

多次元非定常確率過程の相互スペクトルと シミュレーション理論

CROSS SPECTRA OF MULTI-DIMENSIONAL RANDOM PROCESSES AND SIMULATION THEORY

星 谷 勝*
By Masaru HOSHIYA

1. ま え が き

時間領域のみならず周波数領域においても非定常となる平均値 0 の多次元確率過程 $x_i(t)$; $i=1, 2, \dots, m$ に対して, 相関特性を表わす相互スペクトルを提案する. この相互スペクトルの特性を検討し, その有用性を示す.

次に, この相互スペクトル特性を満足する多次元確率過程のシミュレーション理論を開発する.

最後に, 多次元確率過程の地震工学分野への応用について言及する.

2. 相互スペクトル

Mark の physical spectrum¹⁾ の考え方に従い, その複数確率過程への拡張として, 平均値 0 の多次元確率過程 $x_i(t)$ の相互スペクトル (cross spectrum) を次式で定義する.

すなわち,

$$A_i(\omega, t; W) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u)x_i(u)e^{-i\omega u} du \quad \dots\dots\dots(1)$$

として, 相互スペクトルは

$$S_{ij}(\omega, t; W) = E \left[\frac{1}{2\pi} A_i(\omega, t; W) \times A_j^*(\omega, t; W) \right]; \begin{matrix} -\infty < \omega < \infty \\ -\infty < t < \infty \end{matrix} \quad \dots\dots(2)$$

ただし $i, j=1, 2, \dots, m$

ここで, $W(t)$ はウィンドウ関数で, $t=0$ の近傍で正値をとり, この近傍の外では $|W(t)|$ は非常に小さいとする. さらに, $W(t)$ は次式を満足するものとする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(t) dt = 1 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ウィンドウ関数の特性に関しては文献 2), 3) を参照

されたい. たとえばガウス型ウィンドウ関数は

$$W(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{T} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\pi t^2}{T^2} \right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

で与えられる.

なお, 式 (2) においては $A_j^*(\omega, t; W)$ は $A_j(\omega, t; W)$ の共役複素関数である.

さて, 式 (2) で定義した相互スペクトルを説明するために式 (1) を用いて式 (2) を次のように変形してみる.

$$S_{ij}(\omega, t; W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1)W(t-u_2) \times E[x_i(u_1)x_j(u_2)]e^{-i\omega(u_1-u_2)} du_1 du_2 \quad \dots\dots(5)$$

ここで,

$$u_1 - u_2 = \tau, \quad (u_1 + u_2)/2 = u$$

と変数変換を行えば, ヤコビアン $\partial(u_1, u_2)/\partial(\tau, u) = 1$ であるから式 (5) は次のように変形される.

$$S_{ij}(\omega, t; W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} E[W\{t-(u+\tau/2)\} \times x_i(u+\tau/2) \cdot W\{t-(u-\tau/2)\} x_j(u-\tau/2)] du \right\} e^{-i\omega\tau} d\tau$$

そこで,

$$\left. \begin{aligned} f_i(t, u) &= W(t-u)x_i(u) \\ f_j(t, u) &= W(t-u)x_j(u) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

と置けば, 上式は

$$S_{ij}(\omega, t; W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} E[f_i(t, u+\tau/2) \times f_j(t, u-\tau/2)] du \right\} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \dots\dots(7)$$

式 (6), (7) より, 相互スペクトルは次のように解釈される. まず, $x_i(u)$ および $x_j(u)$ をウィンドウ関数により重み修正をほどこして, 時間 t の近傍でとりだす. これがそれぞれ $f_i(t, u)$, $f_j(t, u)$ である. 次に, $f_i(t, u)$ および $f_j(t, u)$ の相互相関関数 $E[f_i(t, u+\tau/2)f_j(t, u-\tau/2)]$ を求め, それを u に関して全積分する. これが $\{ \}$ 内の量

