

風による吊橋の多自由度非線形応答に関する研究

NONLINEAR ANALYSIS OF AERODYNAMIC RESPONSE OF SUSPENSION BRIDGES IN WIND

久保 喜延*・伊藤 学**・宮田 利雄***

By Yoshinobu KUBO, Manabu ITO and Toshio MIYATA

1. まえがき

本論文では、吊橋のように可撓性に富む長大スパン構造物が風の中で示す空力弹性振動を、振動する物体に作用する空気力、すなわち非定常空気力の測定値を用い、その振幅に対する非線形性に着目して解析し、種々検討した結果を示すものである。^{注1)}

構造物の耐風安定性の検証を対象とする既往の研究によって、構造物の示す空力弹性振動は種々の要因によって発生することが知られている。特に、自励振動のような不安定振動の発生は、構造物を破壊に至らしめるとの認識から多くの研究が行われてきた。しかし、長大スパン構造物の耐風設計においては、不安定振動に対する安定性の検討のみならず、種々の要因に基づく空力弹性振動を、構造物の耐荷挙動との関係、あるいは車両の走行性や累積疲労破壊など構造物の使用限界状態に対する点などにおいて評価することが重要視されるようになっていている。このとき、単に発振限界風速を求めるばかりではなく、風速と振動振幅の関係を定量的に把握することが必要となってくる。

いずれの場合においても、構造物の応答現象は、作用外力が適切に把握されていれば完全に記述しうるはずである。しかし、複雑な断面を持つ構造物の空力弹性振動において、作用空気力の評価法そのものが問題となりう

る現状では、まず空気力を適当に定式化してその空気力係数を何らかの方法によって定め、これを考えるべき構造系に適用して応答を求め、その解析結果を観測結果と比較検討すること、そしてその方法を議論することが意味を持つであろう。

ここでは、振動する物体に作用する非定常空気力を実験的に求め、これが一般的には振幅について非線形であることに着目して、長大スパン構造物の空力弹性振動の応答特性を記述するための解析法を示し、これによるいくつかの構造系の応答解析結果を実験的に観測した結果と比較しつつ、議論することとする。作用空気力については普通行われるように、振動変位、ならびに振動速度に比例する項の和から成るとして扱い、異なる振幅について求めることにしている。このうち、速度比例項は、ある風速における空力減衰（あるいは発散）を評価することになるが、自励振動のような不安定振動の発生が見られない安定な断面の場合には（正）減衰力としての働きをし、一方、不安定振動が発生するような場合には負減衰効果を生むことがよく知られている。

着目すべき要点として、まず、長大スパン橋梁の耐風性検証のための風洞実験において用いられる部分（二次元）模型と全体（三次元）模型の示す応答の相関性がある。周知のとおり、部分模型実験とは橋桁の二次元剛体模型をスプリングによって支持する方法であり、観測される挙動は二次元的なものである。これに対し、全体模型実験は実物に相似した弾性模型を用いる方法であり、観測される空力弹性振動には固有の振動形がかかる。したがって、作用空気力の振幅に対する非線形性を考えると、双方の観測において、それぞれの構造系の特性に応じた挙動が見られるはずである。この二次元構造系と三次元構造系における応答の相関について、従来体系的に検討された例はほとんどなく、Bleich の理論的研究¹⁾、Scruton の実験的研究²⁾、あるいは Scanlan

注 1) 本研究については、部分的に、構造物の耐風性に関する第 3 回シンポジウム (1974)¹³⁾、第 29 回¹⁴⁾、第 30 回¹⁵⁾土木学会年次学術講演会 (1974, 1975)、および 4th International Conference on Wind Effects on Buildings and Structures (London, 1975)¹⁶⁾において発表されている。

* 正会員 工博 九州工業大学講師 工学部開発土木工学科

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

らによる若干の考察^{3), 4)}があるのみである。

このほか、長大スパン橋梁の空力弹性振動においては、鉛直曲げ一ねじれ連成振動がしばしば観測されるが、このような連成振動の場合と、たとえばねじれのみの振動と考えた場合の応答について検討し、観測される現象と非定常空気力とのかかわり方を、曲げ、ねじれなどの異なる振動モードを想定して考える。ここで展開している議論は、一定、一様な風のもとでの場合のものであるが、終りに、本研究に示した解析法の一つの応用例として、スパン方向に風速が一様でない場合を想定した解析結果を示してある。

2. 多自由度非線形応答解析

(2) 空力弹性振動と非定常空気力

吊橋のような長大スパン構造物の風による振動には、鉛直曲げ、ねじれ、および横曲げ振動の3つが挙げられるが、一様な風の作用のもとでの顕著な不安定振動は、鉛直曲げ、あるいはねじれ振動、または両者の連成した振動のいずれかの形で見られるので、ここではこれらの振動を対象として扱うこととする。

作用外力である非定常空気力としては、実験的に求めた値を用いるのであるが、その測定は、いわゆる強制振動法とよばれる方法によっている。すなわち、風洞内の気流中に二次元剛体模型を設置し、電動機によって一定の振幅、振動数にて加振し、空気力を模型支持ばりの曲げひずみによって検出するのである。このとき、模型が持つ慣性力を消去して空気力のみを取り出す方法にいくつかの方法が考えられる。従来、カウンターウェイト⁵⁾、あるいは供試模型と同一なダミー模型^{6), 7)}を風洞壁外において同時に加振し、気流の静止時において検出される出力差を零になるように調整することが行われてきた。この方式では、静止空気中の作用空気力を気流吹送時の空気力から差し引くことになるが、この効果は微少であるとして無視されている。この非定常空気力の測定事例は決して多くなく、データの積み重ねが行われているのが現状といふことができる。こうした測定技術上の問題点についてその適否を明確にすることははなはだ困難といわざるを得ないが、本研究では、静止空気中の空気力、ひいては吹送時の空気力を可能な限り正しく評価するという主旨から、後述するスケルトン模型方式をとることにしている。

測定された非定常空気力は、一般に振幅について非線形であるから、この非線形性を考慮した解析法が必要になってくる。二次元部分模型の1自由度系としての応答解析については、森光、および本論文の共著者⁷⁾が同じような観点からすでに報告し、定常振動の応答軌跡が求

められることを示したが、定常振動以外の場合については議論ができず、しかも図式解法のために扱いが少々面倒である。2自由度系（鉛直曲げ一ねじれ連成振動）については、よく知られているように、航空機翼のフランジャー問題に適用されている、いわゆる $U-g$ 法^{1), 8)}があるが、線形空気力を用いて限界風速を求めるための方法であり、振動振幅に関しては何らの情報も与えられない。本研究では、まえがきに述べたように、任意の風速、振幅における応答が記述できるように解析方法を考えることにした。測定非定常空気力は二次元的に求められるのであるが、これを三次元系へ適用する場合には、いわゆるストリップ理論を前提としている。非線形応答解析には種々の方法^{9), 10)}が考えられているが、ここで展開する手法は、外力の関数表示がきわめてむずかしいこと、および非定常空気力が一周期の間にわたって形成されるものとして測定されていることのために、振動は一周期前の最終状態を初期条件とし、統く一周期の間は線形に応答するという仮定のもとに、一周期ずつ線形応答を繰り返させて逐次応答を求めるものである。この手法の精度は非定常空気力の測定精度に直接かかわってくるため、上述したように、非定常空気力をできる限り正しく評価することが重要である。

(2) 振動方程式の記述

ここでは、前述した種々の振動現象を一般的に記述するための解析手法として、鉛直曲げ一ねじれ連成振動の場合を取り上げて論を展開する。ただし、ここでいう連成振動とは、外力としての空気力の連成項に基づくもので、構造系には連成要素はないものと考える。また、対象とする構造は従来のトラス補剛吊橋のようなねじれ振動が卓越する場合とする。振動方程式は次の形になる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & O \\ O & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & O \\ O & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & O \\ O & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(t) \\ \mathbf{P}_2(t) \end{bmatrix} \quad \dots \quad (1)$$

ただし、下添字 1, 2 はそれぞれねじれ振動および鉛直曲げ振動に関するもので、 M_i : 質量マトリクス、 C_i : 構造減衰マトリクス、 K_i : 剛性マトリクス（導出は文献 11))、 \mathbf{q}_i : 位変ベクトル、 f_{ij} : 空気力（速度成分）マトリクス、 g_{ij} : 空気力（変位成分）マトリクス、 \mathbf{P}_i : 前記二つの自励力を除く空気力、 \cdot : 時間微分である。

