

二次元および三次元斜面内の非定常地下水流について

ANALYSIS OF UNSTEADY GROUND WATER FLOW
IN 2-DIMENSIONAL AND 3-DIMENSIONAL SLOPES

川谷 健*・三宅 旬**

By Takeshi KAWATANI and Jun MIYAKE

1. ま え が き

山腹斜面の表層崩壊の原因の一つとして、降雨が表層内に浸透し、下層の不透水層上に貯留されて形成される地下水面の上昇がしばしば指摘される。特に、表層が砂質土である場合には、piping 現象¹⁾が生じやすく、これをきっかけに斜面崩壊が起こることも報告されている²⁾。また、地下水面が地表に現れなくとも、水面下の土の粘着力や摩擦角が減少³⁾、斜面の安定性は地下水面の上昇によって低下することも考えられる。また、谷部に盛土を行った場合、原地盤が一つの不透水層あるいは難透水層を形成することがある。このとき、盛土内の地下水の流れを知り、適切な地下排水管の配置の資料とすることも重要となる。これらの問題に関して地下水流を考えると、地下水面の空間的および時間的変化を知ることが必要であり、したがって、不透水層の勾配とその変化を無視することはできない。これまで、傾きをもつ不透水層上の地下水流は、定常状態にある場合について解かれることが多く、また不透水層の勾配も一定で比較的小さい場合（たとえば、水平面とのなす角が 10° 以下）がとりあげられている。

本論文では、不透水層の勾配が連続的に変化する斜面内での地下水の非定常運動を、差分法を用いた数値解析によって検討した結果を報告する。解析の対象とする斜面の一つは、遷緩点および遷急点を有する 2 次元斜面である。この場合、遷緩点あるいは遷急点付近での地下水面の時間的変動を把握することを目的としている。他の一つの斜面は、0 次谷と称されるような 3 次元斜面であり、地下水が谷部に集中してくる過程を定量的に知ることが目的としている。このような目的のためには、水位

の空間的および時間的変化が小さいと仮定できないので、解析の基礎となる微分方程式は非線形のまま取り扱われねばならない。数値解析の手法としては、差分法のほかには有限要素法を用いることも考えられるが、以下に解析するような 3 次元斜面内の非定常流を取り扱う場合には、計算機の容量および計算時間の制約から後者は有利でないと判断した。差分法による数値解析に必要な計算時間および計算機容量が、有限要素法のそれにくらべて小さくなるのは、流れの領域内の piezometric head の分布を仮定し、それと地下水位を関係づけて解析するためである。したがって、このように piezometric head を仮定して得られた非線形微分方程式の解は、差分法を用いることの妥当性、あるいは解の安定性、さらに仮定の正当性の面から検証されることが必要である。ここでは、検証のために、2 次元斜面の砂モデルを用いた実験結果と数値解析結果とを比較検討した。また、より一層等方等質の条件を満たすために、小さなガラス球からなる 2 次元斜面を用い、これに粘性液を浸透流下させて実験を行い、数値解析結果と比較した。両者はよく一致することが確かめられた。これは数値解析手法、および piezometric head の分布についての仮定が妥当であることを示すものと考えられる。

2. 基礎微分方程式

まず、2 次元斜面内での地下水流について、数値解析のための基礎微分方程式を導く。斜面内での流れを図-1 に、解析に用いる記号とともに示す。勾配の変化する不透水層上の自由地下水流を考え、自由水面を通して一様な浸透があるものとする。いま、地下水の圧力分布が静水圧分布であると仮定すれば、不透水層面にたてた法線に沿って piezometric head は一定である。すなわち、不透水層面の法線に沿って、piezometric head φ は

$$\varphi = h \cos \sigma + b \dots \dots \dots (1)$$

* 正会員 Ph.D. 神戸大学助教授 工学部土地造成工学研究施設

** 学生会員 神戸大学大学院生 工学部土木工学科

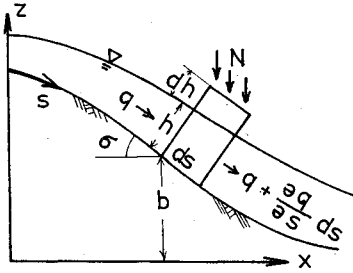


図-1 地下水流 (2次元斜面)

であたえられる⁴⁾。ここで、 h は法線に沿って測った水深、 σ は不透水層と水平面とのなす角、 b は基準面より測った不透水層面の高さである。したがって、Darcy則を適用すると、不透水層に沿っての流速 v は

$$v = -K \frac{\partial \phi}{\partial s} \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで、 s は不透水層上の任意の起点より、不透水層に沿って流れの方向に測った距離であり、 K は透水係数である。一方、 s と微小距離 ds だけ離れた $s + ds$ とにたてた2つの法線によって区切られる領域についての連続の式は

$$n \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial s}(hv) + w \cos \sigma \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで、 w は単位水平面当りの浸透量、 n は有効空隙率、 t は時間を表わす独立変数である。式(3)に式(2)を代入すると

$$n \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ Kh \frac{\partial}{\partial s} (h \cos \sigma + b) \right\} + w \cos \sigma \dots\dots\dots (4)$$

を得る。透水層が等方等質である場合、式(4)は

$$\begin{aligned} n \frac{\partial h}{\partial t} = & Kh \left(\cos \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + 3 \frac{\partial h}{\partial s} \frac{d(\cos \sigma)}{ds} \right. \\ & \left. + h \frac{d^2(\cos \sigma)}{ds^2} + \frac{d^2 b}{ds^2} \right) \\ & + K \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right) \left(\cos \sigma \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{db}{ds} \right) + w \cos \sigma \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

となる。 $dx/ds = \cos \sigma$ なる関係を用いると、式(5)は

$$\begin{aligned} n \frac{\partial h}{\partial t} = & Kh \cos \sigma \left\{ \cos^2 \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 4 \cos \sigma \frac{\partial h}{\partial x} \frac{d(\cos \sigma)}{dx} \right. \\ & \left. + h \cos \sigma \frac{d^2(\cos \sigma)}{dx^2} + h \left[\frac{d(\cos \sigma)}{dx} \right]^2 \right. \\ & \left. + \cos \sigma \frac{d^2 b}{dx^2} + \frac{db}{dx} \frac{d(\cos \sigma)}{dx} \right\} \\ & + K \cos^2 \sigma \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\cos \sigma \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{db}{dx} \right) \\ & + w \cos \sigma \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