$$\int_{-\infty}^{\infty} E[f_i(t, u+\tau/2)f_j(t, u-\tau/2)] du$$

* 正会員 工博 武蔵工業大学助教授 工学部土木工学科

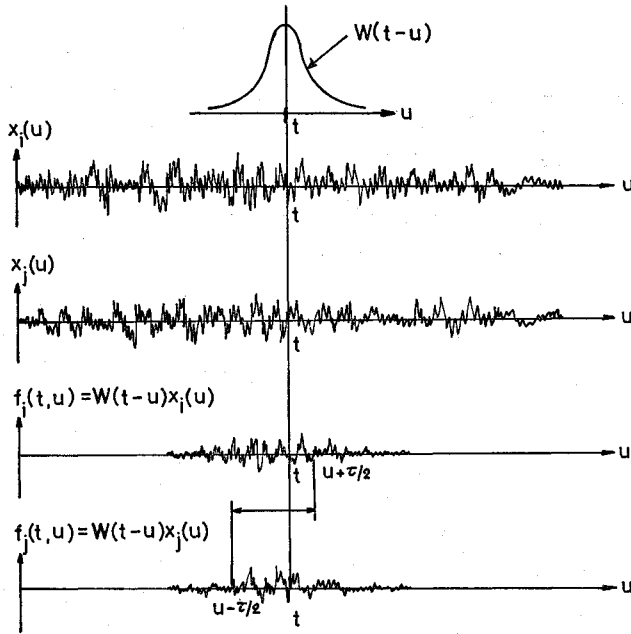


図-1

である (図-1)。

換言すれば、この量は一般化した相互相関関数である $E[x_i(u+\tau/2)x_j(u-\tau/2)]$ を時間 t の近傍で求め、時間方向 u で平均化したものといえる。

このようにして求めた平均した相互相関関数をフーリエ変換したものを相互スペクトル $S_{ij}(\omega, t; W)$ として提案したことになる。

したがって、時間 t を移動させることによって、 $x_i(u+\tau/2)$ と $x_j(u-\tau/2)$ の相関性がどのように変化するかを、 $S_{ij}(\omega, t; W)$ の形状より検討することが可能となる。この意味から、十分に納得できる相互スペクトルといえる。

もし $i=j$ ならば、式 (2) で定義した相互スペクトルは physical spectrum^{1),2)} となり、physical spectrum の満足すべきすべての条件をそなえたものとなる。

もし、 $x_i(u)$ が定常確率過程であるならば、式 (7) の { } 内は τ のみの関数となり、 $S_{ij}(\omega, t; W)$ は定常確率過程の場合の相互スペクトル定義に還元される。

さて、一般に $S_{ij}(\omega, t; W)$ は複素関数である。実部と虚部をそれぞれ $C_{ij}(\omega, t; W)$ 、 $Q_{ij}(\omega, t; W)$ として次のように表わしてみる。

$$S_{ij}(\omega, t; W) = C_{ij}(\omega, t; W) + iQ_{ij}(\omega, t; W) \quad \dots\dots\dots(8\cdot a)$$

$$= |S_{ij}(\omega, t; W)| \exp\{i\theta_{ij}(\omega, t; W)\} \quad \dots\dots\dots(8\cdot b)$$

ここで

$$\theta_{ij}(\omega, t; W) = \tan^{-1} \left\{ \frac{Q_{ij}(\omega, t; W)}{C_{ij}(\omega, t; W)} \right\} \quad \dots\dots\dots(8\cdot c)$$

式 (5) より、次の諸性質が成り立つことは容易に証明できる。

$$\left. \begin{aligned} C_{ij}(\omega, t; W) &= C_{ji}(-\omega, t; W) \\ Q_{ij}(\omega, t; W) &= -Q_{ji}(-\omega, t; W) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{ij}(\omega, t; W) &= C_{ji}(\omega, t; W) \\ Q_{ij}(\omega, t; W) &= -Q_{ji}(\omega, t; W) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

したがって、式 (9) より

$$S_{ij}(\omega, t; W) = S_{ij}^*(-\omega, t; W) \quad \dots\dots\dots(11)$$

式 (10) より

$$S_{ij}(\omega, t; W) = S_{ji}^*(\omega, t; W) \quad \dots\dots\dots(12)$$

となる。

式 (9)~(12) の関係は定常確率過程に対して成立する条件と同一である。

次に、 $S_{ij}(\omega, t; W)$ の特性を調べるために次の不等式を検討する。

任意実数 a および b に対して、次の不等式は

常に成立する。

$$E\{[ax_i(u) + bx_j(u)]^2\} \geq 0$$

これを展開すれば

$$a^2 E[x_i^2(u)] + 2ab E[x_i(u)x_j(u)] + b^2 E[x_j^2(u)] \geq 0$$

したがって、判別式より次の関係を得る。

$$|E[x_i(u)x_j(u)]|^2 \leq E[x_i^2(u)]E[x_j^2(u)] \quad \dots\dots\dots(13)$$

ところで、式 (1) は $W(t-u)x_i(u)$ のフーリエ変換であるから、逆変換より

$$W(t-u)x_i(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_i(\omega, t; W) e^{i\omega u} d\omega \quad \dots\dots\dots(14)$$

が成り立つ。

同様にして

$$W(t-u)x_j(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_j(\omega, t; W) e^{i\omega u} d\omega \quad \dots\dots\dots(15)$$

