

静水中における気泡噴流の性質

SOME PROPERTIES OF BUBBLE JET IN STILL WATER

北野 義則*・田中 綏彦**・栗谷 陽一***

By Yoshinori KITANO, Masahiko TANAKA and Yoichi AWAYA

1. 結 言

気泡噴流の応用には、物質の混合、躍層の破壊、波浪の阻止などが挙げられ、活性汚泥処理の曝気槽での散気もその例である。気泡から処理水への酸素の供給と、汚泥や基質が沈殿しないための旋回流の誘起とを目的としている。このように気泡噴流は、広い応用範囲を持つ。

単一気泡の挙動については、実験的な観察と理論は、かなり進んでいる。また気泡群については、一様な気泡密度の場合に対する、いわゆる hold up の問題として、化学的な重要性から、かなりの研究がなされている。しかし気泡群の気泡密度と気泡径を独立に制御することの困難から、まだ解明不十分といわざるを得ないようである。さらに気泡噴流になれば、気泡の相対運動に加えて、気泡密度分布と、流体の流速分布とを考慮せねばならず、現象は極めて複雑となり、まだ実験的にも、理論的にも現象があまり解明されていない。

気泡噴流は温度差あるいは溶解物質濃度差による Plume と同様に、気泡の浮力によって気泡噴流を形成する。2次元気泡噴流において、単位長さ当りの気泡発生量が十分大きくて、噴流の上昇流速に比べて気泡の上昇速度を無視しうる時には、気泡噴流の挙動が、Schmidt の導いた2次元加熱気流の噴流についての解析結果に従うことが知られている¹⁾。この理論によれば、噴流のひろがり、気泡の発生量によらず一定で、噴流流速は $(gq)^{1/3}$ に比例することが示されている。また送気量が減少すれば、ひろがり角度は減少し、流速も $(gq)^{1/3}$ の法則を下まわることが実験的に知られる。これは、水に対する気泡の相対運動が影響するものと考えられ、このような気泡噴流の性質を検討するためには、水流に相

対的な気泡の運動を知る必要がある。単一気泡では、Haberman, Morton²⁾ によれば、気泡径 0.2~0.7 cm の範囲において、気泡は約 23 cm/sec で上昇する。また、気泡群について、一様な気泡密度の場合、平均気泡上昇速度は、気泡密度と気泡径との関数になるべきであるが、気泡径 0.5 cm 付近での実測値としては 20~30 cm/sec の値を与えているものが多い。

実際に用いられている気泡噴流のうちで、2次元気泡噴流が大部分をしめるように思われるので、この報告は、加熱気流の噴流についての Schmidt の研究を拡張して、気泡と水流の相対速度を考慮し、気泡噴流の流速分布、気泡密度分布を求め、さらに実験結果より考察しようとするものである。

2. 気泡噴流の基礎式および厳密解

Schmidt は加熱気体の上昇について、Tollmien の噴流理論³⁾と同様に Prandtl の運動量輸送理論、あるいは Taylor の渦度輸送理論を用いて、混合距離が加熱気流横断面では一様であると仮定して解を求めている。気泡噴流においては、加熱による浮力の代りに気泡による浮力を考えることになる。もし水流に対する気泡の相対運動が無視されるならば、気泡噴流も Schmidt の理論に従うとして大きな誤りはないものと思われる。気泡が周囲の流体に対して相対速度 w の速度で上昇するとき、もしこの上昇速度が周囲の流体の渦度による乱流拡散に及ぼす影響を無視し、気泡密度は十分小さいものとして、次の流体運動方程式および気泡の拡散式が成立つ。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\delta}{2} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \sigma g \quad \dots (1)$$

$$(u+w) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) \quad \dots (2)$$

u : x 方向の速度 (L/T)

v : y 方向の速度 (L/T)

* 正会員 工修 関東学院大学講師 工学部土木工学科

** 工修 日本水道コンサルタンツ

*** 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学教室

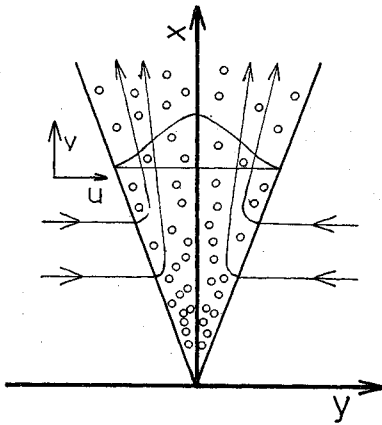


図-1

w : 気泡の相対上昇速度 (L/T)

σ : 気泡密度 (L^3/L^3)

l : 混合距離 (L)

δ : $\begin{cases} \delta=1 & \text{Taylor の渦度輸送理論} \\ \delta=2 & \text{Prandtl の運動量輸送理論} \end{cases}$

w は一般に σ の関数と考えるべきであるが、特に σ の大きい部分を除けば、その変化は小さく、ここでは w 一定とする。

二次元の加熱気体に対する Schmidt の解が、一定の中心流速をもち、直線的に広がっていくことからして、この場合にも同様な解があるはずである。Schmidt の計算にならって、連続式を導入するために流れ関数 ψ を用いて、

$$\psi = x\phi(\eta) \dots\dots\dots (3)$$

$$\eta = y/x \dots\dots\dots (4)$$

とおき、さらに混合距離 l が x に比例するとして、

$$l = cx \dots\dots\dots (5)$$

とおく。また気泡密度 σ は、 x に反比例するとして

$$\sigma = \tau(\eta)/x \dots\dots\dots (6)$$

とおく。式 (3) と (4) より

$$u = \phi', \quad v = \eta\phi' - \phi$$

となる。 $'$ は η についての微分である。

したがって、 $\eta > 0$ の領域では、 $\phi'' < 0$ であるから

式 (1) は、

$$\phi\phi'' = \delta c^2 \phi'' \phi''' - \tau g \dots\dots\dots (7)$$

式 (2) は、

$$w(\tau + \eta\tau') + \phi'\tau + \phi\tau' = c^2(\phi''\tau)'$$

$\eta=0$ において $\phi(0)=0$, $\tau'(0)=0$ であるから、積分されて

$$w\eta\tau + \phi\tau = c^2\phi''\tau' \dots\dots\dots (8)$$

となる。独立変数 η と従属変数 ϕ, τ を次のように変換する。

$$\zeta = \eta/c^{2/3}, \quad \Phi(\zeta) = \phi/(c^{2/3}w), \quad \Theta(\zeta) = \tau g/w^2$$

式 (7), (8) は

$$\delta\Phi''\Phi''' - \Phi\Phi'' = \Theta \dots\dots\dots (9)$$

$$\Phi''\Theta' - \Phi\Theta = \zeta\Theta \dots\dots\dots (10)$$

となり、Schmidt の与えた式と類似の式をうる。 $'$ は ζ についての微分である。

境界条件として

噴流中央 $\zeta=0$ において

$$\Phi(0)=0, \quad \Phi'(0)=\Phi_0, \quad \Phi''(0)=0, \quad \Theta(0)=\Theta_0, \dots\dots\dots (11)$$

噴流の境界 $\zeta=\zeta_R$ において

$$\Phi(\zeta_R)=\Phi_R, \quad \Phi'(\zeta_R)=0, \quad \Phi''(\zeta_R)=0, \quad \Theta(\zeta_R)=0 \dots\dots\dots (12)$$

