

有限要素法による部分構造の解析に際して 断面力で与えられる境界条件の一処理法

A TREATMENT OF BOUNDARY CONDITIONS SPECIFIED AS RESULTANT
FORCES ON FINITE ELEMENT SUBSTRUCTURE MODELS

吉田 裕*・高橋 昇**・増田 陳紀***

By Yutaka YOSHIDA, Noboru TAKAHASHI and Nobutoshi MASUDA

1. はじめに

わが国で有限要素法が具体的な構造計算に適用されるようになってからまだ10年ほどにしかならないが、現状では、ちょっと複雑な対象の解析には必ず有限要素法が用いられるといつても過言ではないほど、実際の問題の解析に適用されている。これは汎用プログラムの普及によるものであり、インプット・データの入れ方さえ知っていれば、非常に複雑な対象に対しても容易に解析結果が得られる。しかし、有限要素法は本質的に近似解析法であるから、たとえば、要素分割の仕方いかんによっては工学的に許容できないような大きな誤差を含む結果を与えることになるということも常識的な事実である。

解析精度を高めるためには、一般的に、要素分割を細かくする必要がある。しかし、計算機には自らその容量に限度があり、また計算時間に対しても経済的な面から厳しい制約を受けるのが普通である。その結果、なるべく対象系の自由度を小さくしたいという要求が一方で必ず起こる。したがって、過去の解析例などを参考にしながら、たとえば応力変化がはげしいと予測される部分は細かく、応力変化がなだらかであると予測される部分は相対的に粗く、そのうえでできるだけ一様に要素分割するなどして、計算時間および容量すなわち「経済」と「解析精度」とのバランスに非常に気を使って計算を実行するのが普通である。

実際の設計過程においては、対象とする構造系の巨視的な挙動は、はり理論のような簡易化された理論に基づく計算によって十分精度よく評価することができ、したがって、有限要素法などを適用して詳細な解析を行うことが必要となるのは、隅角部のような、局所的な構造部

分のみである、という場合が多く存在する。このような場合に、有限要素法による解析の対象として、部分構造だけを抽出することができれば解析上非常に効果的である。問題は、対象部分構造の境界条件を解析精度との相対で妥当に設定することができるかどうかである。

図-1は上越新幹線吾妻川橋梁の概略図である。このような構造の全体的な挙動は、骨組構造として理想化した対象の解析によって評価することができる。しかし、箱桁と箱型断面の柱および桁内に挿入される隔壁によって構成される、柱頭部近傍の局部的な応力状態などは、はり理論に基づいた解析では評価することができない。局部的な応力状態を評価するためには、有限要素法などによる詳細な解析が必要である。いま、上下フランジやウェブのそれぞれを有限要素に分割し、構造全体を

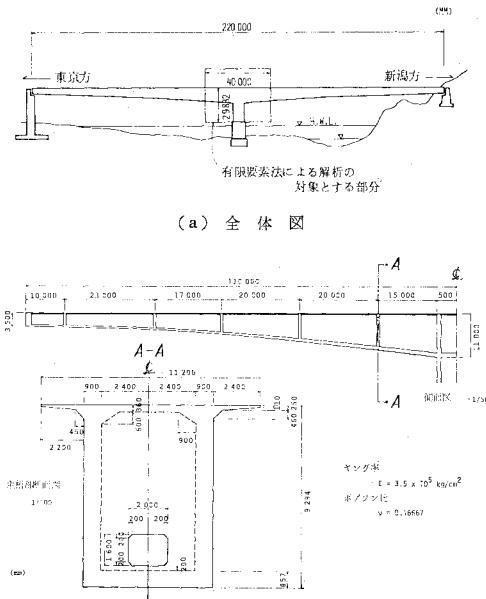


図-1 上越新幹線吾妻川橋概略図

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 日本鉄道建設公團 東京新幹線建設局 計画課補佐

*** 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

3次元的に解析しようとなれば膨大な節点数を必要とすることになる。このような場合に、詳細計算を必要とする構造部分、たとえば図-1(a)の1点鎖線で囲まれた部分、を全体系から切り離して独立な単位として解析することができたら計算機の容量の面からも計算時間の面からも非常に救われる。骨組構造として全体系を解析することは容易であるから、もし、骨組構造としての解析から得られる軸力、せん断力、曲げモーメントなどの断面力の値に基づいて、部分構造の両端に対応する桁の切断面上の条件を的確に設定することができるならば、部分構造のみを解析対象として抽出することが容易である。ただちに思いつくことは、曲げモーメントに対応する応力分布を直線分布などとして、部分構造の端面上の各節点に力を分配して作用させることである。しかし、フランジのせん断遅れなどの評価を含めて、断面内の応力分布を予め評価し、断面上に数多く導入される節点のそれぞれに的確に力を分配することは不可能に近い。

本報告は、上に述べたような、巨視的な挙動は骨組構造として評価し得るような構造に対して、骨組構造としての解析から得られた断面力の値を、有限要素部分構造モデルの境界条件として考慮する1つの方法について説明し、応用例として、図-1に概略を示した上越新幹線吾妻川橋梁の設計に際して行った解析例を報告するものである。

2. 部分構造有限要素モデルに対して断面力で与えられる境界条件の処理法

簡単な構造系を対象とした具体的な解析過程を通して、提案する方法を説明する。ここで対象する構造系は図-2(a)に示すような、一端を固定された片持はりの2次元モデルで、自由端の上隅に単位の集中荷重が作用