式 (14) より

$$\begin{aligned} W^2(t-u)x_i^2(u) &= W^2(t-u)x_i(u)x_i^*(u) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_i(\omega_1, t; W) \\ &\quad \times A_i^*(\omega_2, t; W) e^{i(\omega_1 - \omega_2)u} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned}$$

$$\therefore W^2(t-u)E[x_i^2(u)]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[A_i(\omega_1, t; W) \\ &\quad \times A_i^*(\omega_2, t; W)] e^{i(\omega_1 - \omega_2)u} d\omega_1 d\omega_2 \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

同様に式 (15) より

$$W^2(t-u)E[x_j^2(u)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[A_j(\omega_1, t; W) \times A_j^*(\omega_2, t; W)] e^{i(\omega_1 - \omega_2)u} d\omega_1 d\omega_2 \dots (17)$$

式 (14), (15) より

$$W^2(t-u)E[x_i(u)x_j(u)] = W^2(t-u)E[x_i(u)x_j^*(u)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[A_i(\omega_1, t; W) \times A_j^*(\omega_2, t; W)] e^{i(\omega_1 - \omega_2)u} d\omega_1 d\omega_2 \dots (18)$$

式 (16)~(18) の関係を用いれば, 式 (13) より

$$\begin{aligned} & \iiint_{-\infty}^{\infty} E[A_i(\omega_1, t; W) A_j^*(\omega_2, t; W)] \\ & \times E[A_i^*(\omega_1', t; W) A_j(\omega_2', t; W)] e^{i(\omega_1 - \omega_2)u} \\ & \times e^{-i(\omega_1' - \omega_2')u} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_1' d\omega_2' \\ & \leq \iiint_{-\infty}^{\infty} E[A_i(\omega_1, t; W) A_i^*(\omega_2, t; W)] \\ & \times E[A_j(\omega_1', t; W) A_j^*(\omega_2', t; W)] e^{i(\omega_1 - \omega_2)u} \\ & \times e^{i(\omega_1' - \omega_2')u} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_1' d\omega_2' \end{aligned}$$

上式は u の如何なるときでも成立するから, $u=0$ とすれば

$$\begin{aligned} & \iiint_{-\infty}^{\infty} E[A_i(\omega_1, t; W) A_j^*(\omega_2, t; W)] \\ & \times E[A_i^*(\omega_1', t; W) A_j(\omega_2', t; W)] d\omega_1 d\omega_2 d\omega_1' d\omega_2' \\ & \leq \iiint_{-\infty}^{\infty} E[A_i(\omega_1, t; W) A_i^*(\omega_2, t; W)] \\ & \times E[A_j(\omega_1', t; W) A_j^*(\omega_2', t; W)] d\omega_1 d\omega_2 d\omega_1' d\omega_2' \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} & E[A_i(\omega_1, t; W) A_j^*(\omega_2, t; W)] \\ & \times E[A_i^*(\omega_1', t; W) A_j(\omega_2', t; W)] \\ & \leq E[A_i(\omega_1, t; W) A_i^*(\omega_2, t; W)] \\ & \times E[A_j(\omega_1', t; W) A_j^*(\omega_2', t; W)] \end{aligned}$$

上式において $\omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2' = \omega$ とし, 両辺に $\frac{1}{4\pi^2}$ を乗ずれば, 式 (2) より

$$S_{ij}(\omega, t; W) S_{ij}^*(\omega, t; W) \leq S_{ii}(\omega, t; W) S_{jj}(\omega, t; W) \dots (19)$$

あるいは

$$r_{ij}^2(\omega, t; W) = \frac{|S_{ij}(\omega, t; W)|^2}{S_{ii}(\omega, t; W) S_{jj}(\omega, t; W)} \leq 1 \dots (20)$$

上式の $r_{ij}^2(\omega, t; W)$ は定常確率過程におけるコヒーレンスを非定常確率過程に拡張したものと考えられよう。もし, $x_i(t)$ と $x_j(t)$ が同一過程 ($i=j$ の場合) ならば当然完全相関となり, このとき式 (20) は $r_{ij}^2(\omega, t; W) = 1$ となる。

もし $x_i(t)$ と $x_j(t)$ が無相関ならば, 式 (5) で

$$E[x_i(u_1)x_j(u_2)] = E[x_i(u_1)]E[x_j(u_2)] = 0$$

となるから, $r_{ij}^2(\omega, t; W) = 0$ となる。

一般には $r_{ij}^2(\omega, t; W)$ は 0 と 1 の間の値をとり, 時間 t を変化させることにより相関性が周波数領域でどのように変化するかを示す量となる。このことから, $S_{ij}(\omega, t; W)$ を用いる代りに $r_{ij}^2(\omega, t; W)$ を用いて相関性を検討することができる。しかしながら相関性の位相ずれを調べるためには $S_{ij}(\omega, t; W)$ の虚部 $Q_{ij}(\omega, t; W)$, あるいは位相角 $\theta_{ij}(\omega, t; W)$ が必要となる。