とおけば、静水中での気泡噴流の解が得られる。

式 (11) を満足するような $\zeta=0$ の近傍における式 (9), (10) の解は次のように展開される。

$$\Phi = \Phi_0\zeta + \Phi_1\zeta^{5/2} + \Phi_2\zeta^4 + \Phi_3\zeta^{11/2} + \Phi_4\zeta^7 + \Phi_5\zeta^{17/2} + \dots \dots\dots (13)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1\zeta^{3/2} + \Theta_2\zeta^3 + \Theta_3\zeta^{9/2} + \Theta_4\zeta^6 + \Theta_5\zeta^{15/2} + \dots \dots\dots (14)$$

これらを式 (9), (10) に代入すると式 (13), (14) の Φ_0, Θ_0 を与えれば、各項の係数は次のように定められる。

$$\Phi_1 = -\frac{4}{15}\sqrt{\frac{2}{\delta}}\Theta_0, \quad \Theta_1 = \frac{8}{45} \cdot \frac{1}{\Phi_1}(\Phi_0+1)\Theta_0$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{450} \cdot \frac{1}{\Phi_1\delta} (15\Phi_0\Phi_1 + 4\Theta_1)$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{\Phi_1} [8\{(\Phi_0+1)\Theta_1 + \Phi_1\Theta_0\} - 144\Phi_2\Theta_1]$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{11880} \cdot \frac{1}{\Phi_1} \left[\frac{8}{\delta} \{48\Phi_0\Phi_2 + 15\Phi_1^2 + 4\Theta_2\} - 9216\Phi_2^2 \right]$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{135} \cdot \frac{1}{\Phi_1} [8\{(\Phi_0+1)\Theta_2 + \Phi_1\Theta_1 + \Phi_2\Theta_0\} - 288\Phi_2\Theta_2 - 297\Phi_3\Theta_1]$$

$$\Phi_m = \frac{1}{15[3m(3m+2)(3m-1)]} \cdot \frac{1}{\Phi_1} \left[\frac{8}{\delta} \left\{ 4\Theta_{m-1} + \sum_{n=0}^{m-1} (3m-3n-1)(3m-3n-3) \times \Phi_n\Phi_{m-n-1} \right\} - \sum_{n=2}^{m-1} 3n(3n+2) \times (3m-3n+5)(3m-3n+3) \times (3m-3n+1)\Phi_n\Phi_{m-n+1} \right]$$

$$\Theta_m = \frac{1}{45m\Phi_1} \left[8\Theta_{m-1} + 8 \sum_{n=0}^{m-1} \Phi_n\Theta_{m-n-1} - \sum_{n=2}^m 9n(3n+2)(m-n+1)\Phi_n\Theta_{m-n+1} \right]$$

これらの諸式より、順次係数が求まることになる。 ζ の増大とともに、級数の収束、特に Θ に対する級数の収

束は悪くなるので、噴流境界の手前 $\zeta = \zeta_0$ でもう一度 Taylor 級数に展開することにする。

$$\zeta = \zeta_0 + \bar{\zeta}$$

とおくと、方程式 (9), (10) は次のようになる。

$$\delta \phi'''' - \phi \phi'' = \theta \dots\dots\dots (9)'$$

$$\phi'' \theta' - \theta \theta' = (\zeta_0 + \bar{\zeta}) \theta \dots\dots\dots (10)'$$

' は $\bar{\zeta}$ についての微分である。 ϕ と θ の $\bar{\zeta}$ についての級数展開は、次のように置く。

$$\phi = \bar{\phi}_0 + \bar{\phi}_1 \bar{\zeta} + \bar{\phi}_2 \bar{\zeta}^2 + \bar{\phi}_3 \bar{\zeta}^3 + \bar{\phi}_4 \bar{\zeta}^4 + \bar{\phi}_5 \bar{\zeta}^5 + \dots\dots\dots (13)'$$

$$\theta = \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 \bar{\zeta} + \bar{\theta}_2 \bar{\zeta}^2 + \bar{\theta}_3 \bar{\zeta}^3 + \bar{\theta}_4 \bar{\zeta}^4 + \bar{\theta}_5 \bar{\zeta}^5 + \dots\dots\dots (14)'$$

これらを (9)', (10)' に代入すると各項の係数は次のように定められる。

$$\bar{\phi}_3 = \frac{1}{12 \delta \bar{\phi}_2} [\bar{\theta}_0 + 2 \bar{\phi}_0 \bar{\phi}_2]$$

$$\bar{\theta}_1 = \frac{1}{2 \bar{\phi}_2} [\zeta_0 \bar{\theta}_0 + \bar{\phi}_0 \bar{\theta}_0]$$

$$\bar{\phi}_4 = \frac{1}{48 \bar{\phi}_2} \left[\frac{1}{\delta} (6 \bar{\phi}_0 \bar{\phi}_3 + 2 \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 + \bar{\theta}_1) - 36 \bar{\phi}_3^2 \right]$$

$$\bar{\theta}_2 = \frac{1}{4 \bar{\phi}_2} [\zeta_0 \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_0 + \bar{\phi}_0 \bar{\theta}_1 + \bar{\phi}_1 \bar{\theta}_0 - 6 \bar{\phi}_3 \bar{\theta}_1]$$

$$\bar{\phi}_m = \frac{1}{2 m(m-1)(m-2) \bar{\phi}_2} \left[\frac{1}{\delta} \left\{ \bar{\theta}_{m-3} + \sum_{n=0}^{m-3} \bar{\phi}_n \right\} \times (m-n-1)(m-n-2) \bar{\phi}_{m-n-1} \right. \\ \left. - \sum_{n=3}^{m-1} n(n-1)(m-n+2)(m-n+1) \times (m-n) \bar{\phi}_n \bar{\phi}_{m+2-n} \right]$$

$$\bar{\theta}_m = \frac{1}{2 m \bar{\phi}_2} \left[\zeta_0 \bar{\theta}_{m-1} + \bar{\theta}_{m-2} + \sum_{n=0}^{m-1} \bar{\phi}_n \bar{\theta}_{m-n-1} - \sum_{n=3}^{m+1} n(n-1)(m-n+2) \bar{\phi}_n \bar{\theta}_{m-n+2} \right]$$

$\zeta = \zeta_0$ での接続条件は

$$\left. \begin{aligned} \phi(\zeta_0) = \bar{\phi}_0, \quad \phi'(\zeta_0) = \bar{\phi}_1 \\ \phi''(\zeta_0) = 2 \bar{\phi}_2, \quad \theta(\zeta_0) = \bar{\theta}_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)'$$

噴流の境界 $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_R$ において

$$\left. \begin{aligned} \phi(\bar{\zeta}_R) = \phi_R, \quad \phi'(\bar{\zeta}_R) = 0 \\ \phi''(\bar{\zeta}_R) = 0, \quad \theta(\bar{\zeta}_R) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)'$$

このようにすれば、ある値 $\bar{\zeta}_R$ に対して、 $\phi'' = \theta = 0$ となるように与えられた ϕ_0 に対して θ_0 の値を選べば、任意の ϕ_0 に対する θ_0 の値、および ζ_R の値は決められることになる。このようにして ϕ および θ が求められれば、流速分布および気泡密度分布は

$$\left. \begin{aligned} u = w \phi', \quad \sigma = \tau/x = (w^2/gx) \theta \\ \zeta = (1/c^{2/3})^{-1} y/x, \quad v = c^{2/3} w (\zeta \phi' - \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