となる。

次に、3次元斜面の場合について、微分方程式を導く。図-2 に谷状の斜面を模式的に示し、座標系もあわせて示す。 x - y 平面は水平面であり、 r および s は流域界

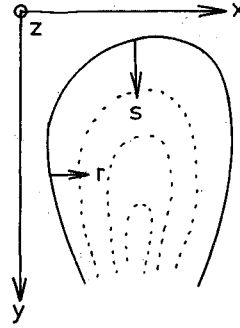


図-2 3次元斜面模式図

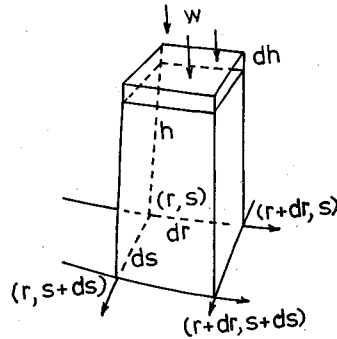


図-3 地下水流 (3次元斜面)

上の点から不透水層面に沿って、それぞれ x 軸および y 軸の正の方向に測った距離とする。いま、地下水の圧力分布が静水圧分布であると仮定すれば、2次元斜面の場合と同様に、piezometric head は不透水層面にたてた法線に沿って一定であるが見なすことができる。したがって、 r および s 方向の流速を u および v とすると、それらは

$$u = -K \frac{\partial}{\partial r} (h \cos \theta + b) \dots\dots\dots (7)$$

および

$$v = -K \frac{\partial}{\partial s} (h \cos \theta + b) \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。ここで、 h は不透水層面の法線に沿って測った水深であり、 θ は不透水層面の法線と鉛直軸 (z 軸) とのなす角である。一方、法線によって形成される底面が $dr \times ds$ の水柱 (図-3 参照) について、連続の式を考えると、

$$n \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} (hu) - \frac{\partial}{\partial s} (hv) + w \cos \alpha \cos \beta \dots\dots\dots (9)$$

を得る。ここで、 α および β は、それぞれ、 r 軸および s 軸が水平面 (x - y 平面) となす角である。上式に式(7)と(8)を代入し、透水層が等方等質であるとする、

$$\frac{n}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ h \frac{\partial}{\partial r} (h \cos \theta + b) \right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s} \left\{ h \frac{\partial}{\partial s} (h \cos \theta + b) \right\} + \frac{w}{K} \cos \alpha \cos \beta \dots\dots\dots(10)$$

を得る。ここで、 w は単位水平面当りの浸透量である。 $dx/dr = \cos \alpha$, $dy/ds = \cos \beta$ の関係を使って、 r および s に関する微分を x および y に関する微分として表わすと、式 (10) は

$$\begin{aligned} \frac{n}{K} \frac{\partial h}{\partial t} &= h \cos^2 \alpha \left\{ \cos \theta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial x} \right. \\ &+ h \frac{\partial^2(\cos \theta)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \left. \right\} + \cos \alpha \left\{ \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} \right. \\ &+ h \frac{\partial(\cos \alpha)}{\partial x} \left. \right\} \left\{ \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} \right\} \\ &+ h \cos^2 \beta \left\{ \cos \theta \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial y} \right. \\ &+ h \frac{\partial^2(\cos \theta)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \left. \right\} + \cos \beta \left\{ \cos \beta \frac{\partial h}{\partial y} \right. \\ &+ h \frac{\partial(\cos \beta)}{\partial y} \left. \right\} \left\{ \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial y} \right\} \\ &+ \frac{w}{K} \cos \alpha \cos \beta \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

となる。 x 軸と不透水層面の法線のなす角 θ は

$$\cos \theta = \left[\left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \dots\dots\dots(12)$$

と与えられる。

3. 微分方程式の無次元化と差分式表示

微分方程式を数値解析によって解くとき、得られた解が同種の、できるだけ多くの問題に適用可能なように配慮することが好ましい⁵⁾。そのためには、解析の基礎となる微分方程式を無次元化することが必要である。また、解の安定性の検討にも無次元量を導入する必要がある。いま、解析の対象となる斜面の全水平長さを L であらわし、 $X = x/L$, $Y = y/L$, $H = h/L$, $B = b/L$ および $T = t/(nL/K)$ なる無次元変数を導入する。このとき、2次元斜面での地下水流に関する式 (6) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} &= H \left\{ \cos^3 \sigma \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + 4 \cos^2 \sigma \frac{\partial H}{\partial X} \frac{d(\cos \sigma)}{dX} \right. \\ &+ H \cos^2 \sigma \frac{d^2(\cos \sigma)}{dX^2} + H \cos \sigma \left[\frac{d(\cos \sigma)}{dX} \right]^2 \\ &+ \cos^2 \sigma \frac{d^2 B}{dX^2} + \cos \sigma \frac{dB}{dX} \frac{d(\cos \sigma)}{dX} \left. \right\} \\ &+ \cos^2 \sigma \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) \left(\cos \sigma \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{dB}{dX} \right) + \frac{w}{K} \cos \sigma \\ &\dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

となる。また、3次元斜面での地下水流に関する式 (11) は

$$\frac{\partial H}{\partial T} = H \cos^2 \alpha \left\{ \cos \theta \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial X} \right.$$

$$\begin{aligned} &+ H \frac{\partial^2(\cos \theta)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial X^2} \left. \right\} + \cos \alpha \left\{ \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial X} \right. \\ &+ H \frac{\partial(\cos \alpha)}{\partial X} \left. \right\} \left\{ \cos \theta \frac{\partial H}{\partial X} + H \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial X} \right. \\ &+ \frac{\partial B}{\partial X} \left. \right\} + H \cos^2 \beta \left\{ \cos \theta \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} \right. \\ &+ 2 \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial Y} + H \frac{\partial^2(\cos \theta)}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial Y^2} \left. \right\} \\ &+ \cos \beta \left\{ \cos \beta \frac{\partial H}{\partial Y} + H \frac{\partial(\cos \beta)}{\partial Y} \right\} \left\{ \cos \theta \frac{\partial H}{\partial Y} \right. \\ &+ H \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial Y} + \frac{\partial B}{\partial Y} \left. \right\} + \frac{w}{K} \cos \alpha \cos \beta \\ &\dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