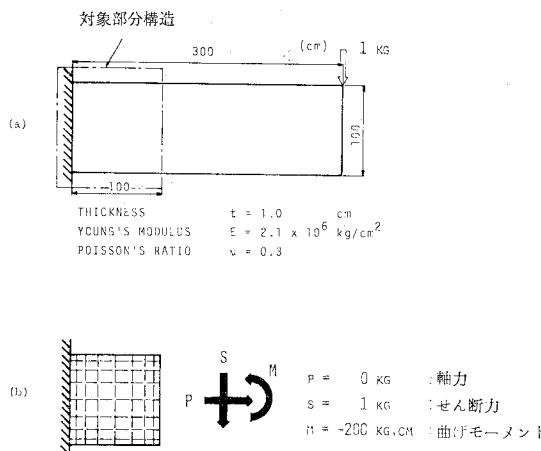


図-2 全体系と部分構造

するものである。構造系の諸元は図中に記入したとおりである。

この問題に対して、固定辺近傍の詳細な応力状態を知ることが目的であるとする。いま、有限要素法による解析を行おうとするが、構造全体を解析対象としたのでは自由度が非常に多くなるために、図-2(b)に示すように、詳細計算を必要とする固定辺近傍の部分構造のみを解析対象として取り出し、部分構造を切り取った切断面（以下の記述においては「部分構造の端面」または単に「端面」という）に、断面力で与えられる条件（この問題の場合は軸力 $P=0$ kg, せん断力 $S=1$ kg, 曲げモーメント $M=-200$ kg·cm）を境界条件として、部分構造の解析を行うものである（図-2(b)参照）。なお、有限要素解析に用いた要素分割型は図-2(b)に破線で示した通りである。

まず、部分構造の端面は変形後も平面を維持するものと仮定する。なお、この仮定は、はり理論のように連続したすべての区間に平面保持の仮定を導入するのではなく、特定の1つの断面に平面保持を仮定するものであって、後に示す具体的な解析結果からも実証されるように全体的な挙動を骨組構造として解析し得るような、たとえば図-1に示したような箱桁構造における、桁の自由端および柱頭部からある程度離れた断面においては妥当な仮定である。

端面が平面を保つという仮定を導入すれば、図-2(b)のような2次元の問題における端面の変位は、図-3(a)～(c)に示すような、水平、鉛直および回転の3つの基本的な変位によって表わすことができる。したがって、まず上記の3つの基本的な変位のそれぞれに対して、單

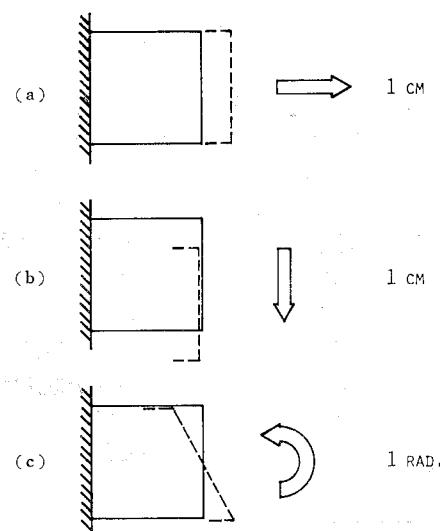
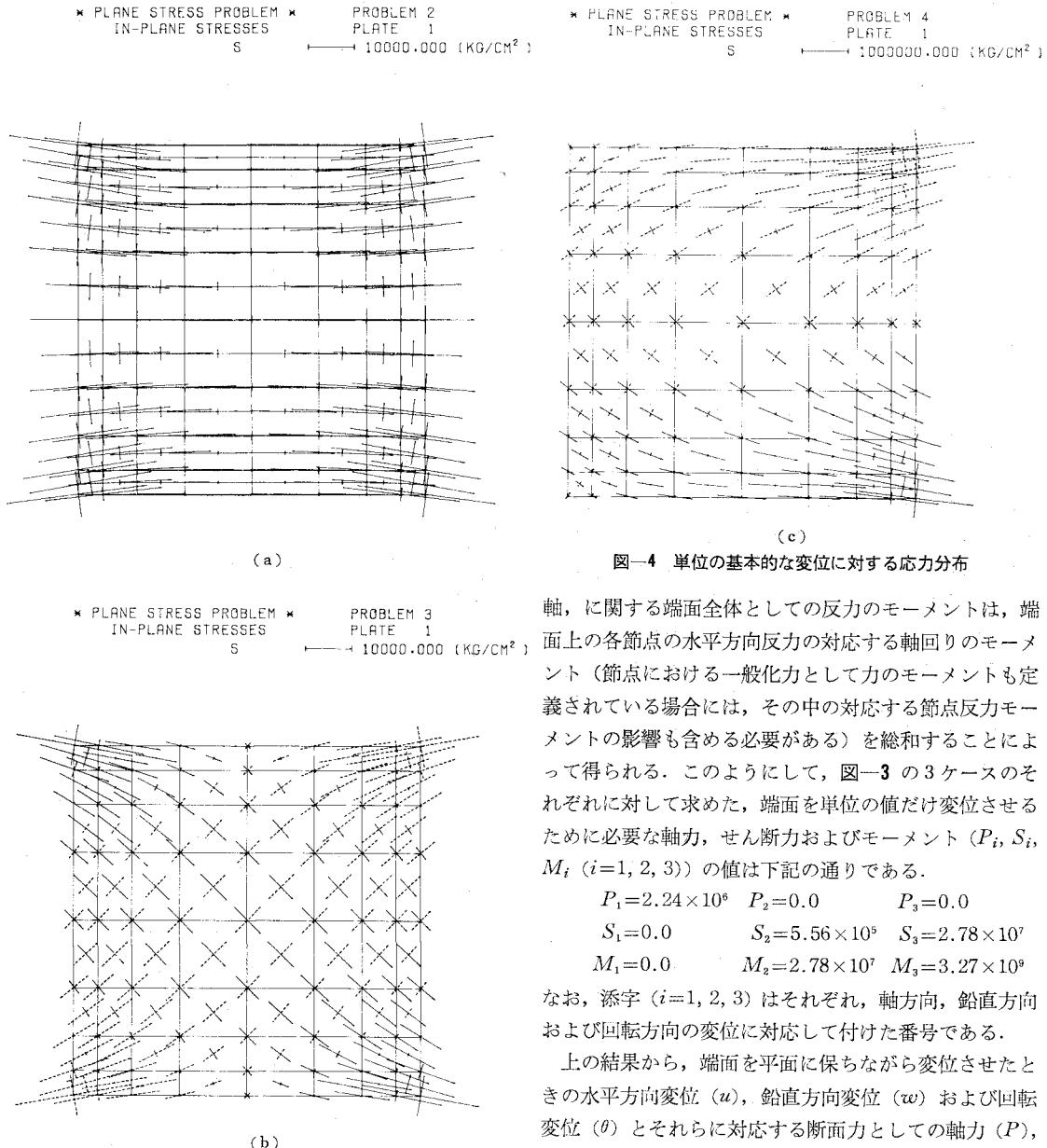