で与えられる。また送気量は次式で与えられる。

$$q_0 = 2 \frac{c^{2/3} w^3}{g} \int_0^{\zeta_R} (1 + \phi') \theta d\zeta \dots\dots\dots (16)$$

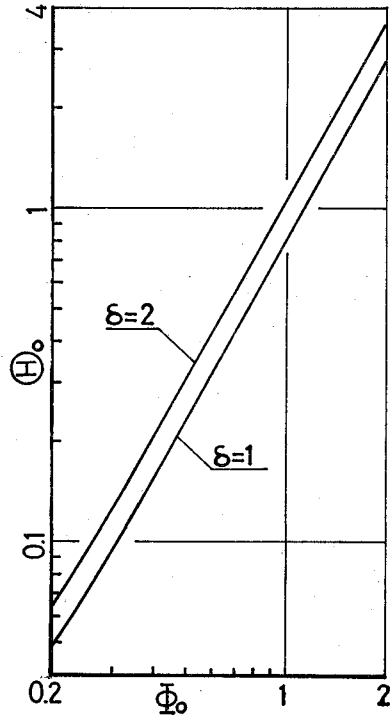
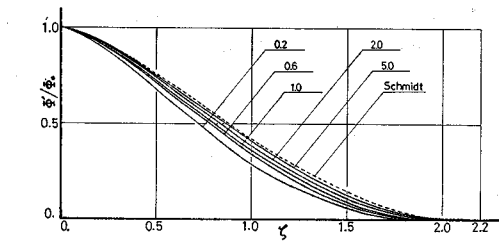
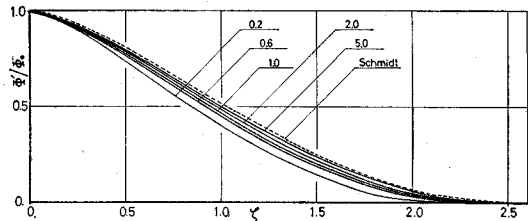


図-2 ϕ_0 と θ_0 の関係



(1) $\delta=1$



(2) $\delta=2$

図-3 x 方向の流速分布 (図中の値は、 ϕ_0 の値である)

ϕ_0 と θ_0 の静水中での気泡噴流の関係を図-2 に示す。 ϕ' , $\zeta \phi' - \phi$, θ の計算結果を図-3, 4, 5 に示す。

3. 実験装置と実験方法

図-6 に実験装置を示す。実験水槽は幅 2 m, 深さ 1 m, 奥行 40 cm の全面アクリル製のものを用いた。長さ

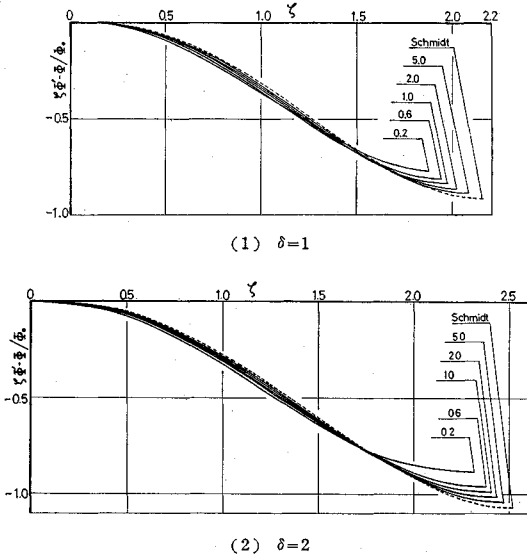


図-4 y 方向の流速分布 (図中の値は、 Φ_0 の値である)

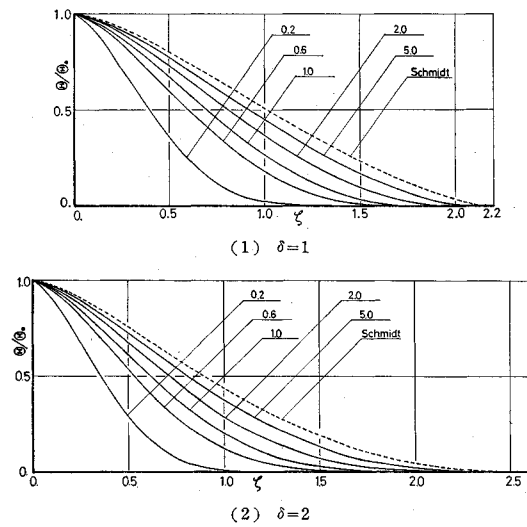


図-5 気泡密度分布 (図中の値は、 Φ_0 の値である)

40 cm の散気装置を水槽底部に据えた。エアークンプレッサーより減圧弁、オリフィス流量計を通して散気装置から送気した。送気量を7種類に変えて行った。流速分布は手製のプロペラ流速計より測定した。プロペラの直径は1 cm である。なお参考までにプロペラの特性を図-7 に示す。かなり顕著な流速変動があるので、測定値は1測点について10秒間の回転数を測定し、平均流速を求めた。

また気泡密度分布は、バブルメーターによって測定した。このバブルメーターは、プローブとして豆球とフォトランジスターを組み合わせたものを用い、気泡が豆球とフォトランジスターの間を通過することにより、10秒間に光がさえぎられる回数とさえぎられている時

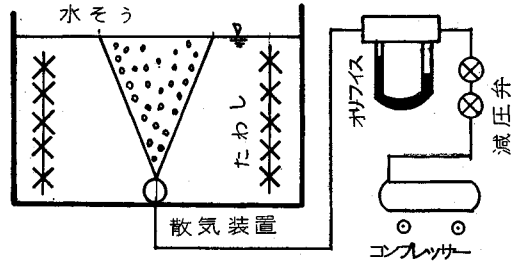


図-6 実験装置

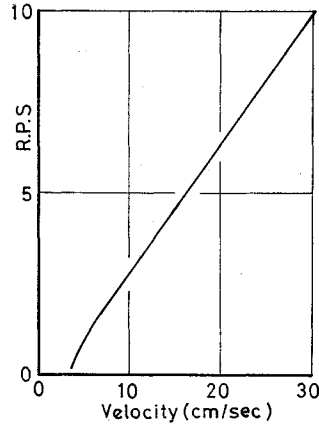


図-7 プロペラ流速計の検定曲線

間の累計を測定することにより、気泡密度および気泡径が計算される。実際には同一実験では気泡径は、ほとんど一定とみなされたので、光のさえぎられた時間の累計が気泡密度に比例するものとした。ただし σ の絶対値は求められない。

なお水槽中のたわしは旋回流を止めるためのものである。

4. 実験結果および厳密解との比較

流速分布の例を図-8、気泡密度分布の例を図-9 に示す。気泡噴流の運動は、非常に長周期の変動が多く、測定点がばらついている。この流速分布の結果を用いて、混合距離の比例定数 c の値と Φ_0 の値とを各送気量ごとに定めた。図-10 に示すように c の値は、送気量の増大とともに大きくなる傾向を示している。図-8 の実線は、算定した c および Φ_0 の値を使用して求めた理論計算の結果を示す。流速分布の理論値は、 $\delta=1$ 、 $\delta=2$ に対し、それぞれ最適の c および Φ_0 を用いれば、ほとんど一致するので、ともに図中の実線になると考えてもらって差し支えない。なお相対上昇速度は $w=23$ cm/sec とした。算定した c および Φ_0 を使用して、式 (16) より送気量 q_0 を逆算すると表-1 となり、ま