となる。

偏微分方程式を差分式表示する方法には、陽解法と陰解法があることはよく知られている。一般に、線形偏微分方程式の差分化のために陰解法を用いた場合、解の安定性に関して生ずる時間および距離間隔に対する制約はなくなる⁵⁾。しかし、陰解法を非線形の偏微分方程式に適用するとき、非線形項、たとえば $H \cdot \partial^2 H / \partial X^2$ は未知量に関する2次式を生ずることになり、それ以後の解析は不可能になる。また、 $H \cdot \partial^2 H / \partial X^2$ の項について、微分項 $\partial^2 H / \partial X^2$ には未知量を使用し、それにかかる H には既知量を用いて、陰解法を変用することも考えられる。この場合には、解は得られても時間間隔を大きくすると、長時間経過後の解は必ずしも実際の現象を表わすものとはいえない。さらに、解の収束のために必要な繰り返し計算の回数も多くなる。したがって、解の安定・収束の条件から時間間隔および距離間隔に制約を受けても、本研究では陽解法によって数値解析を行うこととした。

差分式表示のために、格子点 $(X, Y, T) = (i\Delta X, j\Delta Y, k\Delta T)$ における無次元水深 H を $H_{i,j}^k$ (2次元のときには H_i^k) であらわし、また、時間の関数ではない θ や B などは $\theta_{i,j}$ や $B_{i,j}$ であらわす (2次元のときには、 σ は σ_i で表わす)。このとき、2次元斜面について、式 (13) から、未知量 H_i^{k+1} は既知量 H_i^k (以下の式では H_i と略記する) を用いて

$$\begin{aligned} H_i^{k+1} &= H_i + R_1 H_i [\cos^3 \sigma_i (H_{i+1} - 2H_i + H_{i-1}) \\ &+ \cos^2 \sigma_i (\cos \sigma_{i+1} - \cos \sigma_{i-1}) (H_{i+1} - H_{i-1}) \\ &+ \cos^2 \sigma_i (\cos \sigma_{i+1} - 2\cos \sigma_i + \cos \sigma_{i-1}) H_i \\ &+ \frac{1}{4} \cos \sigma_i (\cos \sigma_{i+1} - \cos \sigma_{i-1})^2 H_i \\ &+ \cos^2 \sigma_i (B_{i+1} - 2B_i + B_{i-1}) \\ &+ \frac{1}{4} \cos \sigma_i (B_{i+1} - B_{i-1}) (\cos \sigma_{i+1} - \cos \sigma_{i-1})] \\ &+ \frac{1}{4} R_1 \cos^3 \sigma_i (H_{i+1} - H_{i-1})^2 \\ &+ \frac{1}{4} R_1 \cos^2 \sigma_i (H_{i+1} - H_{i-1}) (B_{i+1} - B_{i-1}) \end{aligned}$$

$$+\frac{w}{K} \Delta T \cos \sigma_i \dots\dots\dots(15)$$

で与えられる。ここで、 $R_1 = \Delta T / (\Delta X)^2$ である。さらに、 H_i^k は斜面の法線に沿って測った水深であるので、地下水面の空間座標は、 $X_i - H_i^k \sin \sigma_i$ および $B_i + H_i^k \cos \sigma_i$ であたえられる。

3次元斜面について、式(14)から、未知量 $H_{i,j}^{k+1}$ は既知量 $H_{i,j}^k$ (以下の式では、 $H_{i,j}$ と略記する) を用いて

$$\begin{aligned} H_{i,j}^{k+1} = & H_{i,j} + R_1 H_{i,j} \cos^2 \alpha_{i,j} [\cos \theta_{i,j} (H_{i+1,j} \\ & - 2H_{i,j} + H_{i-1,j}) \\ & + \frac{1}{2} (\cos \theta_{i+1,j} - \cos \theta_{i-1,j}) (H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) \\ & + (\cos \theta_{i+1,j} - 2 \cos \theta_{i,j} + \cos \theta_{i-1,j}) H_{i,j} \\ & + (B_{i+1,j} - 2B_{i,j} + B_{i-1,j})] \\ & + \frac{1}{4} R_1 \cos \alpha_{i,j} [\cos \alpha_{i,j} (H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) \\ & + (\cos \alpha_{i+1,j} - \cos \alpha_{i-1,j}) H_{i,j}] \\ & \times [\cos \alpha_{i,j} (H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) \\ & + (\cos \theta_{i+1,j} - \cos \theta_{i-1,j}) H_{i,j} \\ & + (B_{i+1,j} - B_{i-1,j})] \\ & + R_2 H_{i,j} \cos^2 \beta_{i,j} [\cos \theta_{i,j} (H_{i+1,j} - 2H_{i,j} \\ & + H_{i,j-1}) + \frac{1}{2} (\cos \theta_{i,j+1} - \cos \theta_{i,j-1}) \\ & \times (H_{i,j+1} - H_{i,j-1}) + (\cos \theta_{i,j+1} - 2 \cos \theta_{i,j} \\ & + \cos \theta_{i,j-1}) H_{i,j} + (B_{i,j+1} - 2B_{i,j} + B_{i,j-1})] \\ & + \frac{1}{4} R_2 \cos \beta_{i,j} [\cos \beta_{i,j} (H_{i,j+1} - H_{i,j-1}) \\ & + (\cos \beta_{i,j+1} - \cos \beta_{i,j-1}) H_{i,j}] \\ & \times [\cos \theta_{i,j} (H_{i,j+1} - H_{i,j-1}) \\ & + (\cos \theta_{i,j+1} - \cos \theta_{i,j-1}) H_{i,j} \\ & + (B_{i,j+1} - B_{i,j-1})] + \frac{w}{K} \Delta T \cos \alpha_{i,j} \cos \beta_{i,j} \\ & \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $R_1 = \Delta T / (\Delta X)^2$ および $R_2 = \Delta T / (\Delta Y)^2$ である。また、 $\cos \theta_{i,j}$ は