式 (1) を振動形法によって解析することにし、まず、減衰項、外力項を零とした次式から固有值、固有ベクトルを求める。

$$\begin{bmatrix} M_1 & O \\ O & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & O \\ O & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2)$$

ここで、 $\{\mathbf{q}_1\} = \{\mathbf{q}_{10}\} e^{i\omega t}$, $\{\mathbf{q}_2\} = \{\mathbf{q}_{20}\} e^{i\omega t}$ とおいて式(2)に代入すると、モーダルマトリックスが得られ、次の直交変換が可能となる。

$$\{\mathbf{q}_1\} = [U_1] \{\varphi_1\}, \{\mathbf{q}_2\} = [U_2] \{\varphi_2\} \quad \dots \dots \dots (3)$$

ただし、 $[U_i]$ ：モーダルマトリックス、 $\{\varphi_i\}$ ：規準座標である。このモーダルマトリックスを用いて規準座標 $\{\varphi_i\}$ を決定すると、式(3)の関係より変位 $\{\mathbf{q}_1\}$, $\{\mathbf{q}_2\}$ が決まる。

以下では、はじめに述べたように、式(1)において、 $\mathbf{P}_i(t)=\mathbf{0}$ のとき、すなわち、空気力として自励力のみが作用する場合について検討する。式(1)に式(3)を代入し、 $[U_i]^T$ をそれぞれ式(1)の第1式および第2式の左から乗じ、両辺について、モードの正規化を行って、それぞれ m 番目、 n 番目の振動形に着目すると、次の2式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{\varphi}_{1m} + 2\zeta_{1m}\omega_{1m}\dot{\varphi}_{1m} + \omega_{1m}^2\varphi_{1m} \\ & + \frac{1}{m_{1m}^*} \left[\left(\sum_{k=1}^l U_{1km} F_{12kk} U_{2kn} \right) \dot{\varphi}_{2n} \right. \\ & \left. + \left(\sum_{k=1}^l U_{1km} G_{12kk} U_{2kn} \right) \varphi_{2n} \right] = 0 \\ & \ddot{\varphi}_{2n} + 2\zeta_{2n}\omega_{2n}\dot{\varphi}_{2n} + \omega_{2n}^2\varphi_{2n} \\ & + \frac{1}{m_{2n}^*} \left[\left(\sum_{k=1}^l U_{2kn} F_{21kk} U_{1km} \right) \dot{\varphi}_{1m} \right. \\ & \left. + \left(\sum_{k=1}^l U_{2kn} G_{21kk} U_{1km} \right) \varphi_{1m} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ただし、

$$2\zeta_{1m}\omega_{1m} = ([U_1]^T [C_1 - f_{11}] [U_1])_m / m_{1m}^*,$$

$$\omega_{1m}^2 = ([U_1]^T [K_1 - g_{11}] [U_1])_m / m_{1m}^*,$$

$$F_{12kk} = -f_{12kk}, \quad G_{12kk} = -g_{12kk},$$

$$F_{21kk} = -f_{21kk}, \quad G_{21kk} = -g_{21kk},$$

$$2\zeta_{2n}\omega_{2n} = ([U_2]^T [C_2 - f_{22}] [U_2])_n / m_{2n}^*,$$

$$\omega_{2n}^2 = ([U_2]^T [K_2 - g_{22}] [U_2])_n / m_{2n}^*,$$

$$m_{1m}^* = ([U_1]^T [M_1] [U_1])_m,$$

$$m_{2n}^* = ([U_2]^T [M_2] [U_2])_n$$

m , n , k : 各マトリックスの成分, l : 分割数である。

鉛直曲げねじれの連成振動が発現するということは、この次数 m , n が適当に定まるときであるが、いま連成次数 m , n は最も連成度の高い組み合わせを選ぶことに

* 連成する二つの振動を考える場合、それらの振動形ができるだけ近い形になるように選ぶための方法である。たとえば、右図に示す各種の振動形について、(1)をねじり振動形、その固有ベクトルを \mathbf{U}_1 (正規化した固有ベクトル) とし、(2), (3)を鉛直振動形、その固有ベクトルを \mathbf{U}_2 , \mathbf{U}'_2 とする。

このとき、ねじれ振動形 \mathbf{U}_1 に対して最も連成度の高い鉛直振動形は (2), (3) のうちどちらであるかというと、(2)の方であろう。これを内積で示すと次の不等式となる。

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}'_2) < (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) < 1$$

したがって、種々の振動形が混在する場合には、上記の手法によって、連成する振動形の組み合わせは連成度の高いものとなり、この組み合わせによる応答解析をしておけば、連成振動に対しては安全側となる。なお、このような扱いは空力弹性振動問題においては古く Bleich の研究論文¹⁾などにも見られ、使用して差し支えないものと考えている。

する。その方法としては、 $[U_1]$, $[U_2]$ の各固有ベクトル同志の内積が最大となる m , n をあてることとする。こうして、 φ_{1n} , φ_{2n} が求まれば、式(3)から $\{\mathbf{q}_1\}$, $\{\mathbf{q}_2\}$ が得られる。

ここで φ_{ij} を決定するためには、式(4)の連立方程式を解く必要がある。従来、この解法にはいわゆる $U-g$ 法が適用されたが、ここでは、以下のようにして式(4)を解を見出すことにする。なお、式(4)の代わりに次の2式を用いても一般性を欠くことはないので、以下、次式によって論を展開する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 + 2a_{11}\dot{\varphi}_1 + b_{11}\varphi_1 + a_{12}\dot{\varphi}_2 + b_{12}\varphi_2 &= 0 \\ \dot{\varphi}_2 + 2a_{22}\dot{\varphi}_2 + b_{22}\varphi_2 + a_{21}\dot{\varphi}_1 + b_{21}\varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

この解を求めるために、 $\varphi_1 = \varphi_{10}e^{i\omega t}$, $\varphi_2 = \varphi_{20}e^{i\omega t}$ とおき、 φ_{10} , φ_{20} が自明でない解を得る条件を求めるとき式のようになる。

$$\left| \begin{array}{cc} \lambda^2 + 2a_{11}\lambda + b_{11} & a_{12}\lambda + b_{12} \\ a_{21}\lambda + b_{21} & \lambda^2 + 2a_{22}\lambda + b_{22} \end{array} \right| = 0 \dots \dots \dots (6)$$

これを λ について整理すると、

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + 2(a_{11} + a_{22})\lambda^3 + (4a_{11}a_{22} + b_{11} + b_{22} - a_{12}a_{21})\lambda^2 \\ & + (2b_{11}a_{22} + 2a_{11}b_{22} - b_{12}a_{21} - b_{21}a_{12})\lambda \\ & + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0 \end{aligned} \dots \dots \dots (7)$$

上式を解くために次の変数変換

$$\left. \begin{aligned} z &= \lambda + (a_{11} + a_{22})/2, \\ d_1^2 &= b_{11} - a_{11}^2, \quad d_2^2 = b_{22} - a_{22}^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

を導入し、整理すると次のようになる。

$$z^4 + az^2 + bz + c = 0 \dots \dots \dots (9)$$

ただし、

$$a = d_1^2 + d_2^2 - (a_{11} - a_{22})^2/2 - a_{12}a_{21}$$

$$b = -(a_{11} - a_{22})(d_1^2 - d_2^2) + (a_{11} + a_{22})a_{12}a_{21}$$

$$-b_{12}a_{21} - b_{21}a_{12}$$

$$c = (a_{11} - a_{22})^4/16 + (a_{11} - a_{22})^2(d_{11}^2 + d_{22}^2)/4$$

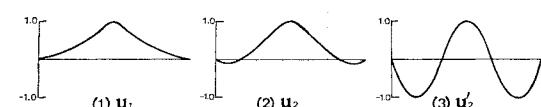
$$+ d_1^2 d_2^2 - a_{12}a_{21}(a_{11} + a_{22})^2/4$$

$$+ (b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12})(a_{11} + a_{22})/2 - b_{12}b_{21}$$