図-3 端面の3つの基本的な変位



(c)

軸、に関する端面全体としての反力のモーメントは、端面上の各節点の水平方向反力の対応する軸回りのモーメント（節点における一般化力として力のモーメントも定義されている場合には、その中の対応する節点反力モーメントの影響も含める必要がある）を総和することによって得られる。このようにして、図-3 の 3 ケースのそれぞれに対して求めた、端面を単位の値だけ変位させるために必要な軸力、せん断力およびモーメント (P_i, S_i, M_i ($i=1, 2, 3$)) の値は下記の通りである。

$$\begin{array}{lll} P_1 = 2.24 \times 10^6 & P_2 = 0.0 & P_3 = 0.0 \\ S_1 = 0.0 & S_2 = 5.56 \times 10^5 & S_3 = 2.78 \times 10^7 \\ M_1 = 0.0 & M_2 = 2.78 \times 10^7 & M_3 = 3.27 \times 10^9 \end{array}$$

なお、添字 ($i=1, 2, 3$) はそれぞれ、軸方向、鉛直方向および回転方向の変位に対応して付けた番号である。

上の結果から、端面を平面に保ちながら変位させたときの水平方向変位 (u)、鉛直方向変位 (w) および回転変位 (θ) とそれらに対応する断面力としての軸力 (P)、せん断力 (S) および曲げモーメント (M) との関係が次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ S \\ M \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

式(1)を

と書く。上に述べたように、マトリックス A は、基本的な 3 ケースの解析結果から決まるから、その逆行列を求めるることは容易である。したがって、端面に境界条件として与えられた断面力 f に対応する端面の変位 u は、

から求まる.

図-2 (b) の問題においては、

$$f = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ -200.0 \end{Bmatrix} \dots \quad (4)$$

であるから、式(3)より u が

のように求まる.

基本的な3ケースの応力結果は単位の変位に対応する結果であるから、端面の変位 u が求まると、基本的な3ケースの応力結果のそれぞれに、対応する変位の値を係数として乗じて重ね合わせることにより、与えられた断面力 f に対応する応力結果が得られる。

いうまでもなく、得られた変位の値を乗じて重ね合わせが可能であるためには、応力結果はすべて同一の座標系で表わされていることが必要であるから、重ね合わせるべき応力結果は、主応力結果ではなく、たとえば直交する x, y, z 軸に関する結果でなければならぬ。

このようにして、基本的な3ケースの応力結果の重ね合わせから、図-2(b)の条件に対して得られた変位、および応力結果から求められた主応力図を図-6に、全体系を有限要素法で解析して得られた対応する領域の結果と比較して示す。

3. 全体系を対象として解析した結果との比較による解法の検討

有限要素法によって対象系全体を解析した結果のうち主応力図を図-5に示す。系全体を対象とした解析から

表-1 部分構造の端面上隅に位置する点の
鉛直変位および直応力の比較

	鉛直変位 (10^{-6}cm)	直応力 (kg/cm^2)
系全体を対象とした解析結果	8.744	0.1129
部分構造のみを対象とした2. の方法による解析結果	8.457	0.1167

得られた、2. で対象とした構造部分の変位および主応力結果を図-6 (a) および (b) に示し、2. に述べた方法によって得られた結果 (図-6 (c) および (d)) と比較したものが図-6 である。また、部分構造の端面の上隅に位置する点の鉛直変位および直応力を数値的に比較したものが表-1 である。これらの結果から、2. で述べた方法によってかなりの精度で構造部分の変位および応力状態を評価することが可能であることがわかる。

さらに、上記 2 つの解析結果から得られた、部分構造の端面、固定辺に沿った切断面およびそれの中間に位置する切断面、の 3 つの断面上の直応力およびせん断応力分布をはり理論に基づいて得られる結果と比較して図示したものが図-7 (a) および (b) である。これらの結果から、端面上のせん断応力分布に若干の差異が認められるが、2. で述べた部分構造のみを対象とする解析によって、妥当な結果が得られることが分る。

2. で述べた方法においては、3つの基本的な変位の条件に対して計算をしなければならないなど、やや解析過程が複雑になる。しかし、解析対象としての荷重条件が数多く与えられ、したがって、部分構造の境界条件として与えられる断面力の組合せが多い場合にも、この方法によれば、それらのそれぞれのケースに対して個々に有限要素解析を行う必要はない。必要なのは、与えられた断面力の条件に対して、式(3)から基本3ケースに対

