_a'^2+v_b'^2)\right\}+\left[\frac{EI_y'}{5l^2}(\theta_b-\theta_a)^2\right]$$

$$c_{2,3}=-c_{2,9}=-c_{3,8}=c_{8,9}$$

$$=\frac{EA}{35l}\left\{\frac{24}{l^2}(v_b-v_a)(w_b-w_a)\right.$$

$$-\frac{3}{l}(w_b-w_a)(v_a'+v_b')+\frac{3}{l}(v_b-v_a)(w_a'+w_b')$$

$$\left.-(w_a'v_a'+w_b'v_b')\right\}$$

$$c_{2,4}=-c_{2,10}=-c_{4,8}=c_{8,10}$$

$$=\left[\frac{EI_y'}{30l^2}\left\{\frac{12}{l}(v_b-v_a)-(v_a'+v_b')\right\}(\theta_b-\theta_a)\right]$$

$$c_{2,5}=-c_{5,8}=-c_{3,6}=c_{6,9}$$

$$=-\frac{EA}{420}\left\{\frac{36}{l^2}(v_b-v_a)(w_b-w_a)+\frac{12}{l}(v_b-v_a)w_a'\right.$$

$$-\frac{12}{l}(w_b-w_a)v_a'+w_a'(v_a'-v_b')$$

$$\left. -w_b'(v_a'+v_b')\right\}$$

$$c_{2,6}=-c_{6,8}$$

$$=\frac{EA}{840}\left\{\frac{108}{l^2}(v_b-v_a)^2+\frac{36}{l^2}(w_b-w_a)^2\right.$$

$$-\frac{72}{l}(v_b-v_a)v_a'+\frac{24}{l}(w_b-w_a)w_a'$$

$$\left. -(w_a'^2-2w_a'w_b'-w_b'^2)-3(v_a'^2-2v_a'v_b'-v_b'^2)\right\}$$

$$+\left[\frac{EI_y'}{60l^2}(\theta_b-\theta_a)^2\right]$$

$$c_{2,11}=-c_{8,11}=-c_{3,12}=c_{9,12}$$

$$=-\frac{EA}{420}\left\{\frac{36}{l^2}(v_b-v_a)(w_b-w_a)\right.$$

$$+\frac{12}{l}(v_b-v_a)w_b'-\frac{12}{l}(w_b-w_a)v_b'$$

$$\left. -w_a'(v_a'+v_b')-w_b'(v_a'-v_b')\right\}$$

$$c_{2,12}=-c_{8,12}$$

$$=\frac{EA}{840}\left\{\frac{108}{l^2}(v_b-v_a)^2+\frac{36}{l^2}(w_b-w_a)^2\right.$$

$$-\frac{72}{l}(v_b-v_a)v_b'+\frac{24}{l}(w_b-w_a)w_b' \\ + (w_a'^2+2w_a'w_b'-w_b'^2) \\ + 3(v_a'^2+2v_a'v_b'-v_b'^2) \Big\} + \left[\frac{EI_y'}{60l^2}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{8,3} = -c_{8,9} = c_{9,9}$$

$$= \frac{EA}{70l} \left\{ \frac{24}{l^2}(v_b-v_a)^2 + \frac{72}{l^2}(w_b-w_a)^2 \right. \\ \left. - \frac{6}{l}(v_b-v_a)(v_a'+v_b') + \frac{18}{l}(w_b-w_a)(w_a'+w_b') \right. \\ \left. + 3(w_a'^2+w_b'^2) + (v_a'^2+v_b'^2) \right\} + \left[\frac{EI_z'}{5l^2}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{8,4} = -c_{8,10} = -c_{4,9} = c_{9,10}$$

$$= \left[\frac{EI_z'}{30l^2} \left\{ \frac{12}{l}(w_b-w_a) + (w_a'+w_b') \right\} (\theta_b-\theta_a) \right]$$

$$c_{8,5} = -c_{5,9}$$

$$= -\frac{EA}{840} \left\{ \frac{36}{l^2}(v_b-v_a)^2 + \frac{108}{l^2}(w_b-w_a)^2 \right. \\ \left. - \frac{24}{l}(v_b-v_a)v_a' + \frac{72}{l}(w_b-w_a)w_a' \right. \\ \left. - 3(w_a'^2-2w_a'w_b'-w_b'^2) \right. \\ \left. - (v_a'^2-2v_a'v_b'-v_b'^2) \right\} - \left[\frac{EI_z'}{60l^2}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{8,11} = -c_{9,11}$$

