

高周波交番載荷による円柱体の振舞い

BEHAVIOUR OF A CYLINDRICAL BODY DUE TO HIGH FREQUENCY ALTERNATIVE LOADING

平 井 敦*
By Atsushi HIRAI

1. 序 言

この小論は 2 か月前に発表した¹⁾「載荷された円柱体に関する一考察」に関連する問題であるが、円柱体自身他にその周囲の物質についても言及したいので稿を改める次第である。この小論も従来の弾性論の立場とは異なった考えをとっており、根本的には 1971 年に発表した筆者の基本的な考え方²⁾の可否を問うために、他の具体例について述べたものである。エネルギーの消費に関する定数 k は本稿でも零として取り扱う。筆者の考えの基本方程式群は次の二群である¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_1 &= (C_1)^2 \mathcal{P}^2 \mathbf{R}_1 \\ \text{rot } \mathbf{R}_1 &= 0 \\ \mathbf{R}_1 &= -\text{grad } \varphi \\ \dot{\varphi} &= (C_1)^2 \mathcal{P}^2 \varphi \\ \dot{\mathbf{S}}_1 &= (C_1)^2 \mathcal{P}^2 \mathbf{S}_1 \\ \text{rot } \mathbf{S}_1 &= 0 \\ C_1 &= \sqrt{\frac{2c}{\mu} \left(\frac{c}{\varepsilon} + r \right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_2 &= (C_2)^2 \mathcal{P}^2 \mathbf{R}_2 \\ \text{div } \mathbf{R}_2 &= 0 \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{S}_2 \\ \dot{\mathbf{W}} &= (C_2)^2 \mathcal{P}^2 \mathbf{W} \\ \dot{\mathbf{S}}_2 &= (C_2)^2 \mathcal{P}^2 \mathbf{S}_2 \\ \text{div } \mathbf{S}_2 &= 0 \\ C_2 &= \sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon \mu}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.2)$$

2. 交番載荷を受ける円柱体

図示のような半径 a 、長さ $2b$ の円柱体を地上の剛体上に立て、その上端に全質量 M なる剛体を載荷した場合についてはすでに取り扱ったが、本稿ではこの M が正弦波的に変動する場合すなわち交番載荷のときの現象を筆者の理論によって

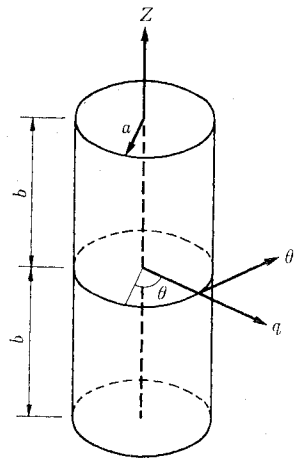


図-1

記述しようとするものである。質量 M が円柱体の質量に比し比較的小でありまた交番する振動数 ω が高いすなわち高周波数の場合には交番載荷による半径 a の変化は無視し得るほど微小であると取り扱ってもよろしいような現象が存在すると筆者は考える。このような場合が本稿の対象であって、 M が比較的大でまた交番する振動数 ω が低い、すなわち低周波交番載荷の問題は別の機会にゆずる。また最初に断ったごとく $k=0$ と考える。

まず勾配場である力場 \mathbf{R}_1 を取りあげる。

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{1z}}{\partial t^2} = (C_1)^2 \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{1z}}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{1z}}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial \mathbf{R}_{1z}}{\partial q} \right] \dots\dots\dots (i)$$

$$\mathbf{R}_{1z} = u(q) \cdot e^{(i\omega t - mz)i} \dots\dots\dots (ii)$$

とおいて (i) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial q} - \left\{ m^2 - \frac{\omega^2}{(C_1)^2} \right\} u = 0$$

いま

$$a^2 = m^2 - \left(\frac{\omega}{C_1} \right)^2 \dots\dots\dots (2.1)$$

* 正会員 工博

1) 土木学会論文報告集, 第 249 号 (1976 年 5 月) p. 13~20
2) 変形する物体の力学に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第 190 号 (1971 年 6 月) p. 1

とおけば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial q} - \alpha^2 u = 0 \quad \dots\dots\dots(\text{iii})$$

さらに

$$\xi = \alpha q \quad \dots\dots\dots(\text{iv})$$

とおいて,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - u = 0 \quad \dots\dots\dots(\text{v})$$