$$\cos \theta_{i,j} = 1 / \sqrt{e_{i,j}^2 + f_{i,j}^2 + 1}$$

によって与えられる。ここで、 $e_{i,j} = (B_{i+1,j} - B_{i-1,j}) / 2 \Delta X$ および $f_{i,j} = (B_{i,j+1} - B_{i,j-1}) / 2 \Delta Y$ である。さらに、地下水位は不透水層面にたてた法線に沿って測るので、水面の空間座標 (X, Y, Z) は、それぞれ、 $X_{i,j} - H_{i,j} \cos \xi_{i,j}$ 、 $Y_{i,j} - H_{i,j} \cos \eta_{i,j}$ および $B_{i,j} + H_{i,j} \cos \theta_{i,j}$ で与えられる。ここで、

$$\cos \xi_{i,j} = e_{i,j} / \sqrt{e_{i,j}^2 + f_{i,j}^2 + 1}$$

および $\cos \eta_{i,j} = f_{i,j} / \sqrt{e_{i,j}^2 + f_{i,j}^2 + 1}$ である。

以上のように基礎微分方程式(6)あるいは(13)は差分化される。ところで、式(6)および(13)は放物型の非線形偏微分方程式であり、これを陽解法によって差分化して解く場合、解の安定・収束に関する条件について考慮する必要がある。非線形の偏微分方程式から導かれ

る差分式の数値解析において、解の安定・収束条件はまだ明確にされていない。しかし、簡単な境界条件をもつ放物型の線形の偏微分方程式から導かれる差分方程式は、 $R_1 = \Delta T / (\Delta X)^2 \leq 1/2$ のときその解が安定であることが知られている⁶⁾。淡塩水境界面の変形に関して、非線形の基礎方程式を数値解析によって解くとき、上記の安定条件を適用して解の安定が得られている結果⁷⁾もあるので、ここでも線形方程式の場合の安定・収束条件を一つの目安として採用する。3次元斜面の場合についても、基礎方程式は非線形であるが、その解の安定・収束条件として線形方程式の条件⁶⁾を採用することにする。すなわち、 $\Delta T \{1/(\Delta X)^2 + 1/(\Delta Y)^2\} \leq 1/2$ が適用できるものとする。

4. 数値計算例

数値計算を行うのに採用した斜面を図-4に示す。図において、点Aは斜面の頂上であり、点Bより下流の斜面は、その勾配が点Bにおける勾配と同じである無限斜面とする。この斜面について、降雨などの浸透によって形成された地下水面が、B点の上流に存在する遷急点および遷緩点付近で上昇あるいは下降する過程を解析する。表土層の透水係数(K)は 10^{-3} cm/s であるとし、有効空隙率(n)は0.3とした。浸透量wは10 mm/hであり、この浸透が24時間継続するものとした。地下水面が満たす境界条件は、斜面の頂点Aで $\partial h / \partial x = 0$ である。また、下流端Bでは、それより下流での斜面勾配が一定である無限斜面を想定しているの、浸透継続中は地下水面が単位時間あたり $(w/n) \cos \sigma_B$ (ここで σ_B はB点での σ の値を表わす) で上昇し、浸透停止後はそのまま地下水位が変動しないものとする。このB点での境界条件が妥当であるのは、点Bより上流の水位変化がB地点まで達しない場合だけである。つまり、浸透停止後、点Bより上流の水位変化がB点におよんだとき、上記のB点での境界条件のもとで計算を続行しても無意味となる。次に、初期条件については、浸透による地下水面の発生が解析の対象となる全斜面にわたって同時に起こるものと仮定する。すなわち、表土層の厚さがほぼ

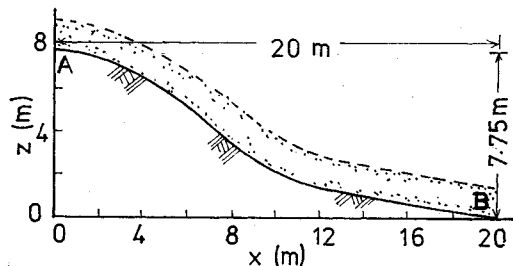


図-4 2次元斜面

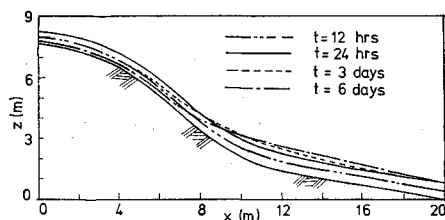


図-5 地下水位の変動 (2次元斜面)

一定であり、浸透量に大きな差がないものとする。

数値計算結果を図-5 に示す。数値計算は無次元式によって行ったが、計算結果はその具体的な把握のために次元をもつ量について表示した。計算では $\Delta X=0.025$ ($\Delta x=50$ cm) とし、安定条件を考慮して、 $\Delta T \leq 3.125 \times 10^{-4}$ 、すなわち、 $\Delta t \leq 3.125$ 分を得る。したがって、 $\Delta t=3$ 分を採用した。

浸透継続中 ($0 \leq t \leq 24$ 時)、地下水面は不透水層にほぼ平行に上昇するが、その最大値は、($t=24$ 時で) 83 cm, 最小値は 63 cm である。浸透が停止すると斜面の頂上から急傾斜部にかけて水面の降下が始まり、一方、遷緩点付近では、地下水の貯留による水面の上昇が始まる。浸透停止後 2 日 ($t=3$ 日) たつと、斜面上流部では浸透停止時 ($t=1$ 日) の水深のほぼ 1/2 の水深となる。浸透停止後 5 日 ($t=6$ 日) たつと、頂上から遷緩点を経て急斜面となる付近では水深は小さく、ほぼ 10~15 cm である。一方、遷緩点のやや上流から緩斜面部にわたって地下水の貯留が著しい。したがって、表土が砂質土であれば、遷緩点付近の地下水位の上昇による piping を引金に、それより上流側の急傾斜部の崩壊が生ずることも考えられる。また、このような斜面に盛土を行う場合、遷緩点付近に排水施設を設けることが必要となることわかる。