* PLANE STRESS PROBLEM * PROBLEM 1
 IN-PLANE STRESSES PLATE 1

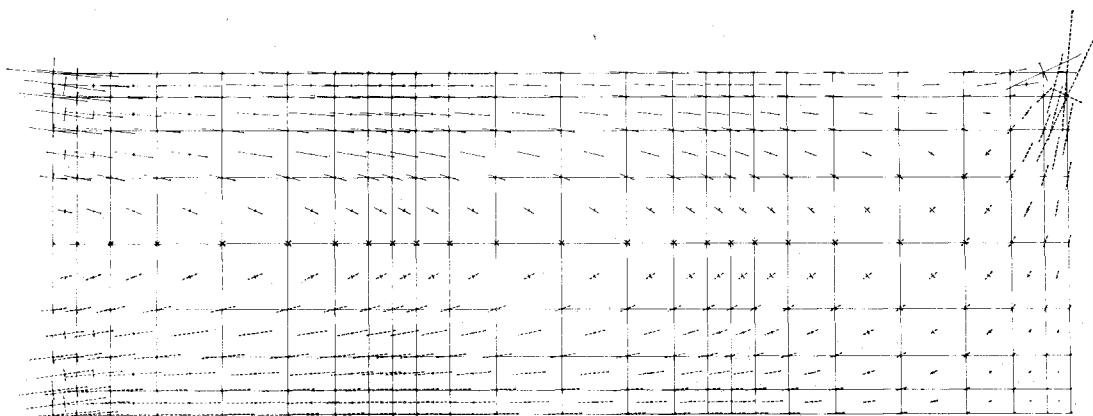


図-5 系全体を対象として解析した結果（主応力図）

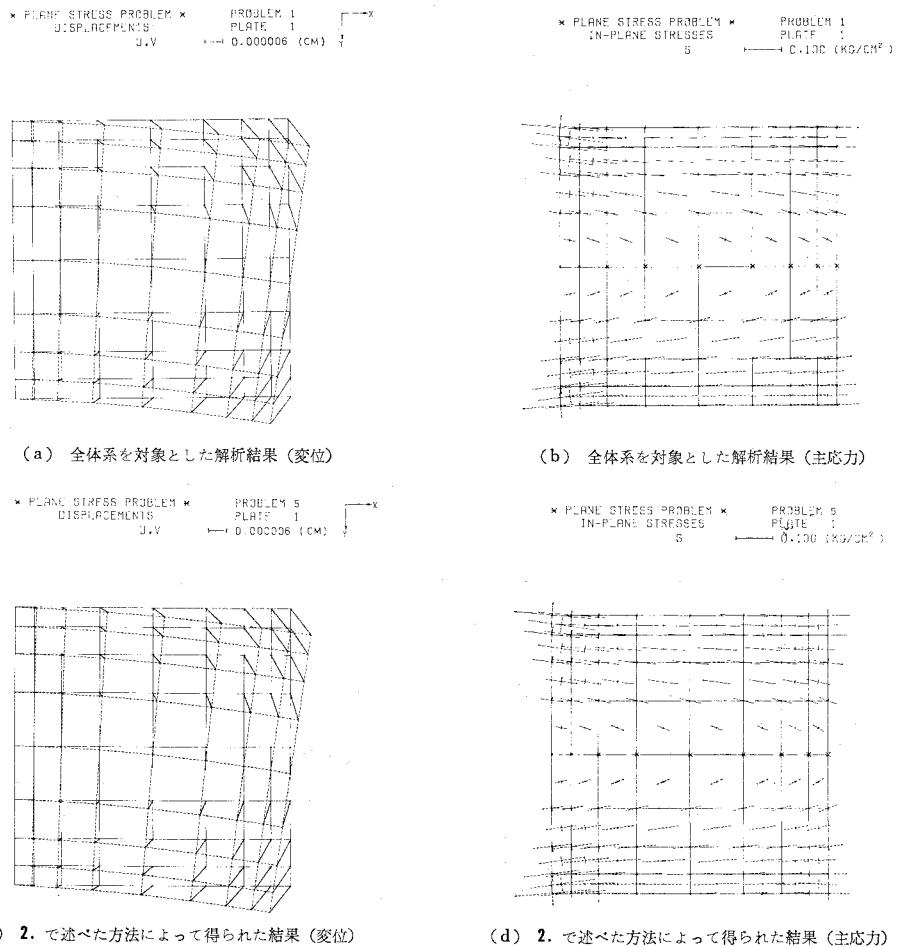


図-6 系全体を対象とした解析結果と 2. で述べた方法によって得られた結果との比較

する係数を求めることがだけであり、後は、3つの基本ケースの結果のそれぞれに得られた係数を乗じて重ね合わせることによって、詳細な応力分布が得られる。したがって、荷重ケースが多く与えられる場合には非常に有効である。特に、4. に述べる応用例にみられるような実際の設計過程では、数多くの荷重条件の組合せに対して検討する必要が生じ、しかも対象とする部分構造系が相当複雑であるから、一層効果的である。