ゆえに,

$$\left. \begin{aligned} R_{1z} &= A \cdot I_0(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \\ \xi &= \alpha q \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

次に

$$\frac{\partial^2 R_{1q}}{\partial t^2} = (C_1)^2 \left[\frac{\partial^2 R_{1z}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R_{1q}}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial R_{1q}}{\partial q} - \frac{1}{q^2} R_{1q} \right]$$

より次の解が得られる。

$$R_{1q} = B \cdot I_1(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \quad \dots\dots\dots(\text{vi})$$

$\text{rot} \mathbf{R}_1 = 0$ なる条件を想起して

$$\frac{\partial R_{1q}}{\partial z} - \frac{\partial R_{1z}}{\partial q} = 0 \quad \dots\dots\dots(\text{vii})$$

の関係を使って

$$B = -\frac{\alpha}{mi} A \quad \dots\dots\dots(\text{viii})$$

$$\therefore R_{1q} = -\frac{\alpha}{mi} A \cdot I_1(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

また

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (C_1)^2 \nabla^2 \varphi = (C_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right] \quad \dots\dots\dots(\text{a})$$

の解は,

$$\varphi = H \cdot I_0(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \quad \dots\dots\dots(\text{b})$$

さらに

$$\mathbf{R} = -\text{grad} \varphi \quad \dots\dots\dots(\text{c})$$

の関係により係数 H を A で表現することができる。よって,

$$\varphi = \frac{A}{mi} I_0(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

最後に変位 \mathbf{S}_1 の解は,

$$\left. \begin{aligned} S_{1z} &= F \cdot I_0(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \\ S_{1q} &= G \cdot I_0'(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \\ &= G \cdot I_1(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(\text{i})$$

$\text{rot} \mathbf{S}_1 = 0$ の条件より

$$G = -\frac{\alpha}{mi} F \quad \dots\dots\dots(\text{ii})$$

さらに平井の仮定した条件式を利用する。すなわち

$$\dot{\varphi} = -\left(\frac{c}{\varepsilon} + \tau \right) \text{div} \mathbf{S}_1 \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

式 (i), (ii) より

$$\text{div} \mathbf{S}_1 = -\left(\frac{\alpha^2}{mi} + mi \right) F \cdot I_0(\xi) e^{(\omega t - mz)i}$$

式 (2.4), (2.5) より

$$F = \frac{\omega i}{\left(\frac{c}{\varepsilon} + \tau \right) (\alpha^2 - m^2)} A \quad \dots\dots\dots(\text{iii})$$

式 (2.1) の関係を考慮すれば

$$F = \frac{2c}{\mu} \frac{A}{\omega i} \quad \dots\dots\dots(\text{iv})$$

結局次式が得られる。

$$S_{1z} = \frac{2c}{\mu} \frac{A}{\omega i} I_0(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \quad \dots\dots\dots(2.6 \cdot \text{a})$$

$$S_{1q} = \frac{2c}{\mu} \frac{\alpha}{m\omega} A I_1(\xi) e^{(\omega t - mz)i} \quad \dots\dots\dots(2.6 \cdot \text{b})$$

ただし,

$$\alpha q = \xi$$

式 (2.6) を t で微分すれば

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_{1z} &= \frac{2c}{\mu} R_{1z} \\ \dot{S}_{1q} &= \frac{2c}{\mu} R_{1q} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

同様な計算を式 (1.2) について行うことができるが、検算の意味をも含めて別な取り扱いを試みる。S-2 の世界、すなわち環流場は電磁論的な色彩が強いと述べたことがあるが¹⁾、式 (1.2) を産みだしたもとの Maxwell 型の次式に戻ってみる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \dot{\mathbf{R}}_2 &= c \text{rot} \mathbf{W} \\ \mu \dot{\mathbf{W}} &= -c \text{rot} \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{S}_2 \\ \text{div} \mathbf{W} &= 0 \\ \text{div} \mathbf{R}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.8 \cdot \text{a})$$

これらを 図-1 の座標系で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \dot{R}_{2z} &= c \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} (q W_\theta) \\ \varepsilon \dot{R}_{2q} &= -c \frac{\partial W_\theta}{\partial z} \\ \mu \dot{W}_\theta &= -c \left\{ \frac{\partial R_{2q}}{\partial z} - \frac{\partial R_{2z}}{\partial q} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.8 \cdot \text{b})$$

