【討　議】

日野幹雄・宮永洋一 共著 "グリーン関数および仮想法による波力と波の回折計算" への討議および回答

(土木学会論文報告集第237号，1975年5月掲載)

▶討議者 (Discussion) ―――― 坂井藤一 (川崎重工業(株))・月岡康一 (川崎重工業(株))
By Fujikazu Sakai and Koichi Tsukioka

著者らは，本論文において波力と波の回折問題の解析方法について述べ，グリーン関数法により導かれた積分方程式を実際に解く際に次数低減を計るため仮想法を提案している．さらに，この仮想法は他の分野にも応用できる一般的数値計算法であると述べている．

討議者らも，この種の問題を数値的に扱かうという立場で有限要素法 (FEM) の適用を試みつつあり[1]，グリーン関数法を利用した FEM についても研究を行っている[2),3)]際なので大変興味深く拝見した次第である．グリーン関数法そのものは著者らも述べているように以前からかなり研究されているので[4)]，ここでは著者らの提案された仮想法について若干の考察を示し，討議の材料としたい．

離散化手法による数値解析において，自由度低減の努力は構造力学の分野ではすでにいろいろ考えられており，matrix reduction あるいは condensation と呼ばれているものがこれに該当する．また，FEM 以前の変分法に基づく大半の解析法は FEM や差分法に比べて自由度が少なくて済むことを特徴としている．しかしながら，このような場合問題はいかに精度を保ちつつ一般性のある手法を考え得るかということであろう．著者らの仮想法をそのような立場から検討してみると，手法的には変分法に属する重みつき残差法 (MWR) に則っている．

A を領域 Ω で定義された作用素，f を既知関数とする時，関数 ϕ の次の方程式を考える．

$$A\cdot\phi=f \quad \text{in } \Omega \quad \cdots\cdots(41)$$

ϕ の近似関数 ϕ^* を次のように仮定する．

$$\phi^*=\sum_{j=1}^{m}C_j\phi_j \quad \cdots\cdots(42)$$

ただし，$\{\phi_j\}$ は試験関数列，C_j は未知係数である．

この時，重み関数 w_j を選んで，

$$\int_\Omega(A\cdot\phi^*-f)\cdot w_j\,d\Omega \quad \cdots\cdots(43)$$

から，C_j を決定するのが MWR であるが，本論文の場合には式 (13.b) が式 (41) に対応するので，

$$A\cdot\phi\equiv\phi+\lim_{(\xi,\eta,\zeta)\to S}\int_S G_n\cdot\phi\,dS \quad \cdots\cdots(44)$$

$$f\equiv-\lim_{(\xi,\eta,\zeta)\to S}\int_S G\cdot(\phi_{in})_n\,dS \quad \cdots\cdots(45)$$

となる．

なお，A が自己随伴作用素の場合には，良く知られているように次のような変分汎関数 π が存在する．

$$\pi=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\phi^*\cdot A\cdot\phi^*-f\cdot\phi^*\right)d\Omega \quad \cdots\cdots(46)$$

これより，変分原理 $\delta\pi=0$ から C_j を決定することもできる．本論文のような問題では，常に A が自己随伴型であるとは限らないが，著者の扱かわれたような例題ではこの変分原理も適用可能であることを指摘しておく．

著者らの仮想法は，この試験関数 ϕ_j として弾性板の単位荷重に対するたわみ関数 (Green 関数) を採用する．すなわち，

$$\phi_j=\delta\begin{pmatrix}x,\ y\\ x_j,\ y_j\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(47)$$

この時係数 C_j が荷重強度のような意味をもってくることは当然のことである．したがって，著者らの方法は一般的 MWR の特別な場合としてとらえるのが妥当なのではないだろうか．また，選点法を用いた場合，行列 $\boldsymbol{D}$ を正方にするために最小二乗法を適用することが多いが，これも MWR の範ちゅうに含まれるものである．