4. 箱型断面ラーメン橋柱頭部 の解析

応用例として、図-1 に概略を示した、上越新幹線吾妻川橋梁（2径間連続 T 型ラーメン複線 1 室型 PC 構造）の設計に際して行った解析例を示す。解析対象は、

- 系全体を対象とした解析
- ▲ 2. で述べた方法による解析
- 梁理論

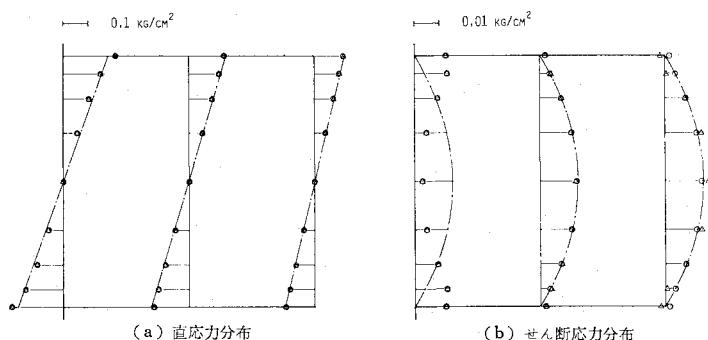


図-7 直応力およびせん断応力分布の比較

箱桁、それを支持する箱型断面柱および箱桁に挿入される隔壁によって構成される橋梁柱頭部である（図-1 (a)において1点鎖線で囲った部分）。ここで対象とするような箱桁構造は、これまでに数多く具体化されている

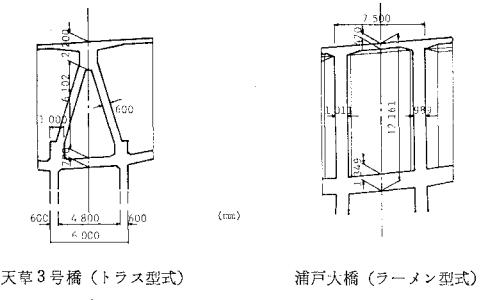


図-8 天草3号橋⁴⁾および浦戸大橋⁵⁾の柱頭部

が^{1)~6)}、特に柱頭部の構造型式として代表的なものは、天草3号橋⁴⁾で採用された、柱頭部の桁内部の隔壁を斜めに配置するトラス型式とよばれるものと、浦戸大橋⁵⁾で採用された、桁内部の隔壁を柱の壁の上に垂直に配置するラーメン型式とよばれるものとである(図-8参照)。このような柱頭部の立体的な応力状態を把握することは設計上重要である。したがって、個々の橋梁の設計に際し、その都度、光弾性実験や樹脂模型による載荷実験などが行われてきた。また、当然のこととして、有限要素法による解析も行われている。しかし、この種の橋梁構造に対して従来行われてきた有限要素解析は、隔壁や上下フランジの幅方向の影響を板厚に換算して2次元構造に理想化し、平面応力問題として解析したり、隔壁や柱の断面内に位置する桁の下フランジなど、構造を構成する個々の板要素に対して、たとえば、隔壁の1辺を固定辺とし、側2辺に三角形に分布するせん断応力を作用させるなど、理想化した境界条件のもとで、2次元問題として解析を行ったものなどが大部分である。また、樹脂模型による載荷実験や光弾性実験においても、各構成部分の接合部付近などを含めて局部的な応力状態を詳細に測定することは測定技術的に困難である。したがって、実構造内における各構成部分の立体的な応力性状に関しては、いまだ明確に把握できないまま残されている点が多い。このような事情から、吾妻川橋梁の設計に際し、立体的な詳細解析の必要性が認識され、有限要素法による解析を行ったものである。

以下に、解析過程において、特に2.を補足する必要のある事項について述べ、解析結果のうちのいくつかを示す。なお、2.に述べた方法によって箱桁のねじれの影響を含めた解析を行うことは容易であるが、以下の解析例においては、橋軸に沿ってとった桁断面の対称条件を考えし得るような荷重条件のみを対象としているために、ねじれの影響は含めていない。

この場合の端面の変位の基本ケースは、左右両端面のそれぞれに対して、図-9(a)~(c)に示した3ケースずつ、計6ケースである。しかし、ここで対象とする部分構造には左右の対称性が存在するから、図-9に示し

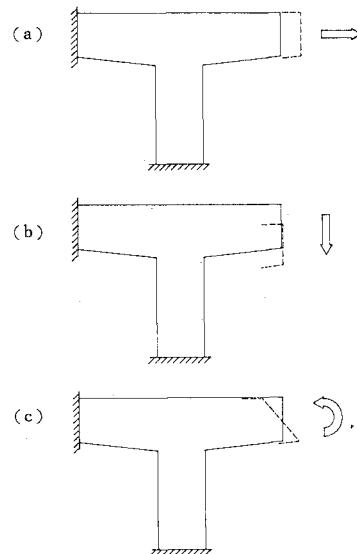


図-9 単位変位の基本ケース

た、左端面を固定し、右端面を平面に保ちながら、軸方向(u)、鉛直方向(w)および断面中立軸回りの回転方向(θ)のそれぞれの方向に単位の変位をさせた場合の基本的な3ケースに対する解析だけを行えば、これらの結果から、左端面の単位の変位に対応する解析結果はただちに得られる。この場合、各節点の変位および応力の符号に注意する必要がある。

一例として、右端面に鉛直方向の単位の変位を与えた場合の主応力図を図-10に示す。これは、応力仮定のハイブリッド法に基づいて誘導された薄板有限要素⁷⁾を用いて、立体的な解析を行った結果得られた面内応力および曲げモーメントから、板の表面での主応力を求めたもので、実線は引張応力を、破線は圧縮応力を示している。図は、立体的に構成されている対象構造系の各板単位の主応力図を一平面上に展開して配置したものであり、図の左下隅に、部分構造の形状と部分構造を構成する15の板単位の番号および各板単位を図中に展開した配置を示している。設計の便宜上、ここでは各板単位の表面での応力を評価し、図示することにしたので、各板単位に対して上面と下面の2つの面の応力図が描かれることがある。上下両面を区別するために、左下隅の図に付した番号は、上面と定義した面から正しく読めるような書き方で記入している。図-10は上面の主応力図である。なお、図中の番号4の板(フランジプレートの張出部)は長いために、他の板に比して縮尺は1/2にしてあるが、応力線のスケールは他の板と同一である。