いまこの S-2 の世界の円振動数を、S-1 (勾配場) の場合と暫く識別のために $\bar{\omega}$ と記号することとし,

$$\left. \begin{aligned} R_{2z} &= u(q) e^{(\bar{\omega} t - mz)i} \\ R_{2q} &= v(q) e^{(\bar{\omega} t - mz)i} \\ W_\theta &= w(q) e^{(\bar{\omega} t - mz)i} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(\text{I})$$

とおけば式 (8·b) (I) より

$$\varepsilon \bar{\omega} i \cdot R_{2q} = c m i W_\theta \quad \dots\dots\dots(\text{II})$$

式 (8·b) の第3式より

$$\mu \bar{\omega} i \cdot W_\theta = c \left\{ m i R_{2q} + \frac{\partial R_{2z}}{\partial q} \right\} \quad \dots\dots\dots(\text{III})$$

(II), (III) より結局次式が得られる。

$$R_{2q} = \frac{mi}{\bar{a}^2} \frac{\partial R_{2z}}{\partial q} \dots\dots\dots(二)$$

ただし、

$$\bar{a}^2 = m^2 - \left(\frac{\bar{\omega}}{c_2}\right)^2 \dots\dots\dots(2.9)$$

式(二)を(一)に代入して

$$W_\theta = \frac{\varepsilon \bar{\omega} i}{c} \frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial R_{2z}}{\partial q} \dots\dots\dots(ホ)$$

R_{2z} の解を

$$\left. \begin{aligned} R_{2z} &= \bar{A} \cdot I_0(\bar{\xi}) e^{i(\bar{\omega}t - mz)i} \\ \bar{\xi} &= \bar{a}q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.10.a)$$

と表わせば式(二),(ホ)より、

$$R_{2q} = \frac{mi}{\bar{a}} \bar{A} \cdot I_0'(\bar{\xi}) e^{i(\bar{\omega}t - mz)i} \dots\dots\dots(2.10.b)$$

$$W_\theta = \frac{\varepsilon \bar{\omega} i}{c \bar{a}} \bar{A} \cdot I_0'(\bar{\xi}) e^{i(\bar{\omega}t - mz)i} \dots\dots\dots(2.11)$$

変位 S_2 については式(1.2)より

$$S_{2z} = -\frac{2c}{\mu} \frac{\bar{A}}{\bar{\omega} i} \cdot I_0(\bar{\xi}) e^{i(\bar{\omega}t - mz)i} \dots\dots\dots(2.12.a)$$

$$S_{2q} = -\frac{2c}{\mu} \frac{m}{\bar{a} \bar{\omega}} \bar{A} \cdot I_0'(\bar{\xi}) e^{i(\bar{\omega}t - mz)i} \dots\dots\dots(2.12.b)$$

および

$$\dot{S}_{2z} = -\frac{2c}{\mu} R_{2z} \dots\dots\dots(2.13.a)$$

$$\dot{S}_{2q} = -\frac{2c}{\mu} R_{2q} \dots\dots\dots(2.13.b)$$

いよいよ円柱体の端部の条件を設定する段階となった。この件に関連のある式は(2.2),(2.10.a),(2.7),(2.13.a),(2.1)および(2.9)である。また円柱体端部の力場(法線成分) R_e と重荷 w については²⁾

$$w = \frac{\varepsilon}{4\pi} R_e \dots\dots\dots(2.14)$$

円柱体内部を伝播する正弦波状の波動を考察することにしその円振動数を ω とする。 R_{2z} に含まれる $\bar{\omega}$ を ω に書き換えて、

$$\left. \begin{aligned} R_{1z} &= A \cdot I_0(\alpha q) e^{i(\omega t - mz)i} \\ R_{2z} &= \bar{A} \cdot I_0(\bar{\alpha} q) e^{i(\omega t - mz)i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.15.a)$$

この波動の原因は円柱体の端部にあるものとし、その境界条件としては $Me^{i\omega t}$ および $\dot{S}_e e^{i\omega t}$ にある係数が乗せられた形で与えられるものと考え、まず前者について考察を進める。

円柱体の上部に質量 M なる剛体を載荷した場合の円柱体端部の力場 R_e は式(2.14)より

$$R_e = \frac{4\pi}{\varepsilon} w = \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{M}{\pi a^2}$$

$$\therefore \pi a^2 R_e = \frac{4\pi}{\varepsilon} M$$

これは静的載荷の場合である¹⁾。交番載荷の場合にはこれに $e^{i\omega t}$ を乗じたものを境界条件とする。したがって

$$\frac{4\pi}{\varepsilon} M e^{i\omega t} = \int_0^a [R_{1z} + R_{2z}] 2\pi q dq \dots\dots\dots(2.16)$$