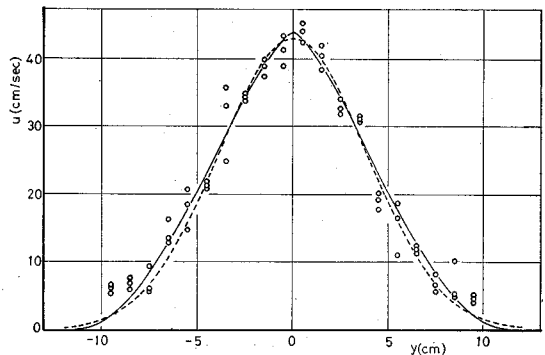
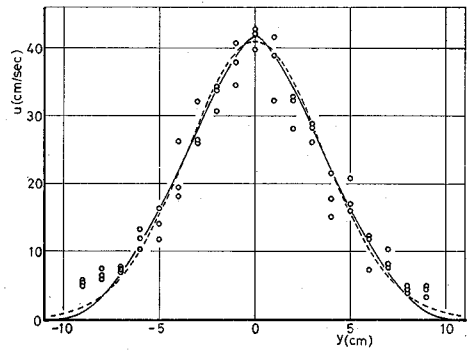
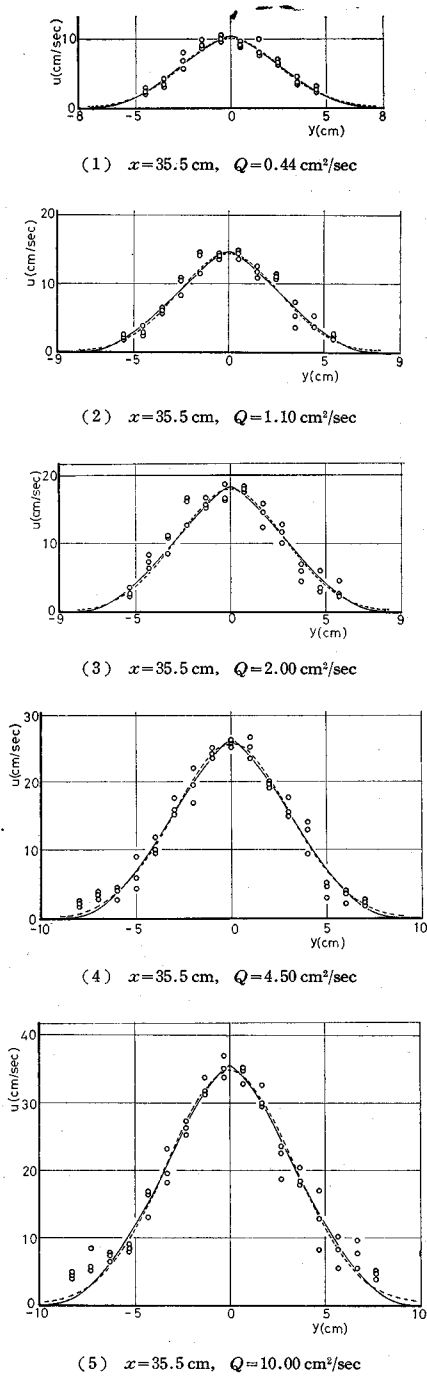


図-8 x 方向の流速分布 (実線は厳密解, 点線は誤差分布, ○は実験値)

送気量が変わると噴流のひろがり幅が変化するので、異なる条件に対して c に同じ値を与えることはできない。いいかえると、気泡噴流は、相対速度を持つため、ある ϕ_0 に対して、1つの c が決まることになり、相対速度が中心流速に比較して無視される時が、pure plume となるわけである。乱れは流速分布に依存してつくられるから、もし、気泡噴流の流速分布に対して、あるひろがり幅 B を定義することができれば、混合距離 l は B に比例すると考えたほうが妥当であると思われる。したがって幅 B を運動量と流量から次のように定義する。

$$B = \left[\int_0^{y_R} u dy \right]^2 / \int_0^{y_R} u^2 dy$$

$$= x \cdot c^{2/3} \left[\int_0^{\zeta_R} \phi'^2 d\zeta \right]^2 / \int_0^{\zeta_R} \phi'^2 d\zeta \dots \dots \dots (17)$$

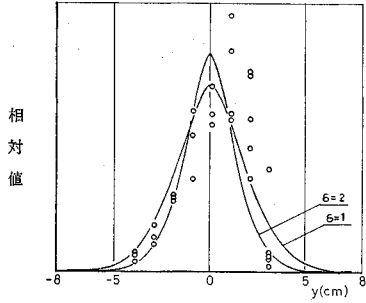
$$l = cx = C_B B \dots \dots \dots (18)$$

$$C_B = c^{1/3} \cdot \left[\int_0^{\zeta_R} \phi'^2 d\zeta \right] / \left[\int_0^{\zeta_R} \phi'^2 d\zeta \right]^2 \dots \dots \dots (19)$$

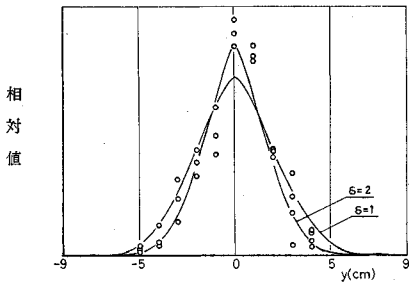
ずまの結果を示している。流速分布より求めた c および ϕ_0 の値を用いて気泡密度分布を計算すると、図-9 に示す実線を得る。 $\delta=1$, $\delta=2$ を比較すると図-9 の気泡密度分布の実測結果より $\delta=2$ の方が比較的、実験に合っているように思われる。

これまでの理論計算の取り扱いにおいて c を定数の値として取り扱った。特定の条件、すなわち与えられた

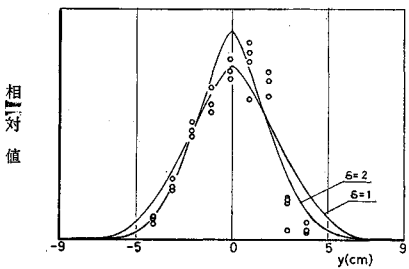
以上の式と実験より算定した c を使って $c (=l/x)$ と B/x を 図-11 に示す。この図より c は噴流幅に比例しているようである。さらに $C_B (=l/B)$ と送気量の関係を 図-12 に示す。気泡噴流において、混合距離は幅 B に比例し、比例定数 C_B は不変定数と考えて差し支



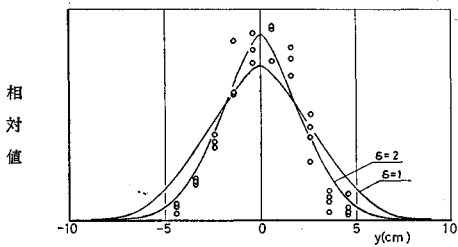
(1) $x=35.5 \text{ cm}, Q=0.44 \text{ cm}^2/\text{sec}$



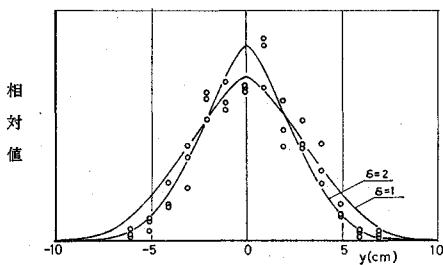
(2) $x=35.5 \text{ cm}, Q=1.10 \text{ cm}^2/\text{sec}$