$$= -\frac{EA}{840} \left\{ \frac{36}{l^2}(v_b-v_a)^2 + \frac{108}{l^2}(w_b-w_a)^2 \right. \\ \left. - \frac{24}{l}(v_b-v_a)v_b' + \frac{72}{l}(w_b-w_a)w_b' \right. \\ \left. + 3(w_a'^2+2w_a'w_b'-w_b'^2) \right. \\ \left. + (v_a'^2+2v_a'v_b'-v_b'^2) \right\} - \left[\frac{EI_z'}{60l^2}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{4,4} = -c_{4,16} = c_{10,10}$$

$$= \left[\frac{EI_y'}{90l} \left\{ \frac{18}{l^2}(v_b-v_a)^2 - \frac{3}{l}(v_b-v_a)(v_a'+v_b') \right. \right. \\ \left. \left. + (2v_a'^2-v_a'v_b'+2v_b'^2) \right\} \right. \\ \left. + \frac{EI_z'}{90l} \left\{ \frac{18}{l^2}(w_b-w_a)^2 + \frac{3}{l}(w_b-w_a)(w_a'+w_b') \right. \right. \\ \left. \left. + (2w_a'^2-w_a'w_b'+2w_b'^2) \right\} + \frac{EI_r}{2l^2}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{4,5} = -c_{5,10} = \left[-\frac{EI_z'}{90l} \left\{ \frac{3}{l}(w_b-w_a) \right. \right. \\ \left. \left. + (4w_a'-w_b') \right\} (\theta_b-\theta_a) \right]$$

$$c_{4,6} = -c_{6,10} = \left[\frac{EI_y'}{90l} \left\{ \frac{3}{l}(v_b-v_a) \right. \right. \\ \left. \left. - (4v_a'-v_b') \right\} (\theta_b-\theta_a) \right]$$

$$c_{4,11} = -c_{10,11} = \left[-\frac{EI_z'}{90l} \left\{ \frac{3}{l}(w_b-w_a) \right. \right. \\ \left. \left. - (w_a'-4w_b') \right\} (\theta_b-\theta_a) \right]$$

$$c_{4,12} = -c_{10,12} = \left[\frac{EI_y'}{90l} \left\{ \frac{3}{l}(v_b-v_a) \right. \right. \\ \left. \left. + (v_a'-4v_b') \right\} (\theta_b-\theta_a) \right]$$

$$c_{5,5} = \frac{EAI}{1260} \left\{ \frac{18}{l^2}(v_b-v_a)^2 + \frac{54}{l^2}(w_b-w_a)^2 \right. \\ \left. + \frac{3}{l}(v_b-v_a)(v_a'-v_b') - \frac{9}{l}(w_b-w_a)(w_a'-w_b') \right. \\ \left. + 3(12w_a'^2-9w_a'w_b'+w_b'^2) \right. \\ \left. + (12v_a'^2-3v_a'v_b'+v_b'^2) \right\} + \left[\frac{EI_z'}{45l}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{5,6} = -\frac{EAI}{1260} \left\{ \frac{36}{l^2}(v_b-v_a)(w_b-w_a) \right. \\ \left. - \frac{3}{l}(v_b-v_a)(v_a'-w_b') + \frac{3}{l}(w_b-w_a)(v_a'-v_b') \right. \\ \left. - 3w_a'(8v_a'-v_b') + w_b'(3v_a'-2v_b') \right\}$$

$$c_{5,11} = -\frac{EAI}{2520} \left\{ \frac{6}{l}(v_b-v_a)(v_a'+v_b') \right. \\ \left. - \frac{18}{l}(w_b-w_a)(w_a'+w_b') \right. \\ \left. + 3(3w_a'^2-4w_a'w_b'+3w_b'^2) \right. \\ \left. + (3v_a'^2-4v_a'v_b'+3v_b'^2) \right\} - \left[\frac{EI_z'}{180l}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{5,12} = -\frac{EAI}{1260} \left\{ \frac{3}{l}(v_b-v_a)(w_a'+w_b') \right. \\ \left. - \frac{3}{l}(w_b-w_a)(v_a'+v_b') \right. \\ \left. + w_a'(3v_a'-2v_b') - w_b'(2v_a'-3v_b') \right\}$$