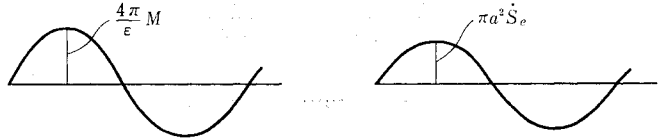


図-2

ただし [] は 図-3 の $z = -b$ での値をとることを意味する。いま R_{1z} および R_{2z} として

$$\left. \begin{aligned} R_{1z} &= A \cdot I_0(\alpha q) e^{i\omega t} \cos mz \\ R_{2z} &= \bar{A} \cdot I_0(\bar{\alpha} q) e^{i\omega t} \cos mz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.15.b)$$

と考えると

$$\int_0^a [R_{1z}] 2\pi q dq = 2\pi A \cos mb \cdot e^{i\omega t} \frac{a \cdot I_1(\alpha a)}{\alpha} \dots\dots\dots(2.17.a)$$

$$\int_0^a [R_{2z}] 2\pi q dq = 2\pi \bar{A} \cos mbe^{i\omega t} \frac{a \cdot I_1(\bar{\alpha} a)}{\bar{\alpha}} \dots\dots\dots(2.17.b)$$

この2式を式(2.16)に代入して、

$$\frac{2}{\varepsilon} M = a \cos mb \left\{ \frac{A}{\alpha} I_1(\xi_0) + \frac{\bar{A}}{\bar{\alpha}} I_1(\bar{\xi}_0) \right\} \dots\dots(i)$$

ただし、

$$\xi_0 = \alpha a, \bar{\xi}_0 = \bar{\alpha} a$$

次に円柱体上部(図-3の $z = -b$ 端)の変位速度の条件を $(\pi a^2 \dot{S}_e e^{i\omega t})$ と考える。

この場合円柱体が圧縮される方向の変位速度を正としたことになるが、静的載荷の場合¹⁾では変位 S の引伸しを正としたのでこの後者の考えに統一すれば上記 $[\dot{S}_e]$ は負である。しかし 図-3 の Z 方向が 図-1 と反対ゆえ $[\dot{S}_e], [R_e]$ とともに正と取り扱ってよい。

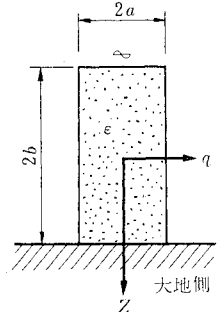


図-3

$$\begin{aligned} \pi a^2 \dot{S}_e e^{i\omega t} &= \int_0^a (\dot{S}_{1z} + \dot{S}_{2z}) 2\pi q dq \\ &= \int_0^a \frac{2c}{\mu} (R_{1z} - R_{2z}) 2\pi q dq \dots\dots(2.18) \end{aligned}$$

式(2.17),(2.18)より

$$\frac{\mu}{2c} [\dot{S}_e] = \frac{2 \cos mb}{a} \left\{ \frac{A}{\alpha} I_1(\xi_0) - \frac{\bar{A}}{\bar{\alpha}} I_1(\bar{\xi}_0) \right\} \dots\dots\dots(ii)$$

(i),(ii)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{A \cdot I_1(\xi_0)}{\alpha} &= \frac{1}{a \cos mb} \left\{ \frac{M}{\varepsilon} + \frac{\mu a^2}{8c} [\dot{S}_e] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi a \cdot \cos mb} \left\{ \frac{4\pi}{\varepsilon} M + \pi a^2 \frac{\mu}{2c} [\dot{S}_e] \right\} \\ &\equiv P \\ \frac{\bar{A} \cdot I_1(\bar{\xi}_0)}{\bar{\alpha}} &= \frac{1}{a \cos mb} \left\{ \frac{M}{\varepsilon} - \frac{\mu a^2}{8c} [\dot{S}_e] \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi a \cdot \cos mb} \left\{ \frac{4\pi}{\epsilon} M - \pi a^2 \frac{\mu}{2c} [\dot{S}_e] \right\} \Bigg|_{\equiv Q} \dots\dots\dots (2.19)$$

したがって M および端部における $[\dot{S}_e]$ が与えられれば A および \bar{A} に関する項は上記の P および Q として既知項となる。