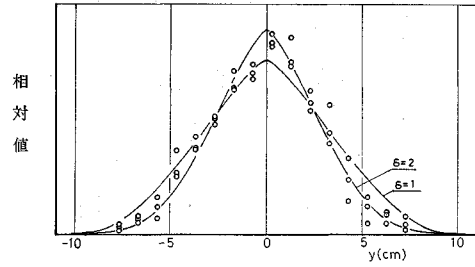
(3) $x=35.5 \text{ cm}, Q=2.00 \text{ cm}^2/\text{sec}$



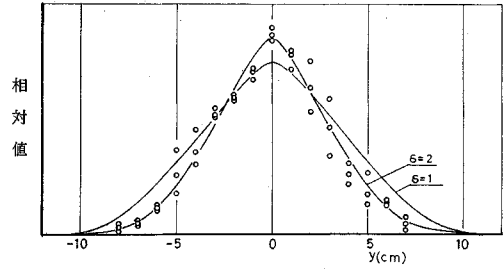
(4) $x=35.5 \text{ cm}, Q=4.50 \text{ cm}^2/\text{sec}$



(5) $x=35.5 \text{ cm}, Q=10.00 \text{ cm}^2/\text{sec}$



(6) $x=35.5 \text{ cm}, Q=13.00 \text{ cm}^2/\text{sec}$



(7) $x=35.5 \text{ cm}, Q=16.70 \text{ cm}^2/\text{sec}$

図-9 気泡密度分布 (実線は厳密解, ○は実験値)

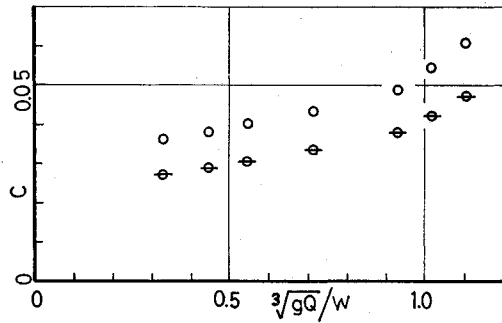


図-10 C と送気量の関係 (○は $\delta=1$, ⊙は $\delta=2$)

表-1

実験送気量 Q (cm^2/sec)	0.44	1.10	2.00	4.50	10.00	13.00	16.70
理論送気量 q_0 (cm^2/sec)	$\delta=1$ 0.41	1.01	1.75	4.22	9.63	16.26	19.82
	$\delta=2$ 0.42	1.00	1.76	4.22	9.82	16.33	19.87

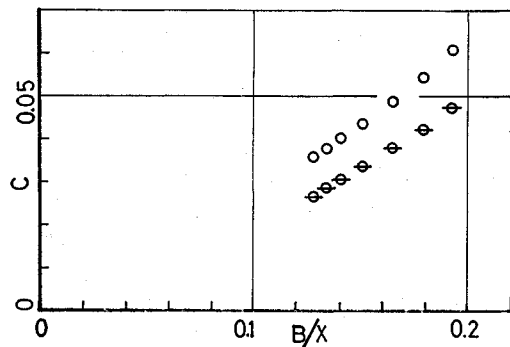


図-11 C と B/x の関係 (○は $\delta=1$, ⊙は $\delta=2$)

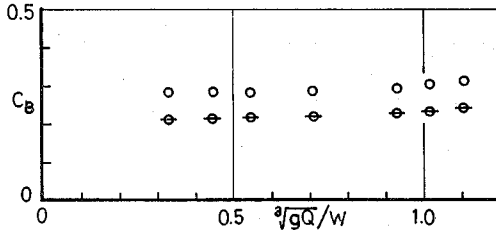


図-12 C_B と送気量との関係 (○は $\delta=1$, ⊕は $\delta=2$)

えない。

5. 近似解法

前節で、混合距離を噴流幅に比例させる方が、異なった送気量に対して、幅比例定数を不変定数として取り扱えることがわかった。しかし、厳密解において、はじめから噴流幅を定義することは困難である。したがって、流速分布形を仮定することができれば、ある代表噴流幅を用いることは可能である。

前節の実験結果より、実用上、流速分布、密度分布を誤差分布で十分近似できると思われるので、流速および気泡分布をいずれも誤差分布として、噴流流速、噴流幅、気泡密度、気泡幅と送気量との関係を求める。

流速分布 $u(x, y)$ に対しては中心軸上の流速を $u_0(x)$ 、幅を $b(x)$ とすると

$$u = u_0 e^{-y^2/b^2} \dots\dots\dots(20)$$

気泡密度 $\sigma(x, y)$ に対しても同様に、中心軸上の値を $\sigma_0(x)$ 、幅を $a(x)$ とすると

$$\sigma = \sigma_0 e^{-y^2/a^2} \dots\dots\dots(21)$$

混合距離 l は b に比例するとして

$$l = \epsilon b(x) \dots\dots\dots(22)$$

とおく。これらを式 (1), (2) に代入し、 $0 \leq y \leq \infty$ の区間における各式の右辺および左辺の 0 次あるいは 1 次モーメントをそれぞれ等しいとおけば

式 (1) の 0 次モーメント

$$\sqrt{2} u_0 b \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{\sqrt{2}} u_0^2 \frac{db}{dx} = g a \sigma_0 \dots\dots\dots(23)$$

式 (2) の 0 次モーメント

$$\begin{aligned} & \frac{b a \sigma_0}{(b^2 + a^2)^{1/2}} \frac{du_0}{dx} + \frac{a^3}{(b^2 + a^2)^{3/2}} u_0 \sigma_0 \frac{db}{dx} \\ & + \left\{ w + \frac{b^3}{(b^2 + a^2)^{3/2}} u_0 \right\} \sigma_0 \frac{da}{dx} \\ & + \left\{ w + \frac{b u_0}{(b^2 + a^2)^{1/2}} \right\} a \frac{d\sigma_0}{dx} = 0 \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

式 (1) の 1 次モーメント

$$\begin{aligned} & (\pi + 4) u_0 b^2 \frac{du_0}{dx} + (\pi + 2) b u_0^2 \frac{db}{dx} \\ & = \sqrt{2} \pi \epsilon^2 b u_0^2 + 4 g a^2 \sigma_0 \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

式 (2) の 1 次モーメント

$$\begin{aligned} & \left(\tan^{-1} \frac{a}{b} + \frac{b a}{b^2 + a^2} \right) \sigma_0 b \frac{du_0}{dx} \\ & + \left\{ \tan^{-1} \frac{b}{a} + \frac{b a (a^2 - b^2)}{(b^2 + a^2)^2} \right\} \sigma_0 u_0 \frac{db}{dx} \\ & + 2 \left\{ w + \frac{b^4}{(b^2 + a^2)^2} u_0 \right\} \sigma_0 \frac{da}{dx} \\ & + \left(w + \frac{b^2}{b^2 + a^2} u_0 \right) a \frac{d\sigma_0}{dx} \\ & = 2 \sqrt{\pi} \epsilon^2 \frac{b^3}{(b^2 + a^2)^{3/2}} u_0 \sigma_0 \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

式 (24) は積分されて送気量を与える式

$$q = \sqrt{\pi} a \sigma_0 \left\{ w + \frac{b}{(b^2 + a^2)^{1/2}} u_0 \right\} \dots\dots\dots(27)$$