$$c_{6,6} = \frac{EAI}{1260} \left\{ \frac{54}{l^2}(v_b-v_a)^2 + \frac{18}{l^2}(w_b-w_a)^2 \right. \\ \left. + \frac{9}{l}(v_b-v_a)(v_a'-v_b') - \frac{3}{l}(w_b-w_a)(w_a'-w_b') \right. \\ \left. + (12w_a'^2-3w_a'w_b'+w_b'^2) \right. \\ \left. + 3(12v_a'^2-3v_a'v_b'+v_b'^2) \right\} + \left[\frac{EI_y'}{45l}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{6,11} = -\frac{EAI}{1260} \left\{ \frac{3}{l}(v_b-v_a)(w_a'+w_b') \right. \\ \left. - \frac{3}{l}(w_b-w_a)(v_a'+v_b') + w_a'(3v_a'-2v_b') \right. \\ \left. - w_b'(2v_a'-3v_b') \right\}$$

$$c_{6,12} = -\frac{EAI}{2520} \left\{ \frac{18}{l}(v_b-v_a)(v_a'+v_b') \right. \\ \left. - \frac{6}{l}(w_b-w_a)(w_a'+w_b') \right. \\ \left. + (3w_a'^2-4w_a'w_b'+3w_b'^2) \right. \\ \left. + 3(3v_a'^2-4v_a'v_b'+3v_b'^2) \right\} - \left[\frac{EI_y'}{180l}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{11,11} = \frac{EAI}{1260} \left\{ \frac{18}{l^2}(v_b-v_a)^2 + \frac{54}{l^2}(w_b-w_a)^2 \right. \\ \left. - \frac{3}{l}(v_b-v_a)(v_a'-v_b') + \frac{9}{l}(w_b-w_a)(w_a'-w_b') \right. \\ \left. + 3(w_a'^2-3w_a'w_b'+12w_b'^2) \right. \\ \left. + (v_a'^2-3v_a'v_b'+12v_b'^2) \right\} + \left[\frac{EI_z'}{45l}(\theta_b-\theta_a)^2 \right]$$

$$c_{11,12} = -\frac{EAI}{1260} \left\{ \frac{36}{l^2}(v_b-v_a)(w_b-w_a) \right. \\ \left. + \frac{3}{l}(v_b-v_a)(w_a'-w_b') - \frac{3}{l}(w_b-w_a)(v_a'-v_b') \right. \\ \left. - w_a'(2v_a'-3v_b') + 3w_b'(v_a'-8v_b') \right\}$$

$$c_{12,12} = \frac{EA}{1260} \left\{ \frac{54}{l^2} (v_b - v_a)^2 + \frac{18}{l^2} (w_b - w_a)^2 \right. \\ \left. - \frac{9}{l} (v_b - v_a)(v_a' - v_b') + \frac{3}{l} (w_b - w_a)(w_a' - w_b') \right. \\ \left. + (w_a'^2 - 3w_a'w_b' + 12w_b'^2) \right. \\ \left. + 3(v_a'^2 - 3v_a'v_b' + 12v_b'^2) \right\} + \left[\frac{EI_y'}{45l} (\theta_b - \theta_a)^2 \right] \\ c_{1,i} = c_{1,i+6} = c_{i,7} = c_{7,i+6} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

【付録 2】

式 (77) の付加剛性行列を示す。式中、 $I_p = I_y + I_z$ 、 $I_Q = I_y - I_z$ なる記号を用いた。

(1) $[d_{i,j}]$

$$d_{1,1} = -d_{1,7} = d_{7,7} = \frac{3EA}{2l^2} (u_b - u_a) \\ d_{1,2} = -d_{1,8} = -d_{2,7} = d_{7,8} = \frac{18EI_z}{l^4} (v_b - v_a) \\ \quad - \frac{9EI_z}{l^3} (v_a' + v_b') \\ d_{1,3} = -d_{1,9} = -d_{3,7} = d_{7,9} = \frac{18EI_y}{l^4} (w_b - w_a) \\ \quad + \frac{9EI_y}{l^3} (w_a' + w_b') \\ d_{1,5} = -d_{5,7} = -\frac{9EI_y}{l^3} (w_b - w_a) - \frac{3EI_y}{l^2} (2w_a' + w_b') \\ d_{1,6} = -d_{6,7} = \frac{9EI_z}{l^3} (v_b - v_a) - \frac{3EI_z}{l^2} (2v_a' + v_b') \\ d_{1,11} = -d_{7,11} = -\frac{9EI_y}{l^3} (w_b - w_a) \\ \quad - \frac{3EI_y}{l^2} (w_a' + 2w_b') \\ d_{1,12} = -d_{7,12} = \frac{9EI_z}{l^3} (v_b - v_a) - \frac{3EI_z}{l^2} (v_a' + 2v_b') \\ d_{2,2} = -d_{2,8} = d_{8,8} = \frac{18EI_z}{l^4} (u_b - u_a) \\ d_{2,6} = d_{2,12} = -d_{6,8} = -d_{8,12} = \frac{9EI_z}{l^3} (u_b - u_a) \\ d_{3,3} = -d_{3,9} = d_{9,9} = \frac{18EI_y}{l^4} (u_b - u_a) \\ d_{3,5} = d_{3,11} = -d_{5,9} = -d_{9,11} = -\frac{9EI_y}{l^3} (u_b - u_a) \\ d_{5,5} = d_{11,11} = \frac{6EI_y}{l^2} (u_b - u_a) \\ d_{6,6} = d_{12,12} = \frac{6EI_z}{l^2} (u_b - u_a) \\ d_{5,11} = \frac{3EI_y}{l^2} (u_b - u_a) \\ d_{6,12} = \frac{3EI_z}{l^2} (u_b - u_a)$$