たとえば, 非定常確率過程 $x(t)$ が次式で与えられるとする³⁾。

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a(\omega_k, t) \cos(\omega_k t + \phi_k) \dots (21)$$

ここで ϕ_k は互いに独立な 0 と 2π 間で一様な乱数とする。

一方, $x(t)$ の振幅特性を倍率変化させかつ位相ずれを有する非定常確率過程 $y(t)$ を次式で与える。

$$y(t) = \sum_{k=1}^N a(\omega_k, t) |H(\omega_k)| \cos\{\omega_k t + \phi_k + \theta(\omega_k)\} \dots (22)$$

式 (21), (22) はフィルター $H(\omega) = |H(\omega)|e^{i\theta(\omega)}$ における入出力の関係にあるから明らかに完全相関である。

この場合, 式 (21), (22) を用いて計算してみれば

$$\left. \begin{aligned} r_{xy}^2(\omega, t; W) &= \frac{|S_{xy}(\omega, t; W)|^2}{S_{xx}(\omega, t; W) S_{yy}(\omega, t; W)} = 1 \\ \theta_{xy}(\omega, t; W) &= \tan^{-1} \left\{ \frac{Q_{xy}(\omega, t; W)}{C_{xy}(\omega, t; W)} \right\} = \theta(\omega) \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

となる。

すなわち, 位相ずれ $\theta_{xy}(\omega, t; W) = \theta(\omega)$ をもって完全相関しているのである。したがって, $r_{xy}^2(\omega, t; W)$ のみでは不明な位相に関する情報を得ることができる。

3. シミュレーション理論

式 (2) で定義した相互スペクトル $S_{ij}(\omega, t; W)$ によって, 多次元非定常確率過程 $x_i(t); i=1, \dots, m$ の特性を説明しうることがわかった。 $S_{ij}(\omega, t; W)$ を用いれば, 相互スペクトル行列が次のように構成される。

$S(\omega, t; W)$

$$= \begin{bmatrix} S_{11}(\omega, t; W) & S_{12}(\omega, t; W) & \dots & S_{1m}(\omega, t; W) \\ S_{21}(\omega, t; W) & S_{22}(\omega, t; W) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}(\omega, t; W) & S_{m2}(\omega, t; W) & \dots & S_{mm}(\omega, t; W) \end{bmatrix} \dots (24)$$

ここで, 式 (12) より $S_{ij}(\omega, t; W) = S_{ji}^*(\omega, t; W)$

が成立つ。

ここでは式 (24) を満足する、時間および周波数領域で非定常性を有する多次元確率過程 $x_i(t)$ のシミュレーション理論を提案する。本論は文献 4), 5) に示した多次元定常確率過程のシミュレーションの拡張理論といえよう。

式 (24) の相互スペクトル行列 $S(\omega, t : W)$ を満足する平均値 0 の m 個の多次元非定常確率過程 $x_i(t)$ は次式を用いてシミュレートできる。

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N b_{ip}(\omega_k, t) \cos\{\omega_k t + \beta_{ip}(\omega_k, t) + \varphi_{pk}\} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (25)$$

ただし式 (25) は次の条件を満足しなければならない。

(1) φ_{pk} は 0 から 2π の間で一様乱数である。 $p=q$ かつ $k=l$ 以外のときは φ_{pk} と φ_{ql} は互いに独立である。

(2) $b_{ip}(\omega, t)$ および $\beta_{ip}(\omega, t)$ は次式で与えられる。

すなわち、 $S(\omega, t : W) \times 4\Delta\omega$ を次のように三角行列の積に分解する。

$$4 S(\omega, t : W) \Delta\omega = \begin{bmatrix} B_{11}(\omega, t) & & & & \\ B_{21}(\omega, t), B_{22}(\omega, t) & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_{m1}(\omega, t), B_{m2}(\omega, t), \dots, B_{mm}(\omega, t) & & & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11}^*(\omega, t), B_{21}^*(\omega, t), \dots, B_{m1}^*(\omega, t) \\ B_{22}^*(\omega, t), \dots, B_{m2}^*(\omega, t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & B_{mm}^*(\omega, t) \end{bmatrix} = B(\omega, t : W) B^{*T}(\omega, t : W) \quad (26)$$