をうる。式 (23)~(26) あるいは (24) の代りに (27) を用いれば、ある x に対する u_0, b, σ_0, a を任意に与えて、それに接続する解を数値的に求めることができる。ここで考える場合 $x=0$ で $a=b=0$ となる。

2. と同様に、一定の中心流速をもち、直線的にひろがっていくとする。すなわち

$$\begin{aligned} u_0 &= \text{constant} \\ b &= \beta x \\ a &= \alpha x \end{aligned}$$

とおくと、式 (27) より $\sigma_0 = \tau_0/x$ 、 τ_0 : constant となる。式 (23), (25), (26) より

$$u_0^2 \beta / \sqrt{2} = g \alpha \tau_0 \dots\dots\dots(28)$$

$$(\pi + 2) u_0^2 \beta^2 = \sqrt{2} \pi \delta \epsilon^2 u_0^2 \beta + 4 g \alpha^2 \tau_0 \dots\dots\dots(29)$$

$$u_0 \beta \tan^{-1} \frac{\alpha}{\beta} + \alpha w = 2 \sqrt{\pi} \epsilon^2 u_0 \frac{\beta^3}{(\beta^2 + \alpha^2)^{3/2}} \dots\dots\dots(30)$$

となる。式 (29) に (28) および (30) を代入して τ_0 および ϵ を消去すると、

$$u_0 \text{ が } r = \alpha/\beta \dots\dots\dots(31)$$

の関数として次のように求められる。

$$u_0 = \frac{\delta r (1+r^2)^{3/2} w}{\sqrt{2} (\pi + 2) - 4 r - \delta (1+r^2)^{3/2} \tan^{-1} r} \dots\dots\dots(32)$$

式 (31) より (30) を使って

$$\beta = \frac{\sqrt{2} \pi \delta \epsilon^2}{(\pi + 2) - 2 \sqrt{2} r} \dots\dots\dots(33)$$

式 (30) より

$$\tau_0 = \frac{u_0^2}{\sqrt{2} g r} \dots\dots\dots(34)$$

となる。また送気量は式 (27) より

$$q = \sqrt{\pi} \tau_0 \alpha \left\{ w + (1+r^2)^{-1/2} u_0 \right\} \dots\dots\dots(35)$$

から求められる。これらの諸式を無次元量で表示して、

$$U_0 = u_0/w, T_0 = g \tau_0/w^2, Q_0 = g q/2 \epsilon^2 w^3 \dots\dots\dots(36)$$

とおく。さらに β および α は次元をもたないが、陽に ϵ を含まぬ表現をうるために

$$B_0 = \beta/\epsilon^2, A_0 = \alpha/\epsilon^2 \dots\dots\dots(37)$$

とおくと

$$r = A_0/B_0 \dots\dots\dots(38)$$

となる。式 (36)~(38) を用いれば、式 (32)~(35) は次のように表わされる。

$$U_0 = \frac{\delta r (1+r^2)^{3/2}}{\sqrt{2}(\pi+2) - 4r - \delta(1+r^2)^{3/2} \tan^{-1}r} \dots\dots\dots(39)$$

$$B_0 = \frac{\sqrt{2\pi}\delta}{(\pi+2) - 2\sqrt{2}r} \dots\dots\dots(40)$$

$$A_0 = rB_0 \dots\dots\dots(41)$$

$$T_0 = \frac{U_0^2}{r\sqrt{2}} \dots\dots\dots(42)$$

$$Q_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} AT_0 \{1 + (1+r^2)^{-1/2} U_0\} \dots\dots\dots(43)$$

これらの式より、 U_0, T_0, B_0, A_0 を Q_0 の関数として求めると、図-13, 14, 15 の実線のようになる。流速分布の実験値を用いて、 ϵ を算定すると図-16 のようになる。図-8 の点線が誤差分布を仮定した流速分布である。また図-16 から、 ϵ を Q にはよらない定数とみる

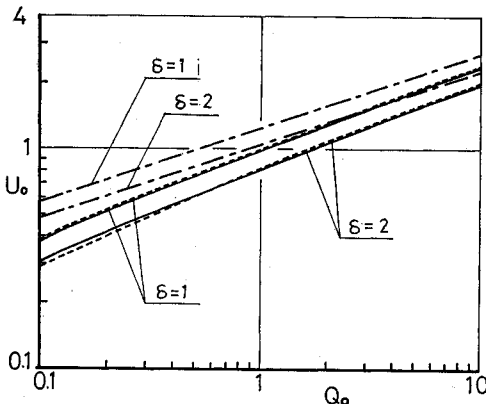


図-13 U_0 と Q_0 の関係

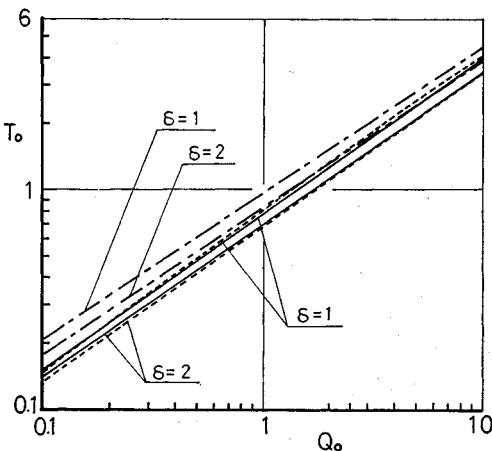


図-14 T_0 と Q_0 の関係

ことは妥当性がある。したがって送気量を変えた場合の気泡噴流の変化を容易に推定することができる。 $r = A_0/B_0$ の計算結果を図-17 に示す。図中の実験値は、流速分布、気泡密度分布におおの最適な β, α を求め r の値を算出したものである。実験値は $\delta=2$ の方の傾向を示している。

次に相対速度が無視できるような場合には問題は簡単になる。すなわち、気泡が極めて小さいとか、あるいは噴流流速が非常に速いとか、この場合にあたり、自然対流の場合と力学的には全く同じになる。

まず $w=0$ とおくと式 (32) より次式をうる。

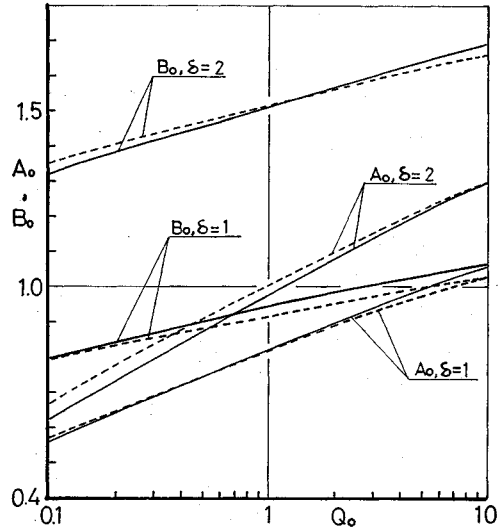


図-15 A_0, B_0 と Q_0 の関係

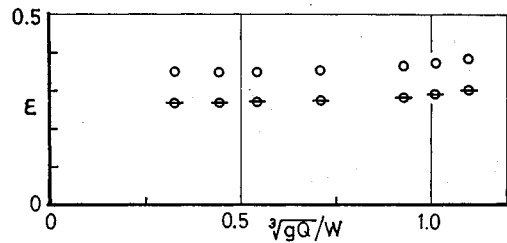


図-16 ϵ と送気量の関係 (○は $\delta=1$, □は $\delta=2$)