である。四次方程式の根は2組の互いに共役な複素根で構成されるから、式(9)は次のように α , β_1 , β_2 を実係数を持つ二次方程式の積の形で表わされる。

$$(z^2 + \alpha z + \beta_1)(z^2 - \alpha z + \beta_2) = 0 \dots \dots \dots (10)$$

式(9), (10)において係数比較をすると、



$$-\alpha^2 + \beta_1 + \beta_2 = a, \quad \alpha(\beta_2 - \beta_1) = b, \quad \beta_1\beta_2 = c$$

.....(11)

となる. これから α を消去して次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} & (\beta_1 + \beta_2)^3 - a(\beta_1 + \beta_2)^2 - 4c(\beta_1 + \beta_2) \\ & + 4ac - b^2 = 0, \quad \beta_1\beta_2 = c \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

ここで、係数 a, b, c についてみると、空気力成分は振動数の二乗に比してかなり小さいという空気力の特性から、 $d_1^2, d_2^2 \gg a_{ij}$ ($i, j=1, 2$) であり、 $a, c > 0, |a|, |c| \gg |b|$ となる。また、式(11)の第1式から、 $\beta_1 + \beta_2 > a$ であり、式(12)の第1式の左辺を $f(x)$ とおくと $f(a) = -b^2 < 0$ となる。極値をとる点は、 $x_1 = \beta_1 + \beta_2 = (a + \sqrt{a^2 + 12c})/3, x_2 = \beta_1 + \beta_2 = (a - \sqrt{a^2 + 12c})/3$ であるから、 $a, c > 0$ より $x_1 > 0, x_2 < 0$ となって、式(12)の第1式の三実根のうちの最大根が求めるべき根 $\beta_1 + \beta_2 > a$ として常に存在することになる。式(12)の第1式の根を Cardano の方法によって解いて、その最大根を $\xi_{\max} (= \beta_1 + \beta_2)$ とすれば、式(12)より二次方程式の根と係数の関係によって、 β_1, β_2 が求まり、式(11)の第2式より α が決定される。

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 = (\xi_{\max} + \sqrt{\xi_{\max}^2 - 4c})/2 \\ \beta_2 = (\xi_{\max} - \sqrt{\xi_{\max}^2 - 4c})/2 \\ b < 0 \rightarrow \alpha = \sqrt{\xi_{\max} - a} \\ b > 0 \rightarrow \alpha = -\sqrt{\xi_{\max} - a} \end{array} \right\} \dots \quad (14)$$

上式を式(10)に代入すると、

$$z_{1,2} = (-\alpha \pm i\sqrt{4\beta_1 - \alpha^2})/2,$$

となり、求めるべき解は式(8)によって示すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= (-\alpha - a_{11} - a_{22} \pm i\sqrt{4\beta_1 - \alpha^2})/2 \\ &= -\zeta_1 \omega_1 \pm i\omega_1 \\ \lambda_{3,4} &= (\alpha - a_{11} - a_{22} \pm i\sqrt{4\beta_2 - \alpha^2})/2 \\ &= -\zeta_2 \omega_2 \pm i\omega_2 \\ \zeta_1 &= (\alpha + a_{11} + a_{22})/2\omega_1, \quad \omega_1 = \sqrt{4\beta_1 - \alpha^2}/2 \\ \zeta_2 &= (-\alpha + a_{11} + a_{22})/2\omega_2, \quad \omega_2 = \sqrt{4\beta_2 - \alpha^2}/2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

したがって、式(5)の解は次のようになる。

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{-\zeta_1 \omega_1 t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) \\ &\quad + e^{\zeta_2 \omega_2 t} (c_3 \cos \omega_2 t + c_4 \sin \omega_2 t) \\ \varphi_2(t) &= \gamma_1 e^{-\zeta_1 \omega_1 t} (c_1 \cos (\omega_1 t + \theta_1) + c_2 \sin (\omega_1 t + \theta_1)) \\ &\quad + \gamma_2 e^{-\zeta_2 \omega_2 t} (c_3 \cos (\omega_2 t + \theta_2) + c_4 \sin (\omega_2 t + \theta_2))\end{aligned}\quad \dots \quad (16)$$

ただし、

c_i : 初期条件によって決定される定数

r_i : φ_1, φ_2 の振幅比

θ_i : φ_1, φ_2 の位相差

である。これら φ_1, φ_2 が求まれば、 $\varphi_{1m}, \varphi_{2n}$ の線形結合によって、式(1)の応答を議論することが可能となる。

各係数 a_{ij} , b_{ij} と空気力係数（表示方法は 3. で述べる）との関係を示すと次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} 2a_{11} &= 2\zeta_{10}\omega_{10} - (\pi\rho B^4\omega_1^2/\Theta\omega_1\phi_0)M_{\phi I} \\ a_{12} &= -(\pi\rho B^4\omega_2^2/\Theta\omega_2\bar{\eta})M_{\gamma I}, \\ a_{21} &= -(\pi\rho B^3\omega_1^2/M\omega_1\phi_0)L_{\phi I} \\ 2a_{22} &= 2\zeta_{20}\omega_{20} - (\pi\rho B^3\omega_2^2/M\omega_2\bar{\eta})L_{\gamma I} \\ b_{11} &= \omega_{10}^2 - (\pi\rho B^4\omega_1^2/\Theta\phi_0)M_{\phi R} \\ b_{12} &= -(\pi\rho B^4\omega_2^2/\Theta\bar{\eta})M_{\gamma R} \\ b_{21} &= -(\pi\rho B^3\omega_1^2/M\phi_0)L_{\phi R} \\ b_{22} &= \omega_{20}^2 - (\pi\rho B^3\omega_2^2/M\bar{\eta})L_{\gamma R} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

ただし、下添字 1, 2 はそれぞれねじれ振動、鉛直曲げ振動に関するものであり、 ω_{i0} ：構造系の固有振動数、 ω_i ：振動時の振動数、 ζ_{i0} ：構造減衰率、 Θ ：慣性モーメント、 M ：慣性質量、 ϕ_0 ：ねじれ振動振幅、 $\bar{\eta}$ ：鉛直曲げ振動振幅、 B ：代表長（補剛桁幅員）、 $M_{\phi I}$ 、 $M_{\phi R}$ 、 $L_{\phi I}$ 、 $L_{\phi R}$ ：回転振動 ϕ における空気力のモーメントおよび揚力の速度成分（下添字 I ），変位成分（下添字 R ）， $M_{\eta I}$ 、 $M_{\eta R}$ 、 $L_{\eta I}$ 、 $L_{\eta R}$ ：上下振動 η における空気力のモーメントおよび揚力の速度成分、変位成分、 ρ ：空気密度である。

(3) 定常振動解

鉛直曲げ一ねじれ連成振動解（式（16））のうち、定常振動解について考察し、実際の現象との関連を考えてみる。定常振動解を与える条件は、

$$\left. \begin{array}{l} q_1(t+T) = q_1(t), \\ q_2(t+T) = q_2(t), \quad (\omega T = 2\pi) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

である。上式に式(16)を代入し、 $c_i \neq 0$ ($i=1, 2, 3, 4$) を考慮して、式(18)を満たす条件を導くと、定常振動解を与えるのは、

- i) $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0, (\omega_1 = \omega_2)$
ii) $\zeta_1 = 0, \zeta_2 > 0$ (あるいは $\zeta_1 > 0, \zeta_2 = 0$)

のときとなる。このうち、i) の条件は、式(15), (11)および $\omega_1 = \omega_2$ から次式で示されるものと同値となる。

$$\left. \begin{aligned} a &= 2\sqrt{c}, \quad a_{11} + a_{22} = 0, \\ b &= -2a_{11}(b_{11} - b_{22}) - b_{12}a_{21} - b_{21}a_{12} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