要素で示せば

$$4 S_{ij}(\omega, t : W) \Delta\omega = \sum_{p=1}^i B_{ip}(\omega, t) B_{jp}^*(\omega, t); \quad i \leq j \quad (27)$$

このとき、 $B_{ip}(\omega, t)$ の絶対値および位相角がそれぞれ $b_{ip}(\omega, t)$ 、 $\beta_{ip}(\omega, t)$ である。すなわち、

$$B_{ip}(\omega, t) = b_{ip}(\omega, t) \exp\{i\beta_{ip}(\omega, t)\} \quad (28)$$

ω_k は $S(\omega, t : W)$ の円振動数 ω の上限値および下限値をそれぞれ ω_U, ω_L として

$$\Delta\omega = (\omega_U - \omega_L)/N; \quad N = \text{十分に大きな正整数} \quad (29)$$

と分解したとき

$$\omega_k = \omega_L + \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta\omega \quad (30)$$

与えられる。式 (26) における $\Delta\omega$ は式 (29) で与えられる (図-2)。

なお、本シミュレーションでは相互スペクトルが t 方

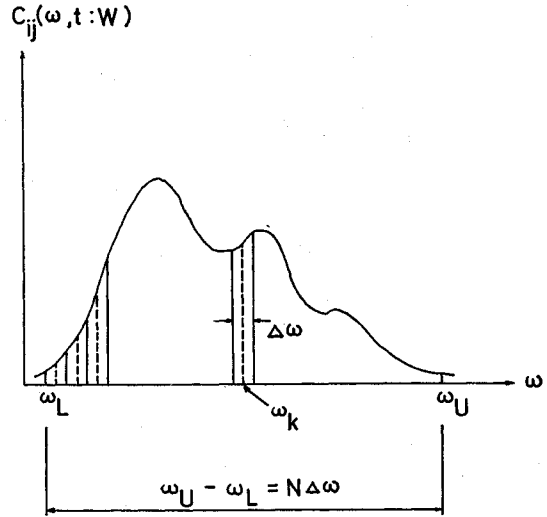


図-2

向になだらかに変化すること、したがって式 (27) より $B_{ip}(\omega, t)$ も同様の特性を有することが精度上から要求される (証明のところで後述)。

条件 (1), (2) のもとで式 (25) が多次元非定常確率過程となることを以下に証明する。

条件 (1) より $E[\varphi_{pk}] = 0$ だから、式 (25) の $x_i(t)$ は平均値 0 となることは明らかである。式 (25) より相互相関関数 $E[x_i(u_1)x_j(u_2)]$ は条件 (1) を用いて次式で与えられる。

$$E[x_i(u_1)x_j(u_2)] = \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} b_{ip}(\omega_k, u_1) b_{jp}(\omega_k, u_2) \times \cos\{\omega_k u_1 - \omega_k u_2 + \beta_{ip}(\omega_k, u_1) - \beta_{jp}(\omega_k, u_2)\} \quad (31)$$

式 (5) に式 (31) を代入して、 $x_i(t)$ と $x_j(t)$ の相互スペクトルは

$$S_{ij}^0(\omega, t : W) = \frac{1}{4\pi} \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1) \times W(t-u_2) b_{ip}(\omega_k, u_1) b_{jp}(\omega_k, u_2) \times \cos\{\omega_k u_1 - \omega_k u_2 + \beta_{ip}(\omega_k, u_1) - \beta_{jp}(\omega_k, u_2)\} e^{-i\omega(u_1 - u_2)} du_1 du_2$$

式 (28) を用いて整理すれば

$$S_{ij}^0(\omega, t : W) = \frac{1}{8\pi} \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1) W(t-u_2) B_{ip}^*(\omega_k, u_1) \times B_{jp}(\omega_k, u_2) e^{i(\omega_k - \omega)(u_1 - u_2)} du_1 du_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1) W(t-u_2) B_{ip}(\omega_k, u_1) \times B_{jp}(\omega_k, u_2) e^{-i(\omega_k + \omega)(u_1 - u_2)} du_1 du_2 \right]$$

ここで条件 (2) より $B_{ip}(\omega_k, t)$ は t の近傍でなだらかに変化する関数であるから、上式は近似的に

$$S_{ij}^0(\omega, t; W) \cong \frac{1}{8\pi} \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N B_{ip}(\omega_k, t) B_{jp}^*(\omega_k, t) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1) W(t-u_2) e^{i(\omega_k - \omega)(u_1 - u_2)} du_1 du_2 + \frac{1}{8\pi} \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N B_{ip}^*(\omega_k, t) B_{jp}(\omega_k, t) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1) W(t-u_2) e^{-i(\omega_k + \omega)(u_1 - u_2)} du_1 du_2 \dots \dots \dots (32)$$