以上の議論では式 (2.1) または (2.9) の右辺が正であるとの立場をとっている。これが負の場合について式 (2.9) の場合を一応とりあげる。式 (1.2) より

$$\frac{\partial^2 R_{2z}}{\partial t^2} = (C_2)^2 \left[\frac{\partial^2 R_{2z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_{2z}}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial R_{2z}}{\partial q} \right] \dots\dots\dots (a)$$

$$R_{2z} = u(q) e^{i(\omega t - m z)}$$

とおけば式 (a) より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial q} - \left\{ m^2 - \left(\frac{\bar{\omega}}{C_2} \right)^2 \right\} u = 0$$

いま

$$m^2 - \left(\frac{\bar{\omega}}{C_2} \right)^2 < 0$$

の場合を考察の対象としてるので上式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial q} + \left\{ \left(\frac{\bar{\omega}}{C_2} \right)^2 - m^2 \right\} u = 0$$

いま

$$\bar{k}^2 = \left(\frac{\bar{\omega}}{C_2} \right)^2 - m^2 \dots\dots\dots (2.20)$$

とおけば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial q} + \bar{k}^2 u = 0$$

$$\therefore R_{2z} = a J_0(\bar{k}q) e^{i(\omega t - m z)} \dots\dots\dots (2.21)$$

もし

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{C_2} \right)^2 - m^2 < 0$$

の場合には

$$\begin{aligned} \bar{k}q &= q\sqrt{\left(\frac{\bar{\omega}}{C_2} \right)^2 - m^2} = q\sqrt{i^2 \left\{ m^2 - \left(\frac{\bar{\omega}}{C_2} \right)^2 \right\}} \\ &= q\sqrt{i^2 \bar{\alpha}^2} = i\bar{\alpha}q = i\bar{\epsilon} \dots\dots\dots (b) \end{aligned}$$

ゆえに式 (2.21) より

$$R_{2z} = a J_0(i\bar{\epsilon}) e^{i(\omega t - m z)} \dots\dots\dots (2.22)$$

公式 $J_0(ix) = I_0(x)$ により

$$R_{2z} = a I_0(\bar{\epsilon}) e^{i(\omega t - m z)}$$

となるが、これは式 (2.10・a) である。

3. 円柱体と外界との関係

円柱体の外側部分 (外界) は他の物質で無限遠まで満たされているものとする。円柱体内部に起こっている事象が円柱体表面を通じて外界に与える影響を議論しようとするものである。外界の物質に関する定数を $\epsilon' \mu' r'$

表-1

$C_1 \rightarrow U_1$	$\alpha \rightarrow \beta$
$C_2 \rightarrow U_2$	$\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}$
$R \rightarrow E$	$\omega \rightarrow f$
$W \rightarrow H$	$m \rightarrow p$
$S \rightarrow T$	$\varphi \rightarrow \psi$

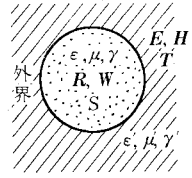


図-4

とする。その他の記号も外界の事象であることを明らかにするために表-1 のごとく示すこととし、まず基本的な解を求めることから始める。基本式は次の二群である。

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \sqrt{\frac{2c}{\mu'} \left(\frac{c}{\epsilon'} + r' \right)} \\ \ddot{E}_1 &= (U_1)^2 \nabla^2 E_1 \\ \text{rot } E_1 &= 0 \\ E_1 &= -\text{grad } \psi \\ \ddot{\psi} &= (U_1)^2 \nabla^2 \psi \\ \dot{T}_1 &= (U_1)^2 \nabla^2 T_1 \\ \text{rot } T_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \sqrt{\frac{C_2}{\epsilon' \mu'}} \\ \ddot{E}_2 &= (U_2)^2 \nabla^2 E_2 \\ \text{div } E_2 &= 0 \\ H &= \frac{1}{2} \text{rot } T_2 \\ \ddot{H} &= (U_2)^2 \nabla^2 H \\ \dot{T}_2 &= (U_2)^2 \nabla^2 T_2 \\ \text{div } T_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

これらの解は

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= p^2 - \left(\frac{f}{U_1} \right)^2 \\ \beta q &= \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.3)$$