この条件は非常に厳しいものであり、このような条件を満足する現象はほとんど現われないと考えてよいであろう。一方、ii) の条件は、式(15), (11) から

なる形に導かれる。さて、次に ii) の場合について実際の現象と関連づけてこれらの定常振動解を考察してみよう。

① $a_{11} > 0, a_{22} > 0$ の場合

空気力係数と関連づけると、式 (17) より、 $M_{\phi I} < 0, L_{\eta I} < 0$ の場合に対応する。これは従来の分類に従えば、純粋な二自由度フランジャーが生ずるといわれる場合であり、たとえば平板系に見られる現象である。仮に $\zeta_1 = 0$ とすると、式 (15) から

$$\alpha = -(a_{11} + a_{22}) < 0$$

したがって、 $\zeta_2 = (a_{11} + a_{22})/\omega_2 > 0$ となる。このことは、式 (17) から導かれる $q_1(t), q_2(t)$ は充分時間が経過すれば、それぞれの応答が式 (21) で表現される定常振動解となることを意味する。これは従来のトラス補剛吊橋に見られるような鉛直曲げ一ねじれ連成振動現象については、定常振動状態での振動数は、2つの振動数(鉛直曲げ振動数、ねじれ振動数)の中間にあると解釈するよりも、鉛直曲げ振動はねじれ振動に支配され、本質的にねじれ振動の振動数で振動が持続すると解釈する方が妥当であることを意味している。

② $a_{11} < 0, a_{22} > 0$ の場合

この条件を ① と同様に空気力係数と関連づけると、 $M_{\phi I} > 0, L_{\eta I} < 0$ の場合に対応する。この条件のもとでの定常振動解は一自由度ねじれフランジャー (Stall Flutter) とよばれるものに対応する。 $\zeta_1 = 0$ とすると、式 (15) から

$$\alpha = -(a_{11} + a_{22})$$

(2)-a) $|a_{11}| < a_{22}$ のとき

$$\alpha < 0, \zeta_2 = (a_{11} + a_{22})/\omega_2 > 0$$

となって、①と同じである。

(2)-b) $|a_{11}| > a_{22}$ のとき

$$\alpha > 0, \zeta_2 = (a_{11} + a_{22})/\omega_2 < 0$$

これは式 (20) を満たさないから定常解の条件とはならない。

③ $a_{11} > 0, a_{22} < 0$ の場合

このときの空気力係数との関係は、 $M_{\phi I} < 0, L_{\eta I} > 0$ の場合であり、ギャロッピング発生の条件となる。 $\zeta_2 = 0$ とすると、式 (15) より

$$\alpha = a_{11} + a_{22}$$

(3)-a) $a_{11} > |a_{22}|$ のとき

$$\alpha > 0, \zeta_2 = (a_{11} + a_{22})/\omega_1 > 0$$

となるから、このときの定常振動は次式で表現できる。

$$\left. \begin{aligned} \varnothing_1(\infty) &= c_3 \cos \omega_2 t + c_4 \sin \omega_2 t \\ \varnothing_2(\infty) &= \tau_2(c_3 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + c_4 \sin(\omega_2 t + \theta_2)) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (22)$$

(3)-b) $a_{11} < |a_{22}|$ のとき、式 (20) の下の式を満たさないから定常振動解とならない。

④ $a_{11} < 0, a_{22} < 0$ の場合

空気力係数とは $M_{\phi I} > 0, L_{\eta I} > 0$ の場合に対応する。 $\zeta_1 = 0$ とすると、

$$\alpha = -(a_{11} + a_{22}) > 0, \zeta_2 = (a_{11} + a_{22})/\omega_2 < 0$$

となり、式 (20) を満足しないから定常振動解の条件とならないが、 $\zeta_2 < 0$ であるから、発散振動となる。これらのことから、定常振動が発生する場合、式 (21) および式 (22) に示されるように、古典的フランジャーと明確に認められる場合を除いて、従来、たとえばねじり 1 自由度系とみなして良い振動と解釈していた現象にも、曲げ振動が必ず付随することが理解される。

(4) 定常振動解の安定判別

前項で論じた定常振動解について、その安定性を論じておくことにしよう。ここでは、定常振動解の形が既知となっているので、位相平面を用いることによって議論する。まず、1自由度系の場合について検討し、その結果を2自由度系の場合に適用する。定常振動解の近傍は次式のように書ける。

$$q_1(t) = q_{10} e^{-a_{11}(q_{10}, U_r)t} \cos \omega_1 t \dots \quad (23)$$

ここで、 q_{10} は振動振幅、 U_r は換算風速である。式 (23) の定常振動解は $a_{11}(q_{10}, U_r) = 0$ のときの振幅 q_s となる。 q_s の近傍における解の動きを調べ、その安定性を検討する。このとき、 a_{11} と振動変位の振幅 q_{10} との関係を Fig. 1 のように2つの場合、①, ② に分けて考え、 $\epsilon > 0$ の微小擾乱を与えたときの解を次のように表示すると、

$$q_1(t, \epsilon) = (q_s + \epsilon) e^{-a_{11}(q_s + \epsilon, U_r)t} \cos \omega_1 t \dots \quad (24)$$

① の場合:

$$a_{11}(q_s + \epsilon, U_r) > a_{11}(q_s, U_r) = 0$$

に対しては、 $q_1(t + \mu, \epsilon) < q_1(t, \epsilon)$ ($\mu > 0$)

$$\text{一方}, a_{11}(q_s - \epsilon, U_r) < a_{11}(q_s, U_r) = 0$$

に対しては、 $q_1(t + \mu, -\epsilon) > q_1(t, -\epsilon)$

となる。位相平面で考えると Fig. 2 ① のようになり、この場合の定常解は安定である。

② の場合:

$$a_{11}(q_s + \epsilon, U_r) < a_{11}(q_s, U_r) = 0$$

に対しては、 $q_1(t + \mu, \epsilon) > q_1(t, \epsilon)$

$$\text{一方}, a_{11}(q_s - \epsilon, U_r) > a_{11}(q_s, U_r) = 0$$

に対しては、 $q_1(t + \mu, -\epsilon) < q_1(t, -\epsilon)$

となり、位相平面で考えると Fig. 2 ② のようになる。この場合の定常解は不安定である。

上記のことは、 $a_{11}(q_{10}, U_r)$ が単調増加のとき安定なりミットサイクル、単調減少のとき不安定なりミットサイクルとなることを意味し、次式と同一のことである。

$$\frac{\partial}{\partial q_{10}} [a_{11}(q_{10}, U_r)] \begin{cases} > 0 & \text{安定なリミットサイクリー} \\ < 0 & \text{不安定なリミットサイクル} \end{cases} \quad \dots \quad (25)$$

これを空気力係数と関連づければ、式(17)よりねじれ振動に対しては

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_{10}} \left[\frac{M_\phi I(q_{10}, U_r)}{q_{10}} \right] &< 0 \text{ 安定なリミットサイクル} \\ \frac{\partial}{\partial q_{10}} \left[\frac{M_\phi I(q_{10}, U_r)}{q_{10}} \right] &> 0 \text{ 不安定なリミットサイクル} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (26)$$

また、鉛直曲げ振動に対しては

$$\left. \frac{\partial}{\partial q_{20}} \left[\frac{L_{\eta I}(q_{20}, U_r)}{q_{20}} \right] \begin{array}{l} < 0 \text{ 安定なリミットサイクル} \\ > 0 \text{ 不安定なリミットサイクル} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

である。

さて、2自由度系における定常振動解についてみると、この解の近傍では、前項で述べたように、ねじれ振動が卓越し、式(16)の第1項のみで表現できることになる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= q_{10} e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \cos \omega_1 t \\ q_2(t) &= r_1 q_{10} e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \cos(\omega_1 t + \theta_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

したがって、1自由度系に対して行った手法をそのまま適用することができ、 ζ_1 によって安定判別を行い得る。すなわち、式(25)より

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \zeta_1(q_{10}, U_r)}{\partial q_{10}} > 0 \text{ 安定なリミットサイクル} \\ \frac{\partial \zeta_1(q_{10}, U_r)}{\partial q_{10}} < 0 \text{ 不安定なリミットサイクル} \end{array} \right\} \dots\dots(29)$$

式(16)における ζ_1 は、

$$\zeta_1(q_{10}, U_r) = \alpha(q_{10}, q_{20}, U_r) + a_{11}(q_{10}, U_r) + a_{22}(q_{20}, U_r)$$