その他の要素は 0。

(2) $[e_{i,j}]$

$$e_{2,3} = -e_{2,9} = -e_{3,8} = e_{8,9} = -\frac{3EI_Q}{2l^3} (\theta_a + \theta_b)$$

$$e_{2,4} = -e_{4,8} = \frac{3EI_Q}{2l^3} (w_b - w_a) + \frac{EI_Q}{2l^2} (2w_a' + w_b') \\ e_{2,5} = -e_{3,6} = -e_{5,8} = e_{8,9} = \frac{EI_Q}{2l^2} (2\theta_a + \theta_b) \\ e_{2,10} = -e_{8,10} = \frac{3EI_Q}{2l^3} (w_b - w_a) + \frac{EI_Q}{2l^2} (w_a' + 2w_b') \\ e_{2,11} = -e_{3,12} = -e_{8,11} = e_{9,12} = \frac{EI_Q}{2l^2} (\theta_a + 2\theta_b) \\ e_{3,4} = -e_{4,9} = \frac{3EI_Q}{2l^3} (v_b - v_a) - \frac{EI_Q}{2l^2} (2v_a' + v_b') \\ e_{3,10} = -e_{9,10} = \frac{3EI_Q}{2l^3} (v_b - v_a) - \frac{EI_Q}{2l^2} (v_a' + 2v_b') \\ e_{4,5} = -\frac{EI_Q}{l^2} (v_b - v_a) + \frac{EI_Q}{4l} (3v_a' + v_b') \\ e_{4,6} = \frac{EI_Q}{l^2} (w_b - w_a) + \frac{EI_Q}{4l} (3w_a' + w_b') \\ e_{4,11} = e_{5,10} = -\frac{EI_Q}{2l^2} (v_b - v_a) + \frac{EI_Q}{4l} (v_a' + v_b') \\ e_{4,12} = e_{8,10} = \frac{EI_Q}{2l^2} (w_b - w_a) + \frac{EI_Q}{4l} (w_a' + w_b') \\ e_{5,6} = \frac{EI_Q}{4l} (3\theta_a + \theta_b) \\ e_{5,12} = e_{9,11} = \frac{EI_Q}{4l} (\theta_a + \theta_b) \\ e_{10,11} = -\frac{EI_Q}{l^2} (v_b - v_a) + \frac{EI_Q}{4l} (v_a' + 3v_b') \\ e_{10,12} = \frac{EI_Q}{l^2} (w_b - w_a) + \frac{EI_Q}{4l} (w_a' + 3w_b') \\ e_{11,12} = \frac{EI_Q}{4l} (\theta_a + 3\theta_b)$$