とおけば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E_{1z} &= D \cdot K_0(\eta) e^{i(f t - p z)} \\ E_{1q} &= -\frac{\beta}{p i} D \cdot K_0'(\eta) e^{i(f t - p z)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.4)$$

$$\psi = \frac{D}{p i} K_0(\eta) e^{i(f t - p z)} \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{1z} &= \frac{2c}{\mu'} \frac{D}{f i} K_0(\eta) e^{i(f t - p z)} \\ T_{1q} &= \frac{2c}{\mu'} \frac{\beta}{p f} D \cdot K_0'(\eta) e^{i(f t - p z)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{1z} &= \frac{2c}{\mu'} E_{1z} \\ \dot{T}_{1q} &= \frac{2c}{\mu'} E_{1q} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.7)$$

また

$$\left. \begin{aligned} \bar{\beta}^2 &= p^2 - \left(\frac{\bar{f}}{U_2} \right)^2 \\ \bar{\beta} q &= \bar{\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8)$$

において、

$$\left. \begin{aligned} E_{2z} &= \bar{D} \cdot K_0(\bar{\eta}) e^{(\bar{f}t - \beta z) i} \\ E_{2q} &= \frac{\beta i}{\bar{\beta}} \bar{D} \cdot K_0'(\bar{\eta}) e^{(\bar{f}t - \beta z) i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.9)$$

$$H_{\theta} = \frac{\epsilon' \bar{f} i}{c\bar{\beta}} \bar{D} \cdot K_0'(\bar{\eta}) e^{(\bar{f}t - \beta z) i} \dots\dots\dots(3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{2z} &= -\frac{2c}{\mu'} \frac{\bar{D}}{f i} K_0(\bar{\eta}) e^{(\bar{f}t - \beta z) i} \\ T_{2q} &= -\frac{2c}{\mu'} \frac{\beta \bar{D}}{f \bar{\beta}} K_0'(\bar{\eta}) e^{(\bar{f}t - \beta z) i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{2z} &= -\frac{2c}{\mu'} E_{2z} \\ \dot{T}_{2q} &= -\frac{2c}{\mu'} E_{2q} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.12)$$

以上の解式では一般性を保持するために f, p, \bar{f} などの記号を使用した。円柱体の上端部に円振動数 ω の正弦波動的波動を与えたと仮定しているため次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \omega &= f = \bar{f} = \bar{\omega} \\ m &= p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.13)$$

次に円柱体と外界との境界面のことを考える。すでに述べたごとく²⁾、 ϵR の法線成分と境界面に沿った R および W の切線成分について現象に適合するようある仮定をおくわけである。もちろん実験的な検証を経なければならないが、平井の理論の運用の仕方を示す一例として今の所は仮定するわけである。本稿では境界面での屈折現象だけについて筆者の考え方の一端を示す。表-1の記号を使用し、 ϵ, μ, γ なる物質定数をもつ物質と ϵ', μ', γ' なる物質定数をもつ物質の境界面において ϵR の法線成分を ϵR_n と記号すれば既述のごとく

$$\left. \begin{aligned} \epsilon R_{1n} &= \epsilon' E_{1n} \\ \epsilon R_{2n} &= \epsilon' E_{2n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.14)$$

円柱体の場合法線に対応するものは q である。上式の第1式に式(2.3)および(3.4)第2式を代入し $q = a$ において、 $\alpha a = \bar{\epsilon}_0, \beta a = \bar{\eta}_0$ とおけば次式が得られる。

$$\frac{A}{D} = \frac{\epsilon' \beta}{\epsilon \alpha} \frac{K_0'(\bar{\eta}_0)}{I_0'(\bar{\epsilon}_0)} \dots\dots\dots(3.15.a)$$

同様に式(3.14)の第2式より、 $\bar{\alpha} a = \bar{\epsilon}_0, \bar{\beta} a = \bar{\eta}_0$ において、

$$\frac{\bar{A}}{\bar{D}} = \frac{\epsilon' \bar{\alpha}}{\epsilon \bar{\beta}} \frac{K_0'(\bar{\eta}_0)}{I_0'(\bar{\epsilon}_0)} \dots\dots\dots(3.15.b)$$

この条件はまた

$$[W_{\theta}]_{q=a} = [H_{\theta}]_{q=a} \dots\dots\dots(3.16)$$

より得られるものと同一である。

R の境界面における切線成分 R_t などについては以前²⁾

$$R_t = E_t \dots\dots\dots(3.17)$$

のごとく考えていたが屈折の場合次のごとく訂正したい。

\dot{S}_1 なる速度を持つ波動が境界面に θ_1 なる入射角で

到達し、境界面を通過し ϵ' 系の物質に \dot{T}_1 なる速度の波動として ϵ' 系の物質に入り θ_1' なる屈折角を持つことになるとすれば、図-5の境界面での屈折関係は(ベクトルの太字表示を暫くやめて)