次に，試験関数列 $\{\phi_j\}$ について述べたい．できるだけ少ない自由度で精度のよい解を得るためには，$\{\phi_j\}$ の選定は重要な問題である．その際，解の形 (関数形) が予想できる場合はそれを表現しやすいような $\{\phi_j\}$ を選定することが好ましい．一方，解の形が予想できない場合は計算が容易になるような $\{\phi_j\}$ を選ぶのがよく，簡単なべき級数や直交性を有する三角級数などが多く用いられる．

これに対して，著者らは弾性板の Green 関数を用いている (たとえば式(40)) が，これは一般的に用いられ

る試験関数列と少し趣を異にしている．一般的方法では試験関数は1項または数項の部分和からなるのに対して，仮想法では無限級数和からなり前者に比してかなり複雑である．また，著者らの採用された $\{\phi_j\}$ といま問題にしている方程式 (13.b) の解との相関性は不明であり，$\{\phi_j\}$ が弾性板の Green 関数でなければならない理由はないように思われる．この観点より見ると著者らの採用された試験関数列は形が複雑であり扱いがそれほど容易でないので，一般的数値解析において著者らの方法が有効であるかどうか一概に言えないのではないだろうか．

討議者らはこのような意味で従来からよく用いられている多項式や三角級数が一般性があると思い，この種の問題に対する適用を検討しつつある．結局，FEM のように $\{\phi_j\}$ として近似度の悪い低次の多項式を用いる代りに自由度によって補い，プログラムを一般性のあるものにするか，近似度の良い $\{\phi_j\}$ を用いて一般性を犠牲にして自由度の低減を計るかということになるが，著者らの立場は後者であり，討議者らもそれにあえて異を唱える者ではないことを申し上げておきたい．

参考文献

1) 坂井藤一 他：波動解析への有限要素法の適用（第1報～第3報），第20～22回海岸工学講演会論文集，1973～1975.
2) 坂井藤一・月岡康一：積分方程式を利用した表面波動問題の有限要素法解析，日本鋼構造協会第9回大会研究集会，マトリックス構造解析法研究発表論文集，1975.
3) 坂井藤一・月岡康一：波浪問題の有限要素法による数値シミュレーション，第3回国際海洋開発会議講演概要集，1975.
4) Wehausen, J. V. and Laitone, E. V.: Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Vol. IX, pp. 446～778, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

▶回答者 (*Closure*) ——— 日野幹雄（東京工業大学）

By Mikio Hino

まず両氏の熱心な討論に敬意を表したい．

（1） 討議の第一点はまさに本論文で著者らの述べたことである．すなわち，線型作用素による問題の近似誤差を近似関数と直交させる方法によると．ただ，線型作用素を本論文では積分方程式に限って論じたことが討議者の誤解となったものと思われる．さらに，この点に関する一般的検討と比較は，すでに著者の一人（日野）が他の論文[1]で詳しく述べている点で積分方程式のみならず，微分方程式の境界値問題，固有値問題にも言及している．関連する部分を引用すると以下のようである．

“常微分・偏微分方程式および積分方程式の近似解法として「仮想法」もしくは「仮想荷重法」を提案する．「仮想法」は**解空間**を仮想的な弾性板のたわみの重ね合せと考え，この仮想弾性板のたわみを生じさせるであろう数個の“仮想的な荷重”を未知数として決定しようとするものである．

この方法の着想は，不規則に配置された大気汚染の monitering station の data から，等濃度図を自動的に作図させようとすることであった．その後，海洋構造物に作用する波力の問題（積分方程式）を簡便に解くための方法としてこの方法を発展させることを思いついた．

本論文ではその他の常および**偏微分方程式，固有値問題**への応用についても解説する．（中略）

積分領域・$S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ について

$$\phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=\sum_{j=1}^{N} P_j\delta(x', y'; \xi_j, \eta_j) \qquad ((\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})\in S)\cdots\cdots(8)$$