その他の要素は 0。

(3) $[f_{i,j}]$

$$f_{2,4} = -f_{2,10} = -f_{4,8} = f_{8,10} = -\frac{EI_p}{4l^2} (w_a' - w_b') \\ f_{2,5} = -f_{2,11} = f_{3,8} = -f_{3,12} = -f_{5,8} = -f_{6,9} = f_{8,11} \\ = f_{9,12} = \frac{EI_p}{4l^2} (\theta_b - \theta_a) \\ f_{3,4} = -f_{3,10} = -f_{4,9} = f_{9,10} = -\frac{EI_p}{4l^2} (v_a' - v_b') \\ f_{4,5} = -f_{3,10} = \frac{EI_p}{4l^2} (v_b - v_a) - \frac{EI_z}{8l} (v_a' + v_b') \\ \quad + \frac{EI_y}{8l} (v_a' - v_b') \\ f_{4,6} = -f_{6,10} = \frac{EI_p}{4l^2} (w_b - w_a) - \frac{EI_z}{8l} (w_a' - w_b') \\ \quad + \frac{EI_y}{8l} (w_a' + w_b') \\ f_{4,11} = -f_{10,11} = -\frac{EI_p}{4l^2} (v_b - v_a) + \frac{EI_z}{8l} (v_a' + v_b') \\ \quad + \frac{EI_y}{8l} (v_a' - v_b') \\ f_{4,12} = -f_{10,12} = -\frac{EI_p}{4l^2} (w_b - w_a) - \frac{EI_z}{8l} (w_a' - w_b') \\ \quad - \frac{EI_y}{8l} (w_a' + w_b') \\ f_{5,6} = -f_{11,12} = -\frac{EI_Q}{8l} (\theta_b - \theta_a)$$

$$f_{s,12} = -f_{s,11} = \frac{EI_p}{8I}(\theta_b - \theta_a)$$

その他の要素は 0.

参考文献

- 1) Connor, J.J., R.D. Logcher and S.C. Chan : Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures, ASCE, Vol. 94, No. ST6, Proc. Paper 6011, pp. 1525~1547, June, 1968.
- 2) Tezcan, S.S. and B.C. Mahapatra : Tangent Stiffness Matrix for Space Frame Members, ASCE, Vol. 95, No. ST 6, Proc. Paper 6627, pp. 1257~1270, June, 1969.
- 3) Chu, K.H. and R.H. Rampetsreiter : Large Deflection Buckling of Space Frames, ASCE, Vol. 98, No. ST 12, Proc. Paper 9455, pp. 2701~2722, December, 1972.
- 4) 結城・前田 : 薄肉断面構造の三次元挙動の解析, 土木学会論文報告集, No. 224, 1974.
- 5) Oran, C. : Tangent Stiffness in Space Frames, ASCE, Vol. 99, No. ST 6, Proc. Paper 9813, pp. 987~1001, June, 1973.
- 6) 坂井藤一 : 薄肉開断面部材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導, 土木学会論文報告集, No. 221, 1974.
- 7) 西野・倉方・長谷川・奥村 : 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No. 225, 1974.
- 8) 西野・倉方・長谷川 : 論文 4) に対する討議, 土木学会論文報告集, No. 239, 1975.
- 9) 西野文雄 : 曲げと軸力を受ける部材の解析, 構造力学公式集発刊記念講習会テキスト, 1975.
- 10) 国井修二郎・千田香苗 : 力学 I, 丸善, 1960, pp. 57~70.
- 11) 信原泰夫・桜井達美・吉村信敏 : コンピュータによる構造工学講座 II-2-B, 培風館, 1972, pp. 83~88.
- 12) 川井・村木 : マトリックス法による船体構造解析に関する研究 (IV), 日本造船学会論文集, No. 126, 1969.
- 13) 前田・林・中村 : 増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法, 土木学会論文報告集, No. 223, 1974.
- 14) Desai, C.S. and J.F. Abel; 山本善之訳 : マトリックス有限要素法, 科学技術出版社, 1974.
- 15) Stricklin, J.A., W.A. Von Riesemann, J.R. Tillerson and W.E. Haisler : Static Geometric and Material Nonlinear Analysis, Advance in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, The University of Alabama in Huntsville Press, pp. 301~324, 1972.
- 16) Gallagher, R.H. : Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, University of Tokyo Press, pp. 109~123, 1973.
- 17) 林 正 : 構造物の非線形解析における多元連立方程式の数値解法, 京都大学数理解析研究所 研究集会 予稿集, 1975.
- 18) 前田・林・伊奈 : 大三島橋の三次元的非線形性について, 土木学会第 29 回年次学術講演会講演概要集, I-108, 1974.
- 19) 前田・林・森川 : アーチ橋の面外非線形挙動について, 土木学会第 29 回年次学術講演会講演概要集, I-109, 1974.
- 20) 前田・林・有岡 : 立体アーチの耐荷力について, 土木学会第 30 回年次学術講演会講演概要集, I-82, 1975.
- 21) 前田・林・中村 : 立体骨組構造物の大変形解析, 昭和 49 年度 土木学会 関西支部 年次学術講演会 講演概要, I-1, 1974.

(1976.1.31・受付)