端面の変位の基本ケースの解析結果から得られる、変位を与えた端面および固定した端面上の節点反力から、端面全体としての軸力(P_i^R, P_i^L)、せん断力

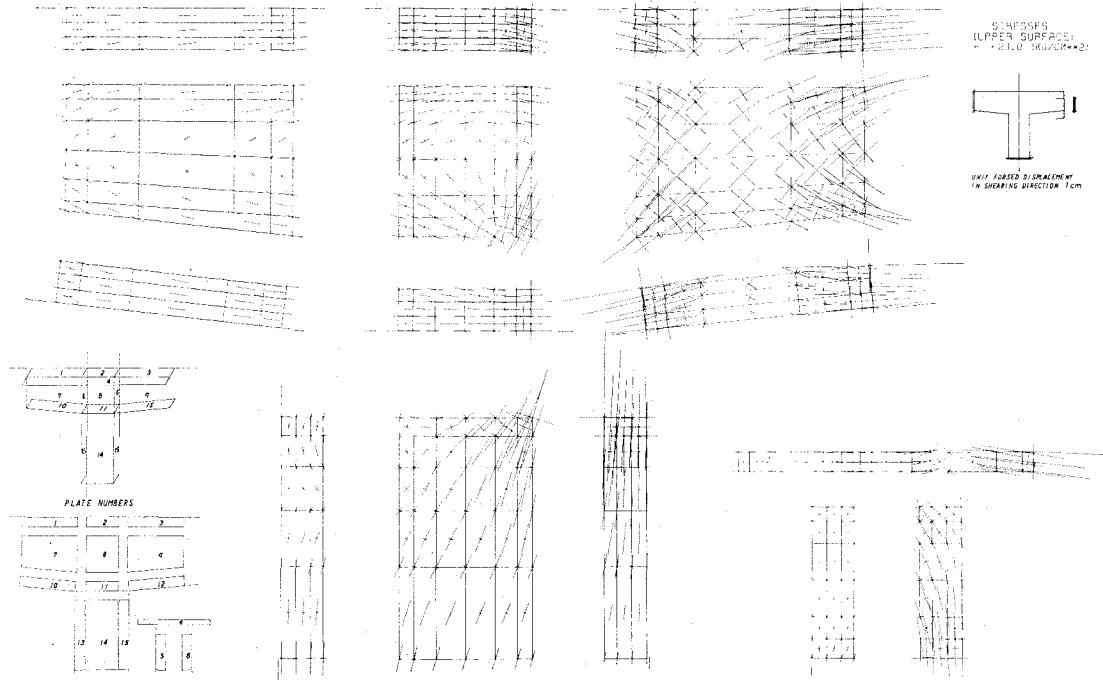


図-10 右端鉛直方向 1 cm の強制変位に対する応力解析結果（上面）

(S_i^R, S_i^L) およびモーメント (M_i^R, M_i^L) を評価する。 $i=1 \sim 6$ は右端面および左端面の単位の変位に対する基本 6 ケース（軸方向、鉛直方向、回転方向の順）に対応して付した番号である。また、右端面の反力を添字 R 、左端面のそれに L をつけて区別している。その結果、両端面の変位 $(u^R w^R \theta^R u^L w^L \theta^L)$ とそれに対応する断面力 $(P^R S^R M^R P^L S^L M^L)$ との関係を与える、式 (1) に対応する式が、次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} P_1^R & P_2^R & P_3^R & P_4^R & P_5^R & P_6^R \\ S_1^R & S_2^R & S_3^R & S_4^R & S_5^R & S_6^R \\ M_1^R & M_2^R & M_3^R & M_4^R & M_5^R & M_6^R \\ P_1^L & P_2^L & P_3^L & P_4^L & P_5^L & P_6^L \\ S_1^L & S_2^L & S_3^L & S_4^L & S_5^L & S_6^L \\ M_1^L & M_2^L & M_3^L & M_4^L & M_5^L & M_6^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^R \\ w^R \\ \theta^R \\ u^L \\ w^L \\ \theta^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^R \\ S^R \\ M^R \\ P^L \\ S^L \\ M^L \end{bmatrix} \quad \dots \quad (6)$$

なお、断面力の符号のとり方は 図-11 に示す通りである。式 (6) を式 (2) と同じ記号で表わせば、端面に境界条件として与えられた断面力 f に対応する端面の変位 u は式 (3) から求まる。

端面の変位 u が求まると、基本 6 ケースに対して得られている結果のそれぞれに、対応する変位の値を係数として乗じて重ね合わせることによって、与えられた断面力 f に対応する結果が得られる。一例として、上記の過程から得られた、左端自由で右端に単位のせん断力が作用する場合の主応力図を 図-12 に示す。

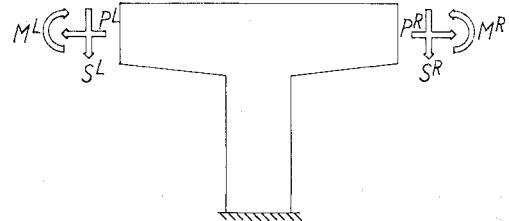


図-11 両端面の断面力

両端面に与えられた断面力の他に対象部分構造内部に作用する荷重、たとえば自重、上載荷重などが与えられる場合には、これらの荷重に対して別途解析を行い、その結果を両端面に与えられた断面力に対応する解と重ね合わせることによって、与えられた荷重条件に対する結果が得られる。ここでは、実際の荷重条件に対する解析結果の一例として、橋梁全体に列車荷重が満載された場合の解析結果を 図-13 に示す。この結果は、対象部分構造内に作用する自重、列車荷重などの上載荷重および、橋梁全体に作用するこれらの荷重に対して骨組解析の結果得られた、対象部分構造の両端面に位置する断面に与えられる断面力の下での結果である。図-13 において考慮した荷重条件の詳細を表-2 に示した。また、列車荷重および橋面に分布する荷重は 図-14 に示すような方法で評価した。