であるから、空気力係数との関係は次のような。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1(q_{10}, U_r)}{\partial q_{10}} &= \frac{\partial \alpha(q_{10}, q_{20}, U_r)}{\partial q_{10}} \\ &+ \frac{\partial \alpha(q_{10}, q_{20}, U_r)}{\partial q_{20}} \cdot \frac{\partial q_{20}}{\partial q_{10}} \\ &- \frac{\pi \rho B^4 \omega_1^2}{\Theta \omega_1} \frac{\partial}{\partial q_{10}} \left[\frac{M_{\phi I}(q_{10}, U_r)}{q_{10}} \right] \\ &- \frac{\pi \rho B^3 \omega_2^2}{M \omega_2} \frac{\partial}{\partial q_{20}} \left[\frac{L_{\gamma I}(q_{20}, U_r)}{q_{20}} \right] \frac{\partial q_{20}}{\partial q_{10}}. \end{aligned} \quad \dots \quad (30)$$

この式の符号によって、連成系におけるリミットサイクルの安定判別を行うことが可能となる。

3. 実験と解析

(1) 模型実験

考察の対象として、本州四国連絡橋公団が試算設計した中央径間長 1780 m, ト拉斯補剛桁（主構間隔 37.5 m）を有する吊橋を選び、この中央径間分を単径間とする全体吊橋模型とそのト拉斯補剛桁の部分模型を、実験

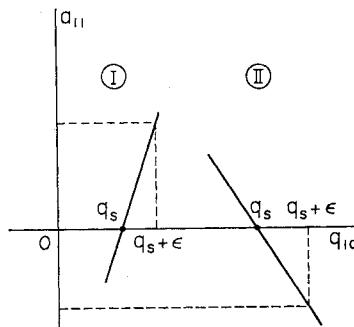


Fig. 1 a_{11} vs a_{10}

すべき風洞特性を考慮して縮尺 1/125 にて製作し、それぞれ実験に供した

設計断面に基づいて製作した原断面実験の結果、不安定振動の発生が認められず、安定な断面形状であることが判明したが、本研究では、むしろ自励振動の発生が見られる場合を含めて議論したいので、自励振動が発生するように断面形の変更を行った。すなわち、原断面 (TRUSS-0 とよぶ) はいわゆる開床断面であるが、その中央分離帶以外のグレーティングを開口部を覆い、閉床断面とした場合 (TRUSS-C をも閉塞して H 型床部を SS-H とよぶ) を対象との断面では、後述するよ

実験は、全体模型、部分模型とともに、いわゆる自由振動実験法にのっとって、各風速において模型を加振し、その減衰振動、あるいは発散振動を記録する方法で行っている。データの解析結果は、記録された振動の減衰率を各風速において振幅に応じて読みとり、これをパラメーターとする風速一振幅一減衰率関係図（U-A-D 図とよぶ）によって示している。このとき、定常振動が観測された場合、減衰率が零の曲線によって表わされることになる。なお、部分模型実験において、ねじれ 1 自由度系（TOR. 1-D.O.F. と略す）とした場合と鉛直曲げ一

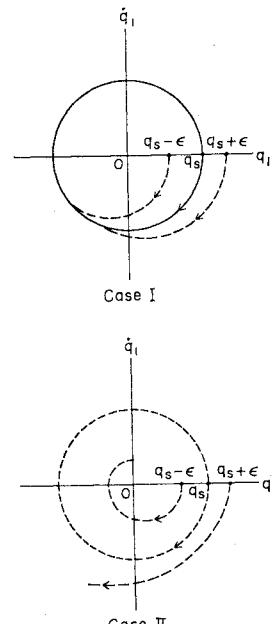


Fig. 2 Phase Plane

ねじれ2自由度系(2-D.O.F.と略す)とした場合について実験し、振動モードが異なることによる振動応答の差を考えてみることにした。**Fig. 3**および**4**は、それぞれTRUSS-C,H断面の部分模型の応答図であり、**Fig. 5**および**6**は、それぞれC,H断面の全体模型の応答図である。TRUSS-H断面ではいずれの場合にもねじれ振動が卓越した自励振動の発生を示す定常振動が見られる。TRUSS-C断面では、部分模型において鉛直曲げ—ねじれが連成する自動励振が見られるものの、全体模型においては、発振風速付近では、風圧による桁の横たわみが過大となり、実験の続行が困難になったこともあるが、不安定振動の発生は観測されていない。

ところで、作用外力である非定常空気力は、前述のように、従来行われていた方法を若干変更して測定している。すなわち、加振する模型の慣性力を消去する際の方法に関連して、従来静止空気中の作用空気力を小さいものとして無視してきたのに対し、今回は供試模型と同一の質量、ならびに質量慣性モーメントを持つが、空気抵抗のほとんど無視できるスケルトン模型を用いることにしたのである。このとき、空気力の検出ばりの出力特性を両方とも同一になるよう調節しておき、加振時に慣性力が自動的に差し引きされるようにすれば、残余の出力成分を静止空気中の空気力として評価することができる。従来、この残余分が零(現実的には完全に零とはならないが)となるように調整する方法をとっていたので、静止空気中の空気力を評価しなかったばかりでなく、逆に、この成分を吹送時の本来測定すべき空気力から常に差し引いていたことになる。

上記の方法によって得られた空気力と従来の方法によって求めた空気力の比較が**Fig. 7**である。この図はTRUSS-Hの回転加振時のモーメント M_ϕ について測定比較したものであるが、△、○が静止空気中の空気力を考慮した今回の測定法によるもので、▲、●は静止空気中の空気力を無視した従来の測定法によるものである。空気力の絶対値 $|M_\phi|$ で比較すると、その差を明確にうかがうことができる。**Fig. 8**は、供試模型の静止空気中の空気減衰の効果を見るために、上述のスケルトン模型の自由振動における減衰と供試模型のそれを比較したものである。模型の支持条件などは可能な限り同一になるように努めたことはいうまでもない。これから判断できることは、スケルトン模型による場合は減衰が振幅に対してほとんど一定であるにもかかわらず、供試模型では明確に振幅に対する非線形性を示している。供試模型の形状によってその性状がかなり異なってくるのがわかる。これらの図から、静止空気中の空気力を考慮することが、断面形状によってはかなり重要であることが理解できる。なお、非定常空気力の表示は、揚力、モー

メントについて以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} L &= \pi \rho B^3 \omega_\eta^2 \left[L_{\eta R} \frac{\eta}{\dot{\eta}} + L_{\eta I} \frac{\dot{\eta}}{\omega_\eta \bar{\eta}} \right] \\ &\quad + \pi \rho B^3 \omega_\phi^2 \left[L_{\phi R} \frac{\phi}{\dot{\phi}_0} + L_{\phi I} \frac{\dot{\phi}}{\omega_\phi \phi_0} \right] \\ M &= \pi \rho B^4 \omega_\eta^2 \left[M_{\eta R} \frac{\eta}{\dot{\eta}} + M_{\eta I} \frac{\dot{\eta}}{\omega_\eta \bar{\eta}} \right] \\ &\quad + \pi \rho B^4 \omega_\phi^2 \left[M_{\phi R} \frac{\phi}{\dot{\phi}_0} + M_{\phi I} \frac{\dot{\phi}}{\omega_\phi \phi_0} \right] \end{aligned} \right\} \dots(31)$$