3次元斜面に関する数値解析のために採用した斜面を図-6 に示す。前述のように、この斜面は 0 次谷と称さ

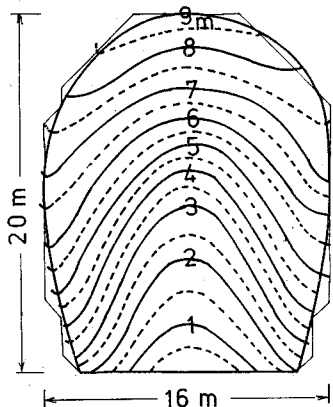


図-6 3次元斜面

れる小流域である。解析にあたって、透水係数 $K=10^{-3}$ cm/s, 有効空隙率 $n=0.2$, 浸透量 $w=10$ mm/h とし、浸透継続時間は 6 時間とした。流域界における境界条件は、流域界の法線方向 (l で示す) への水面の微分 $\partial h / \partial l=0$ を満たすものとした。すなわち、流域界となる尾

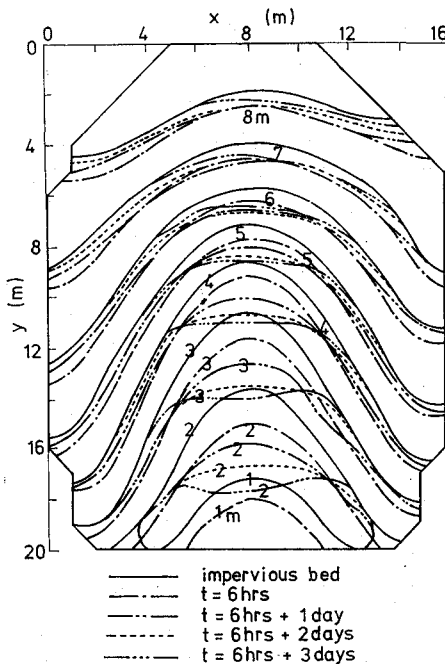


図-7 等水位線図 (3次元斜面)

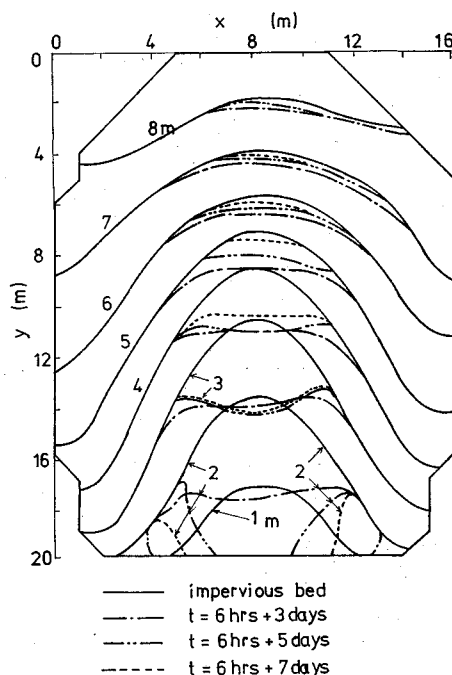


図-8 等水位線図 (3次元斜面)

根部で地下水は分割されるものとした。斜面の下流端では擁壁が存在し、地下水はここに貯留されるものと仮定した。初期条件は、2次元斜面の場合と同様に、地下水面の発生が全流域にわたって同時に起こるものと仮定する。数値解析のために設定した流域界を図-6に細線で示す。計算では $\Delta X=0.05$ ($\Delta x=1\text{ m}$) および $\Delta Y=0.05$ ($\Delta y=1\text{ m}$) とし、安定・収束条件を考慮して、 $\Delta T \leq 6.25 \times 10^{-4}$ ($\Delta t \leq 4.17$ 分) を得る。ゆえに、 $\Delta t=3$ 分を採用した。

図-7 および図-8 に不透水層の等高線および降雨浸透停止後7日間の等水位線を示す。浸透停止直後 ($t=6$ 時) では、等水位線と不透水層の等高線との間隔はほぼ一定であり、地下水位の上昇が全域にわたってほぼ一定であることがわかる。浸透停止後1日たつと (すなわち、 $t=6$ 時+1日)、尾根部での水位低下が顕著となり、谷部では水位の上昇が大きいことが観察される。 $t=6$ 時+2日および $t=6$ 時+3日では、尾根部付近の地下水位は消失し、谷部の下流では地下水面の貯留が著しい。 $t=6$ 時+5日では、尾根部だけでなく、谷部の上流でも地下水位の低下が始まる。一方、谷部の下流では水位の上昇が続き、特に、下流端では左右両尾根からの流入がない反面、主谷上流からの流入が続くために、中央部の水位がやや高くなることがわかる。 $t=6$ 時+7日では、3 mの等水位線を境にして、上流側では水位低下があり、下流側では水位上昇が継続する。下流端では、中央部に貯留された水が左右両翼に広がってゆく。 $t=6$ 時+3日お

よび6時+7日の、谷部中心線 ($x=8\text{ m}$) に沿っての水位縦断面図を図-9に示し、水位横断面図を図-10に示す。これらの図からも、尾根部から谷部への横方向の流入が比較的早く終了し、下流端付近では谷部上流からの流入によって谷部中央の水位が両翼のそれよりやや高くなることが認められる。

5. 模型実験による検証

斜面内での非定常な地下水流を取り扱うにあたって、不透水層の勾配の変化を考慮して得られた偏微分方程式は、上述のように、非線形である。これを数値計算によって解くのに採用した手法の妥当性、piezometric headの分布についての仮定の妥当性および数値解の正当性を検討するために、2次元斜面の模型を用いて実験を行った。実験の一つは、マサ土の表層をもつ斜面を用いて行ったもの (以下、砂モデル実験という) であり、他の一つは、微小なガラス球からなる斜面に着色したグリセリンを浸透流下させて行ったもの (以下、ガラス球模型実験という) である。

砂モデル実験の装置は、遷緩部および遷急部をもつ水路と降雨装置とからなっている。図-11に水路を示す。水路内にマサ土をつめ、上流端は不透水壁、下流端は一定の水位を保つように設置した。水路の両側壁は透明アクリライト板であり、水位は側壁にそって配置した片側