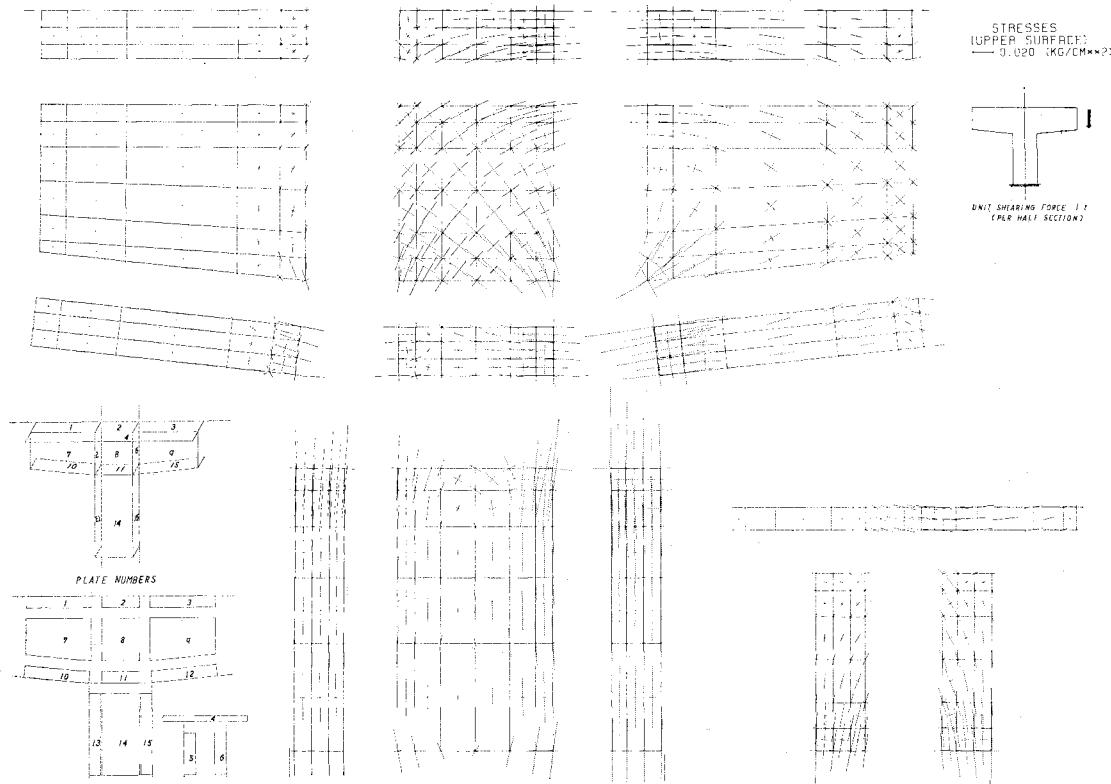


図-12 右端せん断力 1t (半断面) に対する応力解析結果 (上面)

5. おわりに

以上に、与えられた構造系の中の1部分のみを対象として有限要素法による解析を行う際に、対象部分構造の境界条件が断面力として与えられる場合の、境界条件を処理する1つの方法について述べ、応用例として吾妻川橋梁の設計に際して行った箱型断面ラーメン橋柱頭部の解析結果を示した。

現在では、有限要素法による解析が広く行われているが、はじめにも述べたように、対象系が複雑であればあるほど、経済的な制約を強く受け精密な解析を行うことが困難となる場合が多い。ここで述べた方法がそのような制約に対する解決策として、少しでも寄与するところがあれば幸いである。なお、吾妻川橋梁の解析結果の詳細は、文献8)に報告したので参照していただきたい。

おわりに、本解析を行うにあたり、東京工業大学土木工学科の西村俊夫教授および三木千寿助手には多くの面でご助力をいただきました。また、吉村総一氏(現・佐藤工業勤務)には、卒業論文としてプログラムの作成やデータの整理に絶大な協力をいただきました。ここに、深甚の謝意を表します。

表-2 図-13において考慮した荷重条件

荷重条件	備考
死荷重+列車荷重(箇載)	* 箇別断面の対称性を考慮しているので各断面力は半断面あたりの力である。
死荷重(自重: 2.5t/m³ 橋面荷重: 3.57t/m*, **)	
列車荷重: 6.06t/n*, **	
骨組として計算した両端面の断面力 $S^L = 1759.5t^*$ $S^R = 1759.5t^*$ $M^L = -34020t\cdot m^*$ $M^R = -34020t\cdot m^*$ $P^L = 0t^*$ $P^R = 0t^*$	** 図-14 参照