ウィンドウ関数として式 (4) が与えられれば、上式はさらに計算されて

$$S_{ij}^0(\omega, t; W) = \frac{1}{4\Delta\omega} \left\{ \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N B_{ip}(\omega_k, t) B_{jp}^*(\omega_k, t) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{\pi}/T)} \exp\left\{-\frac{(\omega - \omega_k)^2}{2(\sqrt{\pi}/T)^2}\right\} + \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N B_{ip}^*(\omega_k, t) B_{jp}(\omega_k, t) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{\pi}/T)} \exp\left\{-\frac{(\omega + \omega_k)^2}{2(\sqrt{\pi}/T)^2}\right\} \right\} \Delta\omega$$

ところで上式で、 T が十分大きければ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{\pi}/T)} \exp\left\{-\frac{(\omega \pm \omega_k)^2}{2(\sqrt{\pi}/T)^2}\right\} \approx \delta(\omega \pm \omega_k)$$

とおける。ここで $\delta(\)$ はディラックデルタ関数。

さらに N が十分大きく、 $\Delta\omega$ が $d\omega'$ に取れんし k に関する級数和は積分に置きかえられる。

以上より

$$S_{ij}^0(\omega, t; W) \cong \frac{1}{4\Delta\omega} \left\{ \sum_{p=1}^i \int_0^{\infty} B_{ip}(\omega', t) \times B_{jp}^*(\omega', t) \delta(\omega - \omega') d\omega' + \sum_{p=1}^i \int_0^{\infty} B_{ip}^*(\omega', t) B_{jp}(\omega', t) \delta(\omega + \omega') d\omega' \right\}$$

したがって、 $\omega \geq 0$ のとき

$$S_{ij}^0(\omega, t; W) = \frac{1}{4\Delta\omega} \sum_{p=1}^i B_{ip}(\omega, t) B_{jp}^*(\omega, t) \dots \dots \dots (33)$$

$\omega < 0$ のとき

$$S_{ij}^0(\omega, t; W) = \frac{1}{4\Delta\omega} \sum_{p=1}^i B_{ip}^*(-\omega, t) B_{jp}(-\omega, t)$$

$$\therefore S_{ij}^{0*}(\omega, t; W) = \frac{1}{4\Delta\omega} \sum_{p=1}^i B_{ip}(-\omega, t) B_{jp}^*(-\omega, t)$$

ここで ω に $-\omega$ を代入し、式 (11) の関係を用いれば

$$S_{ij}^0(\omega, t; W) = \frac{1}{4\Delta\omega} \sum_{p=1}^i B_{ip}(\omega, t) B_{jp}^*(\omega, t) \dots \dots \dots (34)$$

式 (33), (34) は $-\infty < \omega < \infty$ において式 (27) と等しい。すなわち、シミュレーション基本式 (25) の相互スペクトル $S_{ij}^0(\omega, t; W)$ は規定された相互スペクトル $S_{ij}(\omega, t; W)$ と等しくなる。

ここで、次の 2 点を明確にしておく。はじめに、 $B_{ip}(\omega_k, t)$ は t の近傍でなだらかに変化する関数としたが、ウィンドウ関数 $W(t)$ における T が大きいとすることは相反する要求である。これに関しては文献 3) を参照されたいが、 T の最適値は数値解析で比較検討して決定することになる。

次に、本節では特定のウィンドウ関数式 (4) を用いて論じたが、条件式 (3) を満足する一般のウィンドウ関数の場合にも、ウィンドウ幅を B として $B \rightarrow \infty$ のときには近似的に、幅 B 、高さ $1/\sqrt{B}$ の長方形のウィンドウに置き換えて考えられるので

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1) W(t-u_2) e^{\pm i(\omega_k \mp \omega)(u_1 - u_2)} du_1 du_2 \cong \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi B} \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-B/2}^{B/2} e^{\pm i(\omega_k \mp \omega)(u_1 - u_2)} du_1 du_2$$

$$\cong \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-B/2}^{B/2} e^{\pm i(\omega_k \mp \omega)\tau} d\tau \cong \delta(\omega_k \mp \omega)$$