ただし、

$$\eta = \bar{\eta} e^{i \omega_\eta t}, \phi = \phi_0 e^{i \omega_\phi t}$$

$\bar{\eta}, \phi_0$: 鉛直曲げおよびねじれ振動の加振振幅、

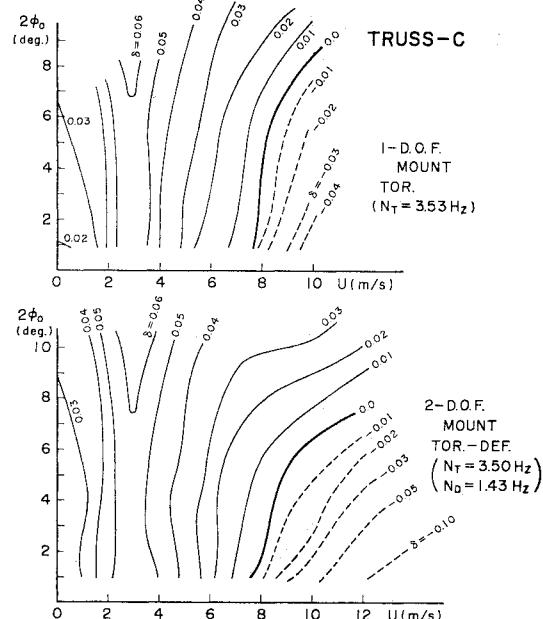


Fig. 3 U-A-D Characteristics of Response of Section Model

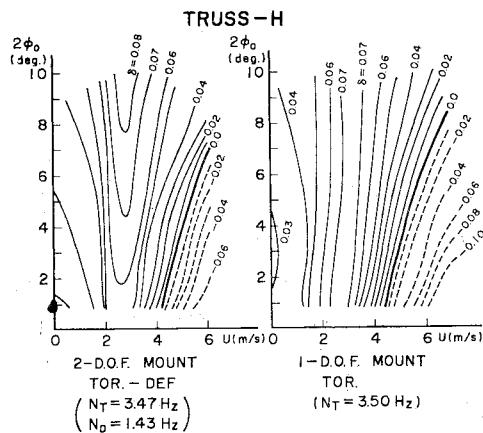


Fig. 4 U-A-D Characteristics of Response of Section Model

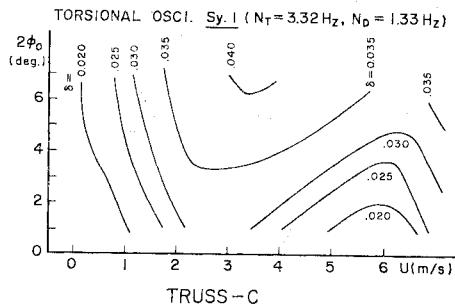


Fig. 5 U-A-D Characteristics of Response of Full Scale Model

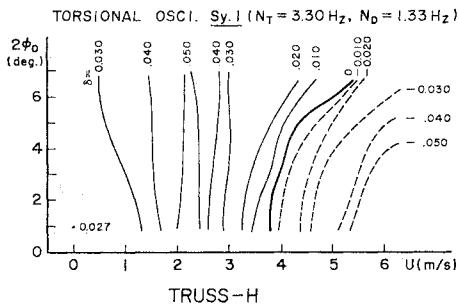


Fig. 6 U-A-D Characteristics of Response of Full Scale Model

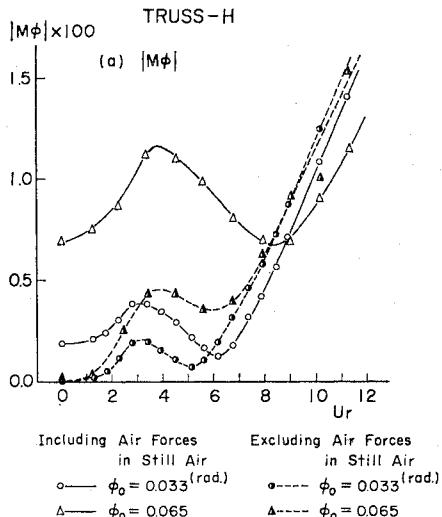


Fig. 7 Comparison of Unsteady Air Forces by two Methods, The one Includes, The Other Excludes Air Forces in Still Air

ω_η, ω_ϕ : 鉛直曲げおよびねじれ振動の加振振幅数,
 ρ : 空気密度, B : 模型の代表長

である。

(2) 実験結果と解析結果の比較

a) 部分模型の応答

2. で述べた解析理論に前項で示した非定常空気力の

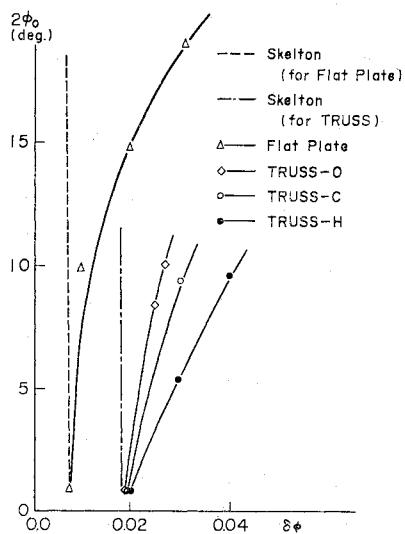


Fig. 8 Log. Damping in Still Air

各成分 $M_\phi, M_\eta, L_\eta, L_\phi$ を導入することによって逐次に応答を計算すると、Fig. 9 に示すような応答が得られる。これから自由振動実験で求めたと同様の風速一振幅一減衰率関係図 (U-A-D 図) を描くわけであるが、この図による比較では明確に議論することがむずかしい。そこで、特定の振幅 ($2\phi_0=3^\circ, 6^\circ$) における風速一減衰率関係図 (U-D 図) によって解析結果と実験結果との比較を行う。Fig. 10, 11 がそれぞれ TRUSS-C, H に対する結果である。TRUSS-C のねじれ 1 自由度系と鉛直曲げ一ねじれ 2 自由度系の実験結果についてみると、低風速側ではほとんど差が出ていない。また、解析結果を比較すると、2 自由度系として解析した場合は実験結果と比較的良い一致をしているが、1 自由度系として解析した場合、すなわち、外力として回転加振時のモーメント M_ϕ のみが作用するとして解析した場合は定常振動が生ずる風速 ($\delta=0$) 以外では一致しておらず、減衰率の風速に対する変化は緩慢となっている。すなわち、1 自由度系としての解析では、関心の深い定常振動をかなり正確に追跡しているものの、過渡的現象に対しては定常振動におけるほどの精度が得られていない。TRUSS-H についてみると、実験結果も解析結果も 1 自由度系と 2 自由度系との差は生じておらず、この断面の振動性状がねじれ 1 自由度系と考えよいものと見られる。 $2\phi_0=6^\circ$ での解析結果と実験結果とはほぼ一致しているが、 $2\phi_0=3^\circ$ の場合は両者の間に、定常振動が発生する領域以外では若干の差が生じている。これら過渡的現象に対して実験と解析とで若干の差が生じたのは、非定常空気力の測定精度、および解析における仮定等が相互に関連し合ったためと考えられる。自励振動に

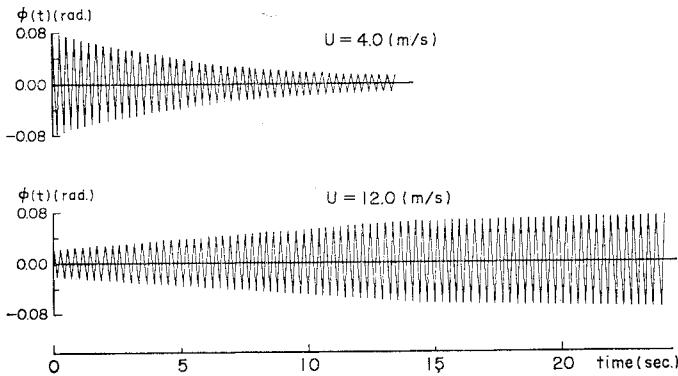


Fig. 9 Calculated Responses of TRUSS-C in Torsional Oscil.
(2-D.O.F.)

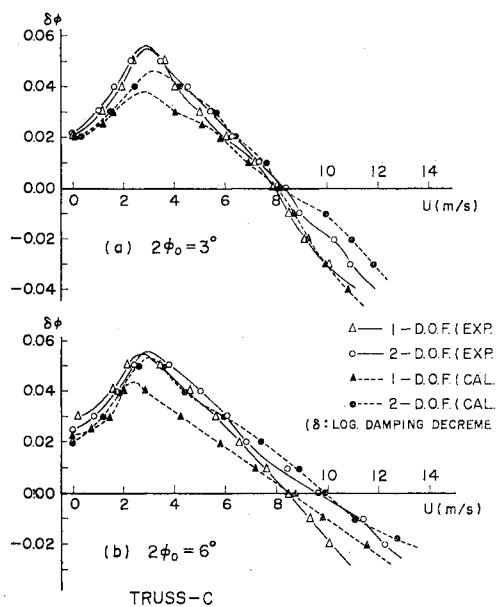


Fig. 10 Damping Decrement of Torsional Oscil.
of Section Model with Specified Amplitudes
($2\phi_0 = 3^\circ, 6^\circ$)