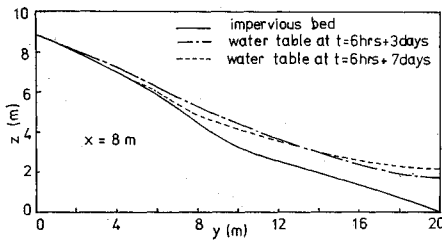


図-9 水位縦断面図 (3次元斜面)

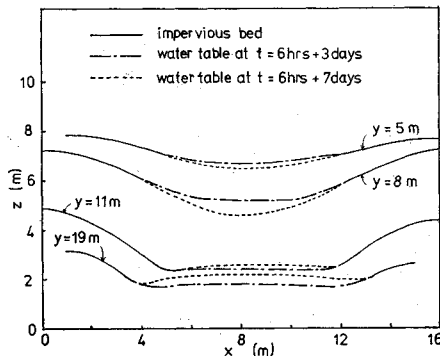


図-10 水位横断面図 (3次元斜面)

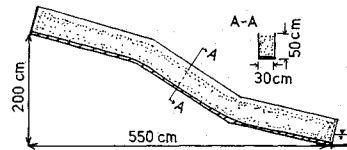


図-11 砂モデル実験水路 (2次元)

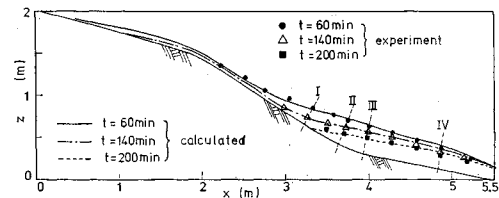


図-12 地下水位 (砂モデル実験)

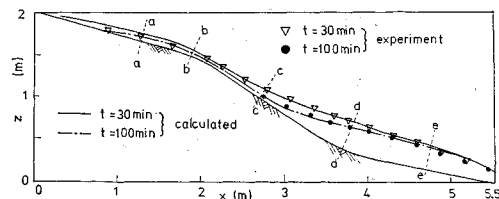


図-13 地下水位 (砂モデル実験)

20 本, 計 40 本の水位管を用いて測定した。

砂モデル実験の結果および模型斜面に式 (13) を適用した数値計算の結果を 図-12 および 13 に示す。数値計算では, $\Delta x=20$ cm および $\Delta t=2$ 秒とした。また, $K/n=0.077$ cm/s とした。透水係数 K は定水位透水試験の結果 $0.0126\sim 0.0138$ cm/s の値を得た。一方, 有効空隙率 n は次のようにして測定した。まず実験に用いたマサ土を実験時と同じ状態に柱状の容器内で締め固める。その後, 上部から水を浸透させ, 底面から排水し, 排水が終了したときに試料の重量を測る。次に, 試料の底面からの流出を止め, 試料を飽和状態にしてその重量を測定する。これによって試料を飽和するに要した水量がわかり, 有効空隙率を概算することができる。この方法による n の値は $0.07\sim 0.20$ となった。数値計算に採用した K/n の値は, 透水係数 $K=0.013$ cm/s のとき $n=0.17$ を与える。この n の値は試験結果の範囲内にあり, ほぼ妥当と考えられる。初期水位は, 実験斜面の全体にわたって十分な水位上昇が生じて後の水位を用いたので, 計算では $w=0$ とした。

数値計算の結果と実験結果を比較するまえに, まず, 実際の現象と式 (13) の各項との関連を把握する手がかりとして各項の order を調べる。一般に, 地下水流の基礎方程式において $H(\partial^2 H/\partial X^2)$ の項が現象の把握にもっとも密接に関係している。したがって, ここでは $\cos^2 \sigma H(\partial^2 H/\partial X^2)$ の項を基準として, 図-13 に示す断面 a~e について各項の order を比較すると表-1 のよう

表-1 式 (13) の各項の order

時刻	断面	項							
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
30 分	a	1	10^{-2}	10^{-1}	10^{-4}	1	10^{-1}	10^{-2}	1
	b	1	10^{-1}	10^{-1}	10^{-2}	1	10^{-1}	10^{-1}	1
	c	1	10^{-1}	1	10^{-3}	1	10^{-1}	1	10
	d	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-2}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-1}
	e	1	10^{-2}	10^{-1}	10^{-4}	1	10^{-2}	10^{-2}	10^{-1}
60 分	a	1	10^{-2}	10^{-1}	10^{-4}	1	10^{-2}	10^{-1}	1
	b	1	10^{-1}	10^{-1}	10^{-2}	1	10^{-1}	10^{-1}	1
	c	1	10^{-1}	10^{-1}	10^{-3}	1	10^{-1}	1	10
	d	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-2}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-1}
	e	1	10^{-2}	10^{-1}	10^{-4}	1	10^{-2}	10^{-2}	10^{-1}
100 分	c	1	10^{-1}	10^{-1}	10^{-4}	1	10^{-1}	1	10
	d	1	1	10^{-2}	10^{-1}	1	1	10^{-1}	1
	e	1	10^{-2}	1	10^{-3}	1	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}
200 分	d	1	1	10^{-2}	10^{-2}	1	10^{-1}	1	1
	e	1	10^{-3}	10^{-1}	10^{-4}	1	10^{-2}	10^{-2}	10^{-1}
I	$\cos^3 \sigma \cdot H \frac{\partial^2 H}{\partial X^2}$				V	$\cos^2 \sigma \cdot H \frac{\partial^2 B}{\partial X^2}$			
II	$4 \cos^2 \sigma \cdot H \frac{\partial H}{\partial X} \frac{d(\cos \sigma)}{dX}$				VI	$\cos \sigma \cdot H \frac{dB}{dX} \frac{d(\cos \sigma)}{dX}$			
III	$\cos^2 \sigma \cdot H^2 \frac{d^2(\cos \sigma)}{dX^2}$				VII	$\cos^3 \sigma \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)^3$			
IV	$\cos \sigma \cdot H^2 \left[\frac{d(\cos \sigma)}{dX} \right]^2$				VIII	$\cos^2 \sigma \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) \left(\frac{dB}{dX} \right)$			

表-2 実験水位と計算水位の比較 (砂モデル実験)