ここで、 $u_1 - u_2 = \tau$, $(u_1 + u_2)/2 = u$ とすれば

したがって、一般の場合にも式 (32) から式 (33), (34) が導かれる。

以上で、式 (25) の妥当性が証明された。

4. 応 用

(1) 3 次元強震地動のシミュレーションについて

地震動による建造物の動的挙動の解析は、従来一方向の地動に対して行われていたが、パイプ構造、原子力施設、高架橋梁などに対しては建造物の 3 次元的な解析が重要となった。この場合、入力波形として水平 2 方向、上下動の 3 成分波形が必要となる。同一の発震機構の地震に対し、同一地点で測定された 3 成分は当然のことながら互いに相関性を有するものである。そこで、不規則振動論で入力波形をモデル化するとき、厳密には個々の成分が振幅及び周波数特性の非定常性を有し、かつ互いに相関した 3 次元非定常確率過程の理論が必要となる。まず、実際のデータに対して式 (2) による相互スペクトル特性を検討し、次に本論で開発したシミュレーション理論による入力波形の作成が要求される。

1 地点における 3 次元地震動モデルとしての解析報告^{6)~8)}があるが、いずれも地震動成分の共分散は時間ずれが増加すると急速にその値が減少するとして、時間差 $\tau=0$ のみについての相関解析を行ったにすぎない。また、シミュレーション法としては、このとき得られる共分散行列を対角化するように座標変換して得られる主軸^{6), 7), 9)}の方向で 3 成分が独立過程となるとして、互いに独立な振幅特性のみ非定常となる確率モデルを用いている。柴田ら⁸⁾は同様の解析を本邦地震記録に対して行

ったが、Penzien⁷⁾らの結論のように完全独立を考えれば取扱いは容易だが、必ずしも現時点では明確でないとしている。

以上より式(2)および式(25)を用いた検討の必要性は明らかである。

(2) 地震動の主軸の概念について

地震動を水平2方向および上下動の3成分よりなるベクトルとすれば、式(25)は $m=3$ の場合となる。このとき

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N b_{ip}(\omega_k, t) \cos\{\omega_k t + \beta_{ip}(\omega_k, t) + \varphi_{pk}\};$$

$$i=1, 2, 3 \dots\dots\dots(35)$$

いま、 $x_i(t)$ を直交座標変換すれば

$$x_r'(t) = \sum_{i=1}^3 l_{ri} x_i(t) \dots\dots\dots(36\cdot a)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N l_{ri} b_{ip}(\omega_k, t)$$

$$\times \cos\{\omega_k t + \beta_{ip}(\omega_k, t) + \varphi_{pk}\} \dots\dots(36\cdot b)$$

となる。このとき直交座標変換された $x_r'(t)$ の相互スペクトルは式(5)より

$$S_{rs}'(\omega, t; W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1)$$

$$\times W(t-u_2) E[x_r'(u_1) x_s'(u_2)] e^{-i\omega(u_1-u_2)} du_1 du_2$$

式(36・a)より

$$E[x_r'(u_1) x_s'(u_2)] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 l_{ri} l_{sj} E[x_i(u_1) x_j(u_2)]$$

となるから、これを上式に代入して整理すれば

$$S_{rs}'(\omega, t; W) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 l_{ri} l_{sj} S_{ij}(\omega, t; W)$$

$$\dots\dots\dots(37\cdot a)$$

行列表示すれば

$$S'(\omega, t; W) = L S(\omega, t; W) L^T \dots\dots(37\cdot b)$$

となる。ここで L の成分は l_{ri} である。

もし式(37・b)の変換によって得られた新しい座標系における相互スペクトル行列 $S'(\omega, t; W)$ が完全に対角行列になるならば、式(36・a)の $x_r'(t)$; $r=1, 2, 3$ は互いに独立な非定常確率過程となる。このとき新座標軸が主軸の3方向として定義されよう。しかしながら、地震動データに適用する場合、 ω および t の関数である複素関数の相互スペクトルの対角化は不可能であり、地震動を周波数成分波に分解した個々の波に対して、複素領域で時間 t の経過とともに変動する主軸が求まるかもしれない。しかしながら、その意味は十分検討されねばならない。

文献6)で提案された主軸の概念は次のように説明される。

式(5)の両辺を ω に関して全積分すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(t-u) E[x_i(u) x_j(u)] du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}(\omega, t; W) d\omega \dots\dots\dots(38\cdot a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} C_{ij}(\omega, t; W) d\omega \dots\dots\dots(38\cdot b)$$

上式は左辺が時間 t の近傍における、時間差を0としたときの共分散の平均値であり、それが右辺の相互スペクトル(あるいはその実部)の ω に関する面積分に等しい。文献6),7),8)などでは、この共分散を要素とする共分散行列の対角化より時間 t で変動する主軸を定義している。この概念に従えば相互スペクトルを積分してできる新たな行列

$$S_I(t; W) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega, t; W) d\omega \dots\dots\dots(39)$$