とおく（式 (8) は全域ではなく S 上だけとする）．ここに，(x', y') は曲面上の点 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ に対応する仮想弾性平板上の点を示す．式 (8) を式 (7) に代入し，あとは各点 $j\,(=1, 2, \cdots, N)$ での左右両辺の値を等しいとする Callocation 法か，代入後展開関数 $\delta(x', y'; \xi, \eta)$ **を掛けて積分し残差を最小**とする Galerkin 法を応用すれば，仮想荷重 $P_j\,(j=1, 2, \cdots, N)$ が決定しうる．これを式 (8) に代入すれば S 上の ϕ，つまり式 (7) の右辺の $\phi(\xi, \eta, \zeta)$ が近似でき，式 (7) より任意点の解 $\phi(x, y, z)$ が求められる．

Green 関数 δ としてはより一般的に微分方程式

$$\sum_i \frac{\partial^n \delta}{\partial {x_i}^n}=\Pi\delta_{*i}(x_i-\xi_i)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

の解を用いればよい．$n=4$ が弾性板の場合である．ここに，δ_{*i} は Dirac の δ-関数．

II. 仮想法と他の近似計算法との比較

a) <u>Ritz 法・Galerkin 法・FEM・Spline 関数との関係について</u>

仮想法の発想の過程は以上のようである．いま，後から考えると仮想法には，現在われわれが応用できる表記の近似法との類似点や相違点などがあることに思い当った．はたして，仮想法は新しい近似計算法として認知されうるものなのか，この点について考えてみたい．

・未知の関数を任意の関数の級数として表現する点で，Ritz や Galerkin 法と類似性がある．しかし，展開関数が $f_j(x)$ ではなく，Green 関数型（影響関数型）

$f_j(x, \xi_j)$ であり，展開係数に（仮想）荷重という具体的意味を与えることができた．そのため現象を頭に思い浮べながら仮想荷重点を適当に配置しうるから解が求め易いという利点が生じる．

・領域を必要に応じて細かく任意形に分割するFEMと仮想法は全く逆の発想となっている．仮想法は FEMにおいて内挿関数を高次の曲面で近似することとは違う．仮想法では内挿関数（＝仮想弾性板のたわみ）そのものではなく，これを発生させるであろう少数個の仮想的な荷重を求めることであるから．また，仮想荷重の作用点は自由であり，必要な個所に集中して置けば良い．

・piecewise に定義された関数を滑らかに内挿する点では Spline 関数とも関連がある．しかし，仮想法では内挿関数ではなく，もう一段背後の仮想荷重を問題としている．”（以下省略）

人間の思考や概念を一般的に把えようとすれば，それはいくらでも広くなるであろう．事実，数学の分野では概念の一般化ということでどれだけわれわれの理解が拡げられ統一化されたか言い過ぎることはあるまい．それにもかかわらず，同一手法の範ちゅうに含まれながら，Rayleigh-Ritz 法と Galerkin 法と moment 法が，また Fourier 展開と Karhunen-Loéve 系と因子分析法が，それぞれ異なる手法であることを主張し認知されていると同様に仮想法もまた新しい数学手法の一つと主張できるであろう．

特に，仮想法の利点の一つは，数学的手法を物理的なもの視覚的なものに置換して理解しやすいものにしたことである．この手法が目指した数学的形式的なものからの脱却を理解して欲しいものである．

（2） 仮想法では試験関数は無限級数より成るから複雑というのは討議者の誤解と思われます．仮想法の試験関数の数は仮想荷重点の数だけで足り，Fourier 級数などよりはるかに収束が速い．討議者は試験関数の問題に対する収束度と試験関数の算出手順とを混同している．なお，式(40)は本文中にも述べたように Green 関数の表式の一例として挙げたにすぎず，試験関数は無限級数となるとはどこにも書いていない．単純支持ばりの Green 関数は3次の多項式で表わされるし，弾性板の Green 関数も多項式表示ができる．

（3） 仮想法の利点の一つに領域の区分を大きく採れることがある．本論文では全領域を一つとして扱っている．三角級数ではこうは行くまい．

参 考 文 献

1) 日野幹雄（1975）: 近似計算法としての仮想法の提案と解説，東京工業大学・土木工学科・研究報告，No. 18, pp. 89～96.