における定常振動の応答履歴に着目したのが、Fig. 12 である。これによると、1自由度系、2自由度系とも実験結果と解析結果とはよく一致していることが理解される。2自由度系とした場合の方が応答履歴の非線形性が著しいようである。特に、TRUSS-C の場合、ねじれ振動に付随して生ずる鉛直曲げ振動についても実験値と解析値はよく一致している。実験、解析の両結果をみると、ねじれ振動と鉛直曲げ振動の間の位相差がともにほぼ零であり、2.で述べたように、連成振動として生ずる鉛直曲げ振動はねじれ振動において回転中心が移動するためには生ずるものであることを実験と解析の両面から追跡したことを意味することになる。

b) 部分、全体模型の応答比較

部分模型の二次元系の場合と同様にして、三次元構造系としての全体模型の場合も U-A-D 図を描き、それから得られる特定振幅（スパン中央点において $2\phi_0 = 3^\circ, 6^\circ$ ）に着目した U-D 図によって、種々の検討を行う。Fig. 13, 14 が比較を行うための図である。これによると、TRUSS-C では二次元系、および三次元系の両者においてそれぞれ実験結果と解析結果とは比較的よく一致している。この場合、二次元系と三次元系における減衰率の変化の差が明確に認められ、二次元系の方がその変化率は大きく

なっている。全体模型においては、横たわみが風速の二乗に比例して増大し、その影響が入ってくると考えられる風速域（約 6.0 m/s 以上）では実験での減衰率がかなり大きくなり、本研究に示す解析法による解析値とは大きく離れている。TRUSS-H は、二次元系、三次元系の両者において定常振動が観測されたケースであるが、実験における減衰率が最大となる風速に差が見られる。また、減衰率の風速に対する変化は、TRUSS-C と同様に三次元系の方が緩慢である。定常振動の発生する風速は三次元系の方が若干低い。これらの傾向は、解析結果にも表われているが、TRUSS-C におけるほど実験結果との良い一致は見られない。

次に、自励振動の定常ねじれ振動の応答履歴について考察する。Fig. 15 に示すとおり、TRUSS-H では二次元系、三次元系の両者の実験で定常振動を観測できた

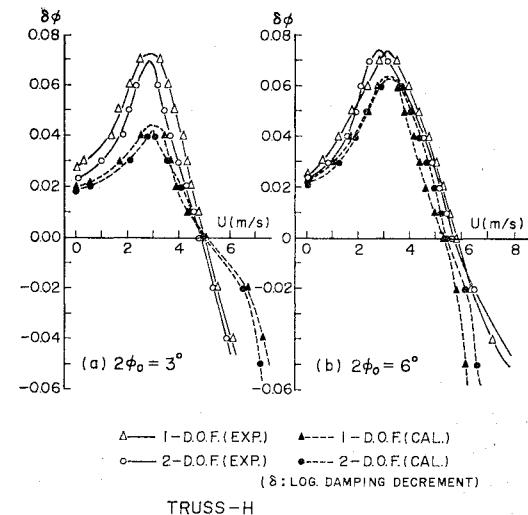


Fig. 11 Damping Decrement of Torsional Oscil.
of Section Model with Specified Amplitudes
($2\phi_0 = 3^\circ, 6^\circ$)

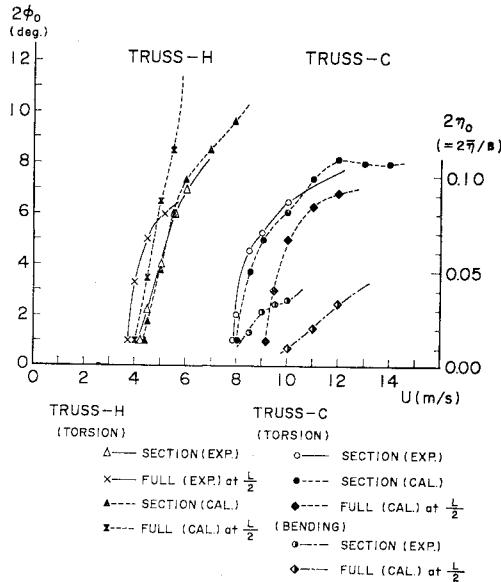


Fig. 12 Comparison of Responses of Self-Excited Oscillations of Experiments and Calculations in Section Model

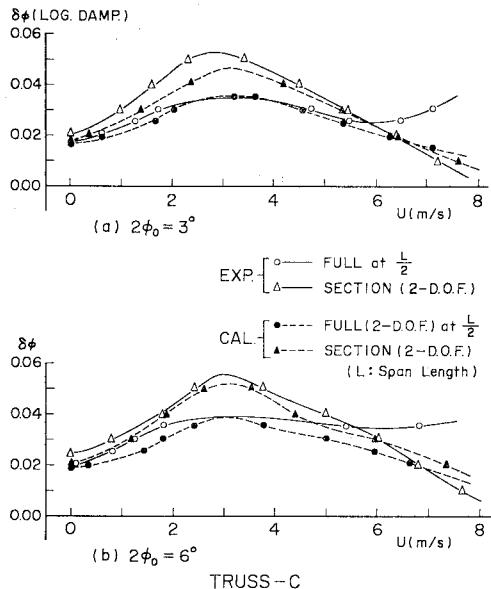


Fig. 13 Comparison of Torsional Responses of Section and Full Models

が、TRUSS-C では、二次元系の実験においてのみ観測されたため、三次元系との比較は解析によらなければならぬ。TRUSS-H の応答履歴は、二次元系の方が三次元系より高風速側に現われており、解析でもこの傾向は明確に見ることができる。しかし、応答履歴の非線形性は、三次元系の場合、実験結果の方が顕著になっており、二次元系ほどその一致がよくない。TRUSS-C

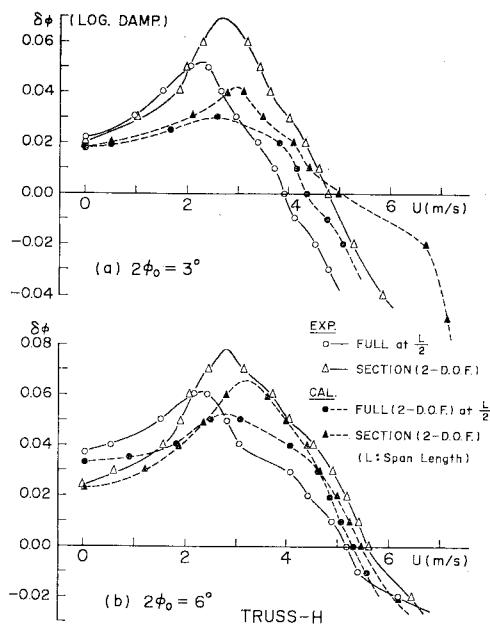


Fig. 14 Comparison of Torsional Responses of Section and Full Models

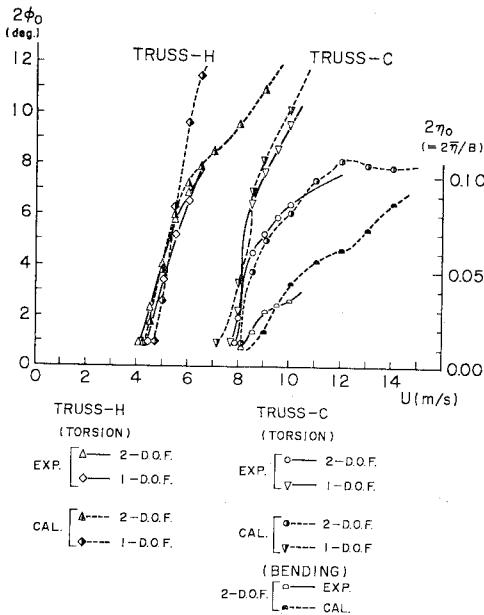


Fig. 15 Comparison of Responses of Self-Excited Oscillations of Section and Full Models in Bending-Torsional Motions

についてみると、三次元系に対するものは解析結果のみであるが、TRUSS-H とは逆に三次元系の応答履歴が高風速側に現われている。これは、振動の現われ方が断面形によっては二次元系と三次元系において差が見られるることを示すものと考えられる。