に対して、式(37・b)の変換をほどこすことになる。

すなわち

$$S_I'(t; W) = L S_I(t; W) L^T \dots\dots\dots(40)$$

式(40)で $S_I'(t; W)$ が対角行列となるように変換行列 L が得られたとき、式(37・b)の相互スペクトル行列 $S'(\omega, t; W)$ は時間 t の近傍で対角行列となっているであろうか?。否である。すなわち、時間ずれを考慮した相関性を有する多次元過程の完全独立化は座標変換では求まらない。

そもそも主軸の概念は地震動の本来的な方向性に基づいて考えられるようになったのではあるが、同時に耐震設計用の3次元入力波形の作成に対し“独立性”に基づく地震動作成の可能性から議論されるようになったものである。これに関しては本論で相関性を有する非定常確率過程のモデルが可能となったわけであるから、主軸に関しては独立性にとらわれない内容のある定義がなされてよい。

以上の意味からも3方向地震波の作成に対して多次元非定常確率過程のシミュレーション理論は有用となる。

ところで式(38・a)をさらに t に関して積分してみると

$$\int_{-\infty}^{\infty} E[x_i(u) x_j(u)] du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}(\omega, t; W) d\omega dt$$

$$\dots\dots\dots(41)$$

となる。

これより、全エネルギーを要素とする行列

$$S_{II}(W) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega, t; W) d\omega dt \dots\dots(42)$$

が得られる。

同様の座標変換を行えば

$$S_{II}'(W) = L S_{II}(W) L^T \dots\dots\dots(43)$$

ここで $S_{II}'(W)$ が対角行列となり、対角線要素に3方向の全パワー(最大値, 中間値, 最小値)が得られるよ

うな L を求め、式 (36・a) による新たな $x_r'(t)$; $r=1, 2, 3$ を作った場合、互いに相関はしているが、3次元地震動の相互特性に新しい知見が得られるであろうか？。この場合、 L 変換による時間 t に独立な新座標方向もある意味での主軸となろう。

(3) その他の分野における応用について

近年、水理分野においても非定常スペクトル解析が盛んに行われている。本論で扱った非定常性を有する時系列として、月降水量の解析、集中豪雨記録の解析の報告がある¹⁰⁾。これらは1地点における非定常現象を解析したものであるが、多地点における複数物理量の相関性解析が必要な場合には、本論の相互スペクトルおよび多次元非定常確率過程のシミュレーションが直接応用できよう。

5. 結 び

本論は多次元非定常確率過程 $x_i(t)$; $i=1, 2, \dots, m$ の相関性を表現するために相互スペクトルの概念を式 (2) で提案した。式 (2) の相互スペクトルの物理的意義を明確にするとともに、式 (2) を満足する多次元非定常確率過程の同時シミュレーション理論を開発し、式 (25) で与えた。

近年、地震動の3次元解析にとり主軸の概念が議

論されるようになったが、主軸と相互スペクトルとの関連および主軸の問題点を指摘し、互いに相関した多次元モデル式 (25) の必要性を主張した。本理論の応用問題のいくつかを論じたが、それぞれ大きな課題である。現在、地震動の3次元特性に関して研究を行っている。

参 考 文 献

- 1) Mark, W.D.: Spectral Analysis of the Convolution and Filtering of Non-stationary Stochastic Processes, Jour. of Sound and Vibr., Vol. 11, No. 1, 1970.
- 2) 星谷: 非定常確率過程のスペクトル解析, 土木学会誌, 1975年3月.
- 3) 星谷ほか: 地震加速度波の非定常特性とシミュレーション, 土木学会論文報告集 No. 245, 1976年1月.
- 4) 星谷: 確率論手法による振動解析, 鹿島出版会, 1974年8月.
- 5) Hoshiya, M.: Simulation of Multi-correlated Random Processes and Application to Structural Vibration Problems, Proc. of JSCE, No. 204, Aug., 1972.
- 6) 渡部: 3次元強震地動のシミュレーション, 昭和49年度建築研究所年報.
- 7) Kubo, T. and Penzien, J.: Characteristics of Three-dimensional Ground Motions, San Fernando Earthquake, Japan-U.S. Seminar, Hawaii, Aug., 1975.
- 8) 柴田ほか: 構造物の応答解析に際しての新たな問題点, 日本機械学会講演論文集 No. 760-3, 1976年4月.
- 9) 豊島: 地震動の三次元的取り扱い, 東大産業機械工学専門課程修士論文, 1976年2月.
- 10) 日野・竹内: 非定常スペクトルの定義法および実際への応用, 文部省科研, 自災害特研 (1), 昭和49年度.

(1976.4.13・受付)