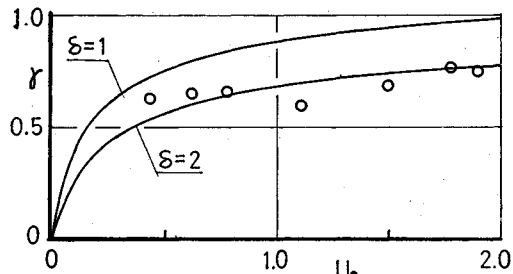


図-17 r と U_0 の関係 (実線は理論値, ○は実験値)

$$\sqrt{2}(\pi+2)-4r-\delta(1+r^2)^{3/2}\tan^{-1}r=0 \dots (44)$$

r の値は

$$r = \begin{cases} 0.90805 & [\delta=2] \\ 1.11397 & [\delta=1] \end{cases} \dots (45)$$

となり、式 (33) より

$$B_0 = \beta/\varepsilon^2 = \begin{cases} 1.9482 & [\delta=2] \\ 1.2591 & [\delta=1] \end{cases} \dots (46)$$

式 (31) より

$$A_0 = \alpha/\varepsilon^2 = \begin{cases} 1.7691 & [\delta=2] \\ 1.4026 & [\delta=1] \end{cases} \dots (46)$$

をうる。次に式 (27), (28) より u_0 および τ_0 の送気量 q に対する関係を求めると、

$$u_0 = \left(\frac{2}{\pi} \frac{1+r^2}{\beta^2}\right)^{1/6} (gq)^{1/3} \dots (47)$$

$$\tau_0 = \left(\frac{1+r^2}{\sqrt{2}\pi r \alpha^2}\right)^{1/3} \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \dots (48)$$

となり、さらに式 (45), (46) を代入すると

$$u_0 = \begin{cases} 0.8209 & (gq/\varepsilon^2)^{1/3} \\ 0.9826 & (gq/\varepsilon^2)^{1/3} \end{cases} \dots (49)$$

$$\tau_0 = \begin{cases} 0.5248 & (q^2/g\varepsilon^4)^{1/3} \\ 0.6128 & (q^2/g\varepsilon^4)^{1/3} \end{cases} \dots (50)$$

となる。 $w=0$ の場合について計算を行っているわけであるが、0 でない気泡の相対速度 w を用いて無次元化して差し支えない。そうすれば式 (49), (50) は

$$U_0 = \begin{cases} 1.0343 Q_0^{1/3} & [\delta=2] \\ 1.2380 Q_0^{1/3} & [\delta=1] \end{cases} \dots (51)$$

$$T_0 = \begin{cases} 0.8331 Q_0^{2/3} & [\delta=2] \\ 0.9728 Q_0^{2/3} & [\delta=1] \end{cases} \dots (52)$$

となる。式 (51), (52) の関係を 図-13, 14 に一点鎖線で示す。噴流の広がりは送気量によらず一定であり、噴流流速は送気量の 1/3 乗に比例し、気泡密度は 2/3 乗に比例することが得られる。Rouse, Yih & Humphreys (1952) は line heat source 上の heated plume の速度および温度を測定した。そして速度分布および温度分布は誤差分布を示し、それぞれ $\exp(-32 y^2/x^2)$, $\exp(-41 y^2/x^2)$ を得ている。また、Lee, Emmons (1961)¹⁰⁾ は forced plume について理論および実験を行っている。この理論の中で line source が本論文の参考に十分なりうる。噴出幅が高さ x に比較して十分小さいと見なされるとき、速度分布および温度分布は、 $\exp(-30.7 y^2/x^2)$, $\exp(-37.9 y^2/x^2)$ となる。これら実験結果から、いずれも運動量輸送理論すなわち $\delta=2$ についての計算結果と同じ傾向を示している。したがって $\delta=2$ についての ε は、Rouse らによれば 0.301, Lee らによれば 0.304 となり、気泡噴流の ε 図-16 とほぼ同程度である。ゆえに ε を pure plume も気泡噴流も同じ値の不変定数として取り扱うことは、可能であると思える。

6. 厳密解と近似解との比較

誤差分布の近似解と 2. の厳密解との比較を容易にするために、厳密解の流速分布および密度分布を誤差分布におく。すなわち、流速分布 ϕ' は

$$\phi' = U_0 e^{-\zeta^2/B_1^2} \dots (53)$$

気泡密度分布 θ は

$$\theta = T_{01} e^{-\zeta^2/A_1^2} \dots (54)$$

厳密解の結果を用いて、 U_{01} , T_{01} , B_1 , A_1 を定めねばならない。気泡噴流において支配的な働きをもつと思われる現象をあげると次のようになる。

- ① 気泡の浮力による運動量の増大
- ② 流れによる気泡の輸送、すなわち空気量の保存
- ③ 乱流拡散による噴流中の流れ量の増大

これらの現象に留意して、噴流の状態をあらゆる支配的な量として

$$\left. \begin{aligned} \text{噴流中の流量} \quad r &\equiv 2 \int_0^{y_R} u dy \\ \text{送気量} \quad q &\equiv 2 \int_0^{y_R} (u+w) \sigma dy \\ \text{運動量} \quad m &\equiv 2 \int_0^{y_R} u^2 dy \\ \text{滞留空気量} \quad S &\equiv 2 \int_0^{y_R} \sigma dy \end{aligned} \right\} \dots (55)$$

をあげることができる。これらを ϕ' および θ を用いて表わせば

$$u = w\phi', \quad \sigma = w^2\theta/gx, \quad y = c^{2/3}xz \dots (56)$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} R_1 &\equiv r/(2 c^{2/3}wx) = \int_0^{\zeta_R} \phi' d\zeta = \phi_{\zeta=\zeta_R} \\ Q_1 &\equiv gq/2 c^{2/3}w^3 = \int_0^{\zeta_R} (1+\phi')\theta d\zeta \\ M_1 &\equiv m/(2 c^{2/3}w^2x) = \int_0^{\zeta_R} \phi'^2 d\zeta \\ S_1 &\equiv gs/(2 c^{2/3}w^2) = \int_0^{\zeta_R} \theta d\zeta \end{aligned} \right\} \dots (57)$$

式 (57) を満足させるため式 (53) と (54) を使うと、

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= (\sqrt{\pi}/2) U_{01} B_1 \\ Q_1 &= (\sqrt{\pi}/2) \{T_{01} A_1 + U_{01} T_{01} B_1 A_1 / \sqrt{B_1^2 + A_1^2}\} \\ M_1 &= (\sqrt{\pi}/2\sqrt{2}) U_{01}^2 B_1 \\ S_1 &= (\sqrt{\pi}/2) T_{01} A_1 \end{aligned} \right\} \dots (58)$$

となる。式 (58) より U_{01} , B_1 , A_1 , T_{01} は、

$$\left. \begin{aligned} U_{01} &= \sqrt{2} M_1/R_1 \\ B_1 &= 2 R_1 / (\sqrt{\pi} U_{01}) \\ A_1 &= \left[\frac{4}{\pi} \left\{ \frac{R_1}{(Q_1/S_1) - 1} \right\}^2 - B_1^2 \right]^{1/2} \\ T_{01} &= 2 S_1 / (\sqrt{\pi} A_1) \end{aligned} \right\} \dots (59)$$