断面	時刻 (分)	① 実験水位 (cm)	② 計算水位 (cm)	$\frac{②-①}{①} \times 100$
				(%)
I	30	26.7	26.9	0.8
	60	22.7	22.6	-0.4
	100	16.7	16.5	-1.2
	140	11.2	10.3	-8.0
II	30	34.9	35.1	0.6
	60	32.2	32.1	-0.3
	100	27.9	27.0	-3.0
	140	23.9	21.6	-9.6
	200	17.6	16.3	-7.4
III	30	34.8	36.5	4.9
	60	32.6	34.7	6.4
	100	29.0	30.9	6.6
	140	25.8	26.5	2.7
	200	20.8	19.3	-4.8
IV	30	25.7	27.8	8.2
	60	24.8	28.1	13.3
	100	23.0	26.7	16.1
	140	21.3	24.5	15.0
	200	18.4	20.7	13.0

になる。これによれば, 時間および場所に関係なく無視できる項は IV 項である。V 項と VIII 項は不透水層の勾配に関する項であり, ここでは無視できない項であることがわかる。その他の項は, 時間あるいは場所によって order が変わるが, 上記の基準項より 1 order 小さいだけのときがあり, 必ずしも無視してしまふことはできない。したがって, 本研究では基礎式を簡易化して解析解を導こうとするものではないので, すべての項について数値計算を行う。

次に, 図-12 に示した断面 I~IV における実験水位, 計算水位および両者の差を表-2 に示す。遷延点付近では実験結果と計算結果とはかなりよく一致している。一方, 下流部では両者に 15% 前後の差が生じている。実験値と計算値の差には, 計算誤差のほかに, マサ土の締め固めの不均一による誤差, あるいは, 計算では下流端の水位と浸出線は一致するとしているが, 実際には両者が一致しないために生ずる差などが含まれていると考えられる。したがって, 実験によって計算手法などの検証を行うためには, さらに均一な斜面を用いて実験する必要がある。ただ, 上記の砂モデルによる実験結果と計算結果とが表-2 に示された程度の差であることから, 両結果は全般的に一致していると考えられ, 計算手法はほぼ妥当であると判断される。

砂モデル実験では, 前述のように土の締め固めの不均一によって等方等質の条件を満たすことが困難である。それゆえ, 微小なガラス球 (径 4 mm) からなる斜面にグリセリン (20°C で 315 poise) を浸透・流下させて実験を行った。図-14 に実験に用いた模型斜面と降雨装置を示す。浸透過程では, グリセリンを降雨装置の底面に

5 cm 間隔で配置された径 2.5 mm の管から全斜面にわたって滴下し、浸透が一樣になるように配慮した。下流端の水位は一定とした。このガラス球モデルは、透水性を均一にできる、空隙が大きいいため浸透・排水過程を問わず有効空隙率はほぼ一定となる、連続した水面形を観察できる、などの利点をもっている。

実験結果を 図-15 に示す。この実験では、下流端水位は 6.2 cm である。底面勾配の急な区間では水位降下が著しく、上流の緩勾配区間から急勾配区間へ流入する水量が急勾配区間から流出する水量より小さいことを示している。図-16 および 17 に、式 (13) に基づく数値

計算の結果を示す。これらの図には、断面 c (図-15 参照)より下流の斜面における水位が示されている。また、図には、不透水層の勾配が小さい場合に採用される近似式を用いて行った数値計算の結果も示してある。この近似式は¹⁾

$$n \frac{\partial h'}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h' \left(\frac{\partial h'}{\partial x} + i \right) \right\} \dots \dots \dots (18)$$

であり、ここで、 h' は鉛直線に沿って測った水深であり、 i は不透水層の勾配である。式 (18) の数値計算においても微分方程式は非線形のまま取り扱った。

数値計算には、斜面からの浸出量および水面形を考慮して、 $K/n=0.1075$ cm/s を使い、 $dt=6$ 秒および $dx=5$ cm を採用した。初期水位として、浸透停止後斜面内に生じた水面形を用いた。したがって、式 (13) において $w=0$ として計算した。

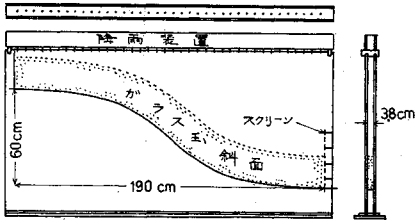


図-14 ガラス球模型斜面の実験装置 (2次元)

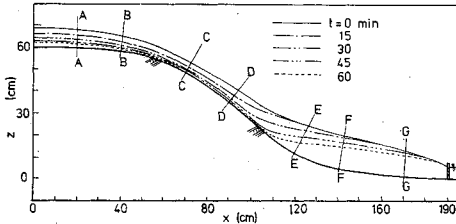


図-15 地下水位 (ガラス球模型の実験結果)

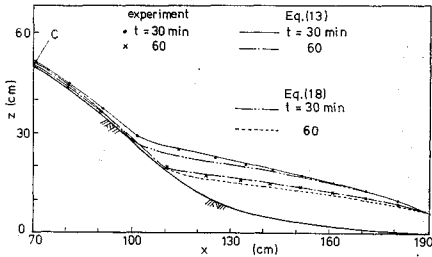


図-16 地下水位 (ガラス球斜面の数値計算結果)

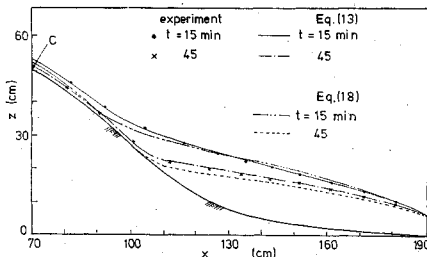


図-17 地下水位 (ガラス球斜面の数値計算結果)

表-3 実験水位と計算水位の比較 (ガラス球模型)