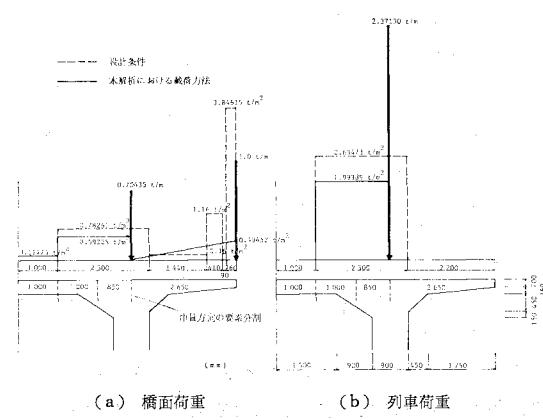
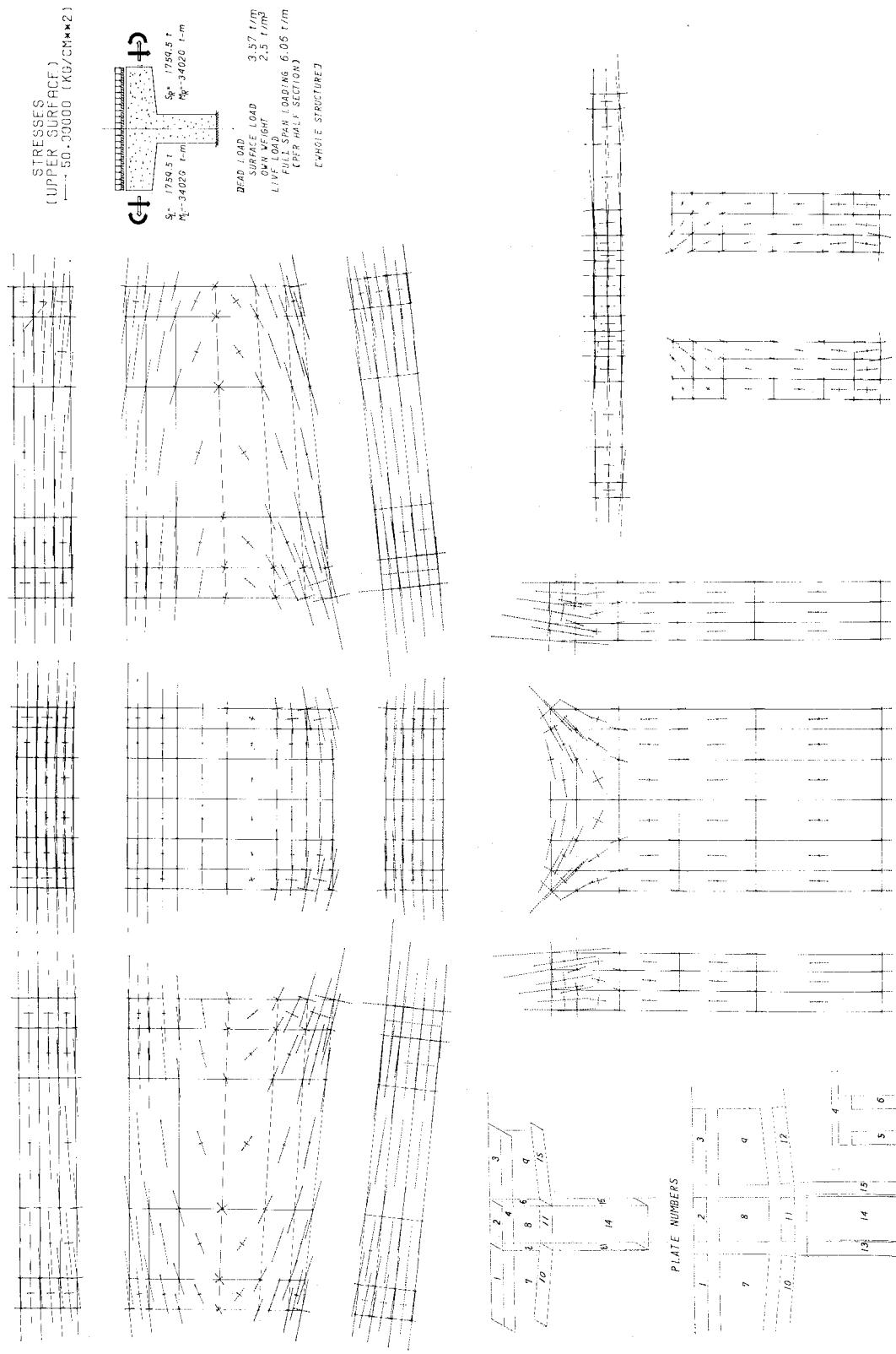


図-14 上載荷重



参考文献

- 1) Knittel, G. : Zur Berechnung des dünnwandigen Kastenträgers mit gleichbleibenden symmetrischen Querschitt, Beton-und Stahlbetonbau, 60 Jahrgang, 9 Heft, pp. 205-211, September 1965.
- 2) Mrotzek, M. : Berechnung von Hohlkastenträgern ohne Querschotte, Beton-und Stahlbetonbau, 66 Jahrgang, 12 Heft, pp. 281-285, Dezember 1971.
- 3) Maisel, B.I., R.E. Rowe and R.A. Swann : Concrete box-girder bridges, The Structural Engineer, Vol. 51, No. 10, pp. 363-376, Oct. 1973.
- 4) 栗原利栄・国広哲男：天草連絡道路の PC 橋柱頭部トラスの光弾性試験, プレストレスト・コンクリート, Vol. 8, No. 3, pp. 14-19, Aug. 1966.
- 5) 御子柴光春・根本文夫・中村年男：浦戸大橋の設計について, プレストレスト・コンクリート, Vol. 13, No. 5, pp. 12-23, Oct. 1971.
- 6) 高瀬浩一・樋渡則章・熊岡禎二：三萩野高架橋の設計と施工, プレストレスト・コンクリート, Vol. 16, No. 1, pp. 46-54, Feb. 1974.
- 7) 吉田 裕・雨宮栄一郎・増田陳紀：立体構造解析のための薄板有限要素, 土木学会論文報告集, 第 211 号, pp. 19-28, 1973 年 3 月.
- 8) 吉田 裕・高橋 升・増田陳紀：有限要素法による箱型断面ラーメン 橋柱頭部の応力解析, 東京工業大学土木工学科研究報告, 第 18 号, pp. 1-15, 1975 年 7 月.
(1974.7.23・受付)