となる。ここで気泡噴流についての流速分布の幅 b_1 、気泡密度分布の幅 a_1 を

$$b_1 = c^{2/3} x B_1 \dots\dots\dots (60)$$

$$a_1 = c^{2/3} x A_1 \dots\dots\dots (61)$$

により与えることにする。さて式 (22) の仮定に従えば、

$$l = \varepsilon b_1 = \varepsilon c^{2/3} x B_1 \dots\dots\dots (62)$$

で与えられるから式 (5) より

$$cx = \varepsilon c^{2/3} x B_1 \dots\dots\dots (63)$$

したがって

$$c^{1/3} = \varepsilon B_1 \dots\dots\dots (64)$$

なる関係が得られる。式 (64) を用いて b_1 および a_1 を式 (37) と同様に無次元化して

$$B_2 = b_1 / \varepsilon^2 x = B_1^3 \dots\dots\dots (65)$$

$$A_2 = a_1 / \varepsilon^2 x = B_1^2 A_1 \dots\dots\dots (66)$$

となる。また式 (64) を用いて式 (36) の Q_0 と同様

$$Q_2 = gq/2 \varepsilon^2 w^3 = B_1^3 Q_1 \dots\dots\dots (67)$$

となり、 U_{01} 、 B_2 、 A_2 、 T_{01} の Q_2 に対する関係は、ただちに式 (39)~(43) と比較しうるものとなる。図-13、14、15 に点線で示す。次に相対速度 0、すなわち Schmidt の解もまた誤差分布に仮定すれば、次の関係式が得られる。式 (46)、(47)、(48) の表現にすると、

$$\left. \begin{aligned} B_0 = B_1^3 = & \begin{cases} 1.9010 & [\delta=2] \\ 1.2010 & [\delta=1] \end{cases} \\ A_0 = B_1^2 A_1 = & \begin{cases} 1.7538 & [\delta=2] \\ 1.3463 & [\delta=1] \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

$$u_0 = U_{01} \left(B_1^2 \int_0^{z_R} \phi' \theta d\zeta \right)^{-1/3} (gq/2 \varepsilon^2)^{1/3}$$

$$\tau_0 = T_{01} \left(B_1^2 \int_0^{z_R} \phi' \theta d\zeta \right)^{-2/3} (gq/2 \varepsilon^2)^{2/3} / g$$

したがって

$$U_0 = \begin{cases} 1.0452 Q_0^{1/3} & (\delta=2) \\ 1.2591 Q_0^{1/3} & (\delta=1) \end{cases} \dots\dots\dots (69)$$

$$T_0 = \begin{cases} 0.8374 Q_0^{2/3} & (\delta=2) \\ 0.9835 Q_0^{2/3} & (\delta=1) \end{cases} \dots\dots\dots (70)$$

となり、ただちに比較しうるものとなる。

厳密解との比較により、流速分布および密度分布を誤差分布で近似しても気泡噴流の性質は十分記述しうるということがわかった。

7. エネルギー効率

気泡のもつエネルギーがどの程度の割合で水流のエネルギーに変わるかは、工学上非常に重要な問題である。

2. の計算結果を用いてエネルギー効率を算定する。

鉛直方向単位長さ当たりで気泡の消費するエネルギーは次式で表わされる。

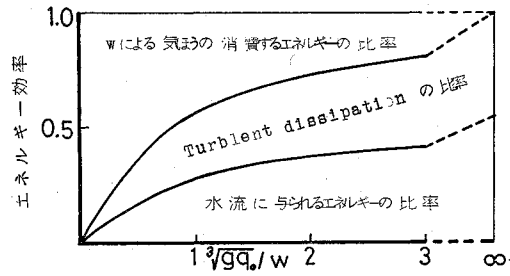


図-18 エネルギー効率 ($\delta=2$)

$$\int_0^{z_R} \sigma g(u+w) dy = w^3 c^{2/3} \int_0^{z_R} (1+\phi') \theta d\zeta = gq_0/2 \dots\dots\dots (71)$$

水流に与えられるエネルギーは、

$$\int_0^{z_R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^3}{2} \right) dy = w^3 c^{2/3} \int_0^{z_R} \frac{1}{2} \phi'^3 d\zeta \dots\dots (72)$$

式 (72) と (71) の比によってエネルギー効率が算定される。その差分は turbulent dissipation と気泡の相対速度によるものである。図-18 に示す。

8. 結 語

Schmidt の理論を気泡噴流に拡張した。その結果流速分布、気泡密度分布を得ることができた。実験結果から c を算定し、次のことが確かめられた。

- (1) 気泡の相対上昇速度の影響により、噴流の広がり角度は一定とならず、 c は送気量によって異なってくる。
- (2) 実測結果によれば、混合距離は噴流幅に比例し、その比例定数は pure plume の場合と同一で不変定数として考えて差し支えないことが見出せた。すなわち、混合距離は噴出口よりの高さでなく、噴流の幅によって規制される。
- (3) 今度の実験では、渦度輸送理論より運動量輸送理論のほうが妥当である。
- (4) 気泡の相対上昇による乱れは、乱流拡散に対しては無視しうると考えられる。
- (5) 噴流中心流速は、送気量の多い時には、 $w=0$ の中心流速に漸近する。また送気量の少ないときには、それより低下する。
- (6) 噴流幅は送気量の少ないほど減少する。
- (7) 気泡噴流中心密度は、送気量の多いときには、 $w=0$ の中心密度に漸近する。また送気量の少ないときには、それより低下する。
- (8) 気泡分布の幅は送気量の少ないほど減少し、噴流幅よりさらに顕著である。
- (9) エネルギー効率については、送気量の多いときは、 $w=0$ の効率に近づくし、送気量が少ないとそれよ

り低下する。

なおこの計算にあたって、九州大学 FACOM 230-75, 関東学院大学 FACOM 270-25 を使用した。

参 考 文 献

- 1) Tollmien, W. : Berechnung der turbulenten Ausbreitungsvorgänge, Z.A.M.M., 4, 468 (1962).
- 2) Schmidt, W. : Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft, Z.A.M.M., 21, 265 & 351, (1941).
- 3) Pai, S.I. : Fluid Dynamics of Jets, D. Van Nostrand Comp., Inc. (1954).
- 4) Abraham, G. : Jet diffusion in liquid of greater density, Proc. A.S.C.E., 86, [HY 6], (1960).
- 5) Morton, B.R. : Forced Plumes, J. Fluid Mech., 5, [1], 151/163 (1959).

- 6) Hino, M. : Forces Plumed in a Stably Stratified Fluid, Trans. of JSCE, 86, Oct. (1962).
- 7) 化学工学協会編 : 気泡・液滴工学, 日刊工業新聞社 (1969).
- 8) Haberman, W.L. and Morton, R.K. : An experimental study of bubbles moving in liquids, Proc. A.S.C.E., Jan. (1954).
- 9) Rouse, H., Yih, C.S. and H.W. Humphreys : Gravitational convection from a buoyant source, Tellus, Vol. 4, pp. 201-210, (1952).
- 10) Lee, S.L. and H.W. Emmons : A study of natural convection above a line fire, J. Fluid. Mech, Vol. 11, pp. 353-368 (1961).
- 11) 応用力学研究所水文学研究委員会 : 空防波堤の研究に就いて, 九州大学応用力学研究所報, 第5号 (昭和 29 年), 第 13 号 (昭和 34 年).

(1974.12.4・受付)