(3) 解析法の応用例：風速がスパン方向に変化する場合

本論文で展開した解析法によるパラメーター解析の一例として、風速がスパン方向に変化する場合を取り上げて、風速分布の違いによって応答がどのように影響を受けるかを検討する。TRUSS-C を対象断面とし、平均風速はスパン方向に放物線分布するものとする。スパン端点の風速を U_{\min} 、スパン中央の風速を U_{\max} とし、その比 $m (= U_{\max}/U_{\min})$ を変化させて振動応答を計算した結果が、Fig. 16 である。これによると、 $m = 1.0, 1.1, 1.2$ の順に、ねじれ振動が発生せしめる風速 U_{\max} は上昇し、応答履歴も高風速側に移動している。しかしながら、風速比の大きい $m = 1.3, 1.4, 1.5$ での発振風速 (U_{\max}) は逆に m が増加するほど低下する。図中の△印は部分模型に対応する二次元構造系に対する理論値である。

以上のことから、スパン方向に風速が変化する場合、基準にする風速をどの点の風速にとるかによって、発振風速の評価が異なることになる。この点においても二次元構造系において求めた応答履歴のみから三次元構造系の応答を予測することはかなり困難であることが知られるであろう。他方、このように橋軸方向に風速分布が変化する場合、あるいは橋軸方向に橋床断面が変化する場合にも、先に述べた解析手法は有用ではないかと考えられる。

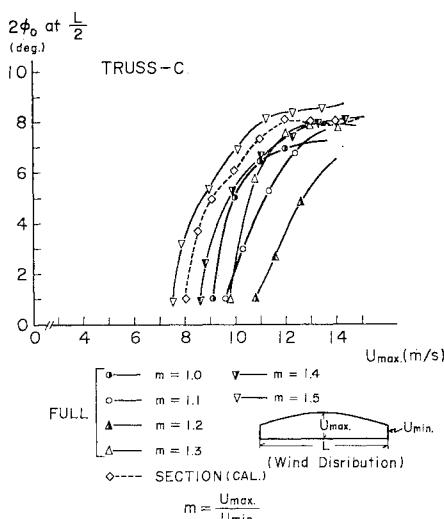


Fig. 16 Comparison of Torsional Oscillations of Full Model with Varying Wind Distribution in Bending-Torsional Motions

4. 結論

吊橋をケーススタディの対象として、作用空気力の振動振幅に対する非線形性に着目して多自由度耐風応答特性を評価する一般的な解析法を提示し、風洞実験結果との対比によってその妥当性の検証、考察を試みた。この結果次のような知見、あるいは結論が得られた。

(1) 従来、微小であるとして無視されていた静止空気中の空気力は、必ずしも無視できない量であり、特に低風速域ではその影響が著しく、空気力の振幅に対する非線形性を考慮する解析において意味を持ってくる。

(2) 本論文で展開した解析法は、測定された非定常空気力を用いることを前提として、二次元構造系、三次元構造系の非線形応答を、1周期ごとに線形方程式を適用して逐次的に求めるものであった。この手法は、強制振動法による非定常空気力の測定方法、および空力弾性振動の検証法である自由振動法に照らしてほぼ妥当なものであるといえる。これによって、非定常空気力を測定することによって非線形応答を解析することが可能となり、風洞実験の手法としての2つの主な方法である強制振動法と自由振動法との相互比較が容易となった。

(3) 非定常空気力の測定という観点から、自由振動法と強制振動法を比較すると、Fig. 11 のように非定常空気力の測定精度が劣る低振幅域の過渡的領域において、両者の間にかなりの差が見られる。この原因について考えてみると、自由振動法による観測が現象を最も忠実に把握できるものであるという前提に立てば、強制振動法という非定常空気力の測定法自体の問題点、および本解析法に用いている仮定などが相互に関連しあって、過渡的現象に対しては定常振動現象におけるほど一致度が良くなかったといえるようである。

(4) トラス補剛吊橋において鉛直曲げ—ねじれ連成振動として現われる定常振動については、ねじれ振動が支配的であり、鉛直曲げ振動はねじれ振動における回転中心の移動によって生ずることが解析的に示され、このときの連成振動の安定判別は式(30)で与えられる。

(5) 三次元全体模型についてはストリップ理論を適用したが、低風速域における適用は妥当と考えられるものの、高風速域では風速の上昇とともに横たわみが過大となり、この効果が応答特性にいかに反映されるかを明確にできなかったために、ストリップ理論の適否を論ずるに至っていない。このためには、風速の上昇に伴う横たわみの増大による構造系の変化、あるいはケーブルの干渉効果などについて検証し、場合によっては手法を修正する必要があろう。

(6) 二次元、三次元構造系の応答を比較すると、鉛

直曲げ一ねじれ連成振動が発生する TRUSS-C では、三次元系の応答履歴は二次元系のものより高風速側に現われるものの、ねじれ 1 自由度振動が発生する TRUSS-H では三次元系の応答履歴は二次元系のそれより低風速側になる。すなわち、耐風応答特性はその構造系の有する断面、および力学的特性によって二次元構造系と三次元構造系とで様相を異にするのが一般的であるといえるようである。

(7) スパン方向に風速分布が変化する場合についてみると、応答特性は分布形によってかなり異なるものとなる。このとき、設計風速とすべき基準点をどこにとれば、設計に反映する上でもっとも都合が良いかが問題となる。

(8) 本論文で展開した解析法は、構造物の空力弾性振動すべての場合に適用することが可能であり、ここでは議論されなかった渦励振動、あるいは乱れを含むより現実的な振動の解析にも発展させ得るものと考えられる。

謝 辞：本研究を遂行するにあたり、文部省科学研究費補助金、本州四国連絡橋公団よりの受託研究費を受けた。また、実験およびデータ整理に多大の助力を得た東京大学工学部橋梁研究室の小栗英和助手、大竹完治技官を始めとする関係各位、解析法の展開にあたって有益な助言を得た鹿島建設技術研究所の森光康夫博士に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Bleich, F., et al.: The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, chap. 7, Bureau of Public Roads Department of Commerce, Washington D.C. 1950.
- 2) Scruton, C.: Wind Excited Oscillations of Structures, Proc., ICE., paper No. 6758, 1946.
- 3) Sabzevari, A. and R.H. Scanlan : Aerodynamic Instability of Suspension Bridges, Proc., ASCE, Vol. 94, EM. 2, 1968.
- 4) Scanlan, R.H. : The Suspension Bridges-Its Aeroelastic Problems, ASME, The Vibration Conference, 1971.
- 5) Kawashima, S., H. Kimura and T. Shibata : Measurements of Aerodynamic Forces on an Oscillating Airfoil, Proc., 13th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1963.
- 6) 田中 宏・伊藤 学：充腹構造物の自励振動における空気力の特性、土木学会論文報告集、第 168 号、1969。
- 7) 森光康夫・伊藤 学・宮田利雄：空気力の非線形性を考慮した構造物の空力弾性振動、土木学会論文報告集、第 219 号、1973。
- 8) Fung, Y.C. : An Introduction to the Theory of Aeroelasticity, chap. 5. 6. 7., John Wiley & Sons Inc., 1955.
- 9) Newmark, N.M. : A method of Computation for Structural Dynamics, Proc., ASCE, Vol. 85, EM. 3, 1959.
- 10) Stoker, J.J. : Nonlinear Vibration in Mechanical and Electrical Systems, Interscience Publishers Inc.. New York, 1960.
- 11) 大地羊三：電子計算機による構造解析、第 4, 7 章、橋梁編纂会、1968。
- 12) 中村泰治・吉村 健：吊橋断面の 2 自由度フッターについて、土木学会論文報告集、第 226 号、1974。
- 13) 久保喜延・宮田利雄・伊藤 学：吊橋系の空力弾性振動の部分、全體模型による風洞実験について、構造物の耐風性に関する第 3 回シンポジウム論文集、1974。
- 14) 久保喜延・宮田利雄・伊藤 学：吊橋の空力弾性振動の数值解析、土木学会第 29 回年次学術講演会講演概要集 1974。
- 15) 久保喜延・宮田利雄・伊藤 学：風による吊橋の多自由度非線形応答解析、土木学会第 30 回年次学術講演会講演概要集、1975。
- 16) T. Miyata, Y. Kubo, M. Ito : Analysis of Aerodynamic Oscillations of Long-Span Structures by Nonlinear Multi-dimensional Procedures, Proc. of Fourth International Conference on Wind Effects on Buildings and Structures, 1975.

(1975.11.20・受付)