断面	時刻 (分)	① 実験水位 (cm)	② 計算水位 (cm)	$\frac{②-①}{①} \times 100$ (%)
A	10	6.8	6.4	-5.9
	20	5.4	5.1	-5.6
	30	4.4	4.2	-4.5
	40	3.5	3.4	-2.9
	60	2.3	2.4	4.3
	80	1.8	1.8	0
B	10	4.8	4.8	0
	20	3.6	3.6	0
	30	2.8	2.8	0
	40	2.3	2.3	0
	60	1.4	1.4	0
C	10	3.3	3.3	0
	20	2.3	2.3	0
	30	1.6	1.6	0
	40	1.1	1.2	9.1
D	10	4.8	4.3	-10.4
	20	2.8	2.4	-14.3
	30	1.8	1.7	-5.6
	40	1.0	1.1	10.0
E	10	14.3	14.8	3.5
	20	13.3	13.8	3.8
	30	11.6	12.0	3.4
	40	9.7	10.1	4.1
	60	5.5	6.0	9.1
	80	2.8	2.9	3.6
F	10	16.0	16.0	0
	20	15.7	15.7	0
	30	14.5	14.7	1.4
	40	13.1	13.4	2.3
	60	10.3	10.4	1.0
	80	8.1	8.1	0
G	10	11.6	11.9	2.6
	20	11.6	11.9	2.6
	30	11.4	11.6	1.8
	40	10.5	10.9	3.8
	60	9.0	9.3	3.3
	80	7.7	8.0	3.9

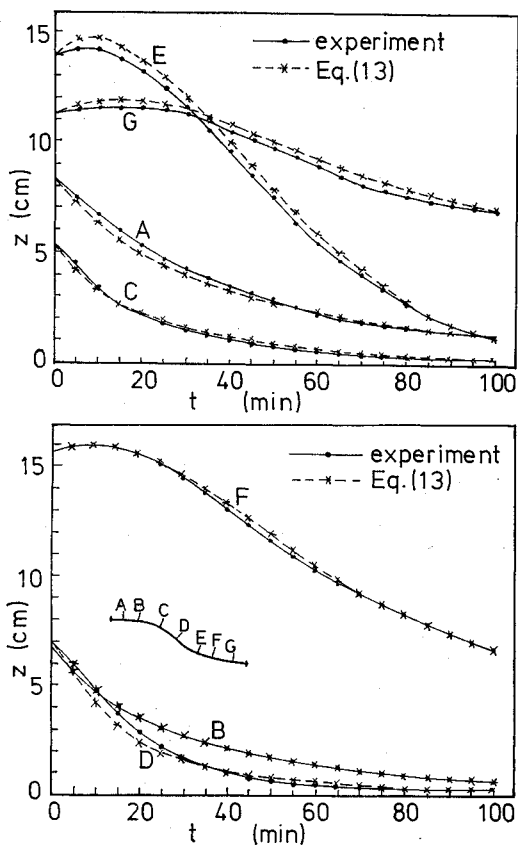


図-18 実験水位と計算水位の比較 (ガラス球斜面)

式 (13) に基づく計算結果は実験結果とよく一致しているようである。実験結果と計算結果 (式 (13) に基づく計算) をさらに詳細に比較したものが表-3 および図-18 である。表-3 は、図-15 に示された断面 A~G における実験水位、計算水位および両者の差を示したものであり、図-18 は実験水位と計算水位の時間変化を各断面について示したものである。急勾配区間の断面 D においては、計算値と実験値の差は 10% ほどであるが、その他の断面においては、両者の差はほとんど 5% 以下である。特に、断面 B, C および F は実験値と計算値はよく一致している。一方、近似式 (18) に基づく数値計算の結果では、遷緩点付近での水位が実験結果と一致していない。これは急勾配区間においても piezometric head が鉛直線に沿って一定であると仮定しているためであると考えられる。したがって、急勾配部の斜面長が長くなり、勾配や勾配の変化が無視できなくなると、式 (18) による計算結果と実際の水位とは、ますます一致しなくなると考えられる。そのため、簡易であっても、式 (18) に基づいて 3 次元斜面内の浸透流を計算するのは不適當であろう。

6. 結 論

不透水層の勾配が一定ではない 2 次元および 3 次元の斜面を対象として、等方等質な透水性表層内の非定常な地下水流について数値解析を行った。

数値解析の基礎となった偏微分方程式は、piezometric head が不透水層面にたてた法線に沿って一定であると仮定して導かれたものである。この方程式は非線形の放物型の偏微分方程式となる。数値計算にあたって、基礎方程式が非線形であることを考慮して、ここでは差分法の陽解法によって計算を行った。このとき、解の収束・安定条件の目安として、線形の放物型偏微分方程式についての収束・安定条件を利用した。その結果、本研究における数値計算では、解の発散は生じなかった。上記の piezometric head の分布に関する仮定、基礎微分方程式および計算手法を 2 次元および 3 次元の斜面に適用して行った数値計算の例では、それぞれ妥当と考えられる結果が得られた。

さらに、piezometric head の分布に関する仮定の妥当性、偏微分方程式とその数値解析手法の妥当性を調べるために、2 次元斜面について砂モデル実験およびガラス球模型実験を行った。これらの実験斜面に数値計算を適用した結果と実験の結果はかなりよく一致しており、仮定および計算手法が、勾配の一定でない 2 次元斜面内の地下水流の解析に有効であると考えられる。また、2 次元斜面での考え方および解析手法を拡張して適用した 3 次元斜面内の非定常な地下水流の解析手法も有効であり、現象の把握の一助となると考えられる。

最後に、本研究の遂行にあたって、たえず有益なご助言をいただいた 田中 茂神戸大学教授、実験に協力していただいた 神戸大学工学部四回生、東野 一、青木 健郎の両氏に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Bear, J.: Dynamics of fluids in porous media, American Elsevier Publishing Company, Inc., 1972.
- 2) 田中 茂: 自然斜面および宅造斜面の安定性について, 土と基礎, Vol. 20, No. 2, pp.5~12, 1972.
- 3) 福田 護・西田一彦・澤 孝平: Cとφを考える (6. マサ土), 土と基礎, Vol. 23, No. 5, pp. 77~84, 1975.
- 4) Chow, V.T.: Open-channel hydraulics, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.
- 5) Smith, G.D.: Numerical solution of partial differential equations, Oxford University Press, 1965.
- 6) Richtmyer, R.D. & K.W. Morton: Difference methods for initial-value problems, Interscience Publishers, 1967.
- 7) 川谷 健: 海岸帯水層内の地下水水位と淡塩水境界面に関する数値解析, 土木学会論文報告集, No. 238, pp. 89~98, 1975.