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_1'} = \frac{\dot{S}_1}{\dot{T}_1}$$

いま取り扱っているのは円柱体であるゆえ式(2.7)、(3.7)の関係を上式に代入して

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_1'} = \frac{\mu' / E_1}{\mu / R_1} \dots\dots\dots(3.17.a)$$

同様にして、

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_2'} = \frac{\dot{S}_2}{\dot{T}_2} = \frac{\mu' / E_2}{\mu / R_2} \dots\dots\dots(3.17.b)$$

これらは屈折の場合であるが反射の場合については問題の取り扱いが異なる。

式(3.14)を(3.17)型の式で示すと、

$$\epsilon R_1 \cos \theta_1 = \epsilon' E_1 \cos \theta_1' \dots\dots\dots(i)$$

式(3.17.a)より

$$\frac{\mu}{R_1} \sin \theta_1 = \frac{\mu'}{E_1} \sin \theta_1' \dots\dots\dots(ii)$$

これらの式より

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_1'} = \frac{\epsilon \mu'}{\epsilon' \mu} \left(\frac{R_1}{E_1} \right)^2 \dots\dots\dots(3.18)$$

この円柱体の境界面において R_{1n} も S_1 と同じ屈折を行うと考えてみると、

$$\tan \theta_1 = \frac{R_{1z}}{R_{1q}}, \quad \tan \theta_1' = \frac{E_{1z}}{E_{1q}}$$

$$\therefore \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_1'} = \frac{R_{1z}}{R_{1q}} \frac{E_{1q}}{E_{1z}} \dots\dots\dots(iii)$$

式(3.18)と(iii)より、式(3.14)の関係を想起して整理すれば、

$$\frac{R_{1z}}{\mu} = \frac{E_{1z}}{\mu'} \dots\dots\dots(3.19.a)$$

S_2 の世界についても同様にして

$$\frac{R_{2z}}{\mu} = \frac{E_{2z}}{\mu'} \dots\dots\dots(3.19.b)$$

これらを式(3.14)型の表示にすれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{1z}}{\mu} &= \frac{E_{1z}}{\mu'} \\ \frac{R_{2z}}{\mu} &= \frac{E_{2z}}{\mu'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(iv)$$

式(3.19.a)、(2.2)、(3.4)および(3.15.a)より

$$\frac{\epsilon \mu}{\epsilon' \mu'} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\chi}{\phi} = 1 \dots\dots\dots(3.20.a)$$

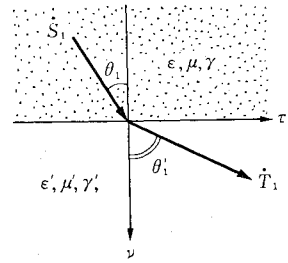


図-5

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{K_0(\eta_0)}{K_0'(\eta_0)} \\ \phi &= \frac{I_0(\xi_0)}{I_0'(\xi_0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.21 \cdot a)$$

同様にして

$$\frac{\epsilon \mu}{\epsilon' \mu'} \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \frac{\bar{x}}{\bar{\phi}} = 1 \dots\dots\dots (3.20 \cdot b)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{K_0(\bar{\eta}_0)}{K_0'(\bar{\eta}_0)} \\ \bar{\phi} &= \frac{I_0(\bar{\xi}_0)}{I_0'(\bar{\xi}_0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.21 \cdot b)$$

これら関数の概略を 図-6 に示す³⁾。

式 (3.21), (3.15) より

$$D = \frac{\mu'}{\mu} \frac{I_0(\xi_0)}{K_0(\eta_0)} A \dots\dots\dots (3.22 \cdot a)$$

$$\bar{D} = \frac{\mu'}{\mu} \frac{I_0(\bar{\xi}_0)}{K_0(\bar{\eta}_0)} \bar{A} \dots\dots\dots (3.22 \cdot b)$$

この段階で式 (2.20), (2.22) と同じようなことを考察しておく。式 (3.9) は (3.8) の右辺が正のときである。

$$\bar{\kappa}^2 = \left(\frac{\bar{f}}{U_2} \right)^2 - p^2 > 0 \dots\dots\dots (3.23)$$

とすれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial q} + \left\{ \left(\frac{\bar{f}}{U_2} \right)^2 - p^2 \right\} u = 0$$

より

$$E_{2z} = \{ aJ_0(\bar{\kappa}q) - bY_0(\bar{\kappa}q) \} e^{i(\bar{f}t - p z)} \dots\dots (3.24)$$

もし

$$\left(\frac{\bar{f}}{U_2} \right)^2 - p^2 < 0$$

の場合には

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}q &= q\sqrt{\left(\frac{\bar{f}}{U_2} \right)^2 - p^2} = q\sqrt{i^2 \left\{ p^2 - \left(\frac{\bar{f}}{U_2} \right)^2 \right\}} \\ &= q\sqrt{i^2 \bar{\beta}^2} = i\bar{\beta}q = i\bar{\eta} \dots\dots\dots (イ) \end{aligned}$$

ゆえに次の公式を想起すれば式 (3.24) より、

$$\begin{aligned} \text{[公式]} \quad J_0(ix) + iY_0(ix) &= \frac{2}{\pi i} K_0(x) \\ E_{2z} &= \{ aJ_0(i\bar{\eta}) + i^2 bY_0(i\bar{\eta}) \} e^{i(\bar{f}t - p z)} \dots (3.25) \\ a &= bi \dots\dots\dots (ロ) \end{aligned}$$

とおけば

$$\begin{aligned} E_{2z} &= a \{ J_0(i\bar{\eta}) + iY_0(i\bar{\eta}) \} e^{i(\bar{f}t - p z)} \\ &= \frac{2a}{\pi i} K_0(\bar{\eta}) \cdot e^{i(\bar{f}t - p z)} \\ &= \frac{2b}{\pi} K_0(\bar{\eta}) \cdot e^{i(\bar{f}t - p z)} \end{aligned}$$

3) $I_0'(x) = I_1(x)$, $K_0'(x) = -K_1(x)$, Irving & Mullineux

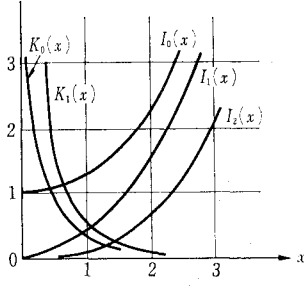


図-6

これは式 (3.9) に相当する。

この小論の目的は序言に述べたごとく筆者の基本的な考え方²⁾の可否を問うために実際的な問題をどのように処理するか例を示すことにある。一応ここで筆をおくべきであろうが、外界が大気の場合について筆者流の考えに固執するならばどのような考えを取らざるを得ないかをさらけ出して諸先学のご批判に供すべきであると考える次第である。従来の音響学の書では空気密度 ρ と Bulkmodulus K とより縦波である音波の速度を $\sqrt{K/\rho}$ としている。

外界が空気 (大気) の場合、筆者は従来の考えを捨てて

$$r' = -\frac{c}{2\epsilon'} \dots\dots\dots (3.26)$$

と考える。しかるとき

$$U_1 = U_2 = \sqrt{\frac{c^2}{\epsilon' \mu'}} = U' \dots\dots\dots (3.27)$$

したがって

$$\beta^2 = \bar{\beta}^2 = p^2 - \left(\frac{f}{U'} \right)^2 \dots\dots\dots (3.28)$$

よってたとえば E_z を求めると、

$$\begin{aligned} E_z &= E_{1z} + E_{2z} \\ &= (D + \bar{D}) K_0(\beta q) \cos ft \cdot \cos pz \dots\dots (3.29) \end{aligned}$$

\bar{D} の項があるということは、縦波の他に同じ伝播速度を持つ— f が共通—横波が存在すると思えるを得ないということである。このことが物理学上どんな不都合を生ずるのかをご教示いただきたい。筆者流の考えで、横波の世界 (環流場) も共存していると思えるのは大気の中でのエネルギーの流れ \mathcal{E}' はポインティング・ベクトル

$$\mathcal{E}' = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$$

の形式を持っているはずであるから、 S -2 の世界がなければ \mathbf{H} の存在が零となり $\mathcal{E}' = 0$ となるからである。

式 (3.28) に対し、波長を λ とし、音速を V' とし

$$\frac{f}{2\pi} = \frac{V'}{\lambda} \dots\dots\dots (i)$$

とおけば、

$$\beta^2 = p^2 - \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{V'}{U'} \right)^2 \dots\dots\dots (ii)$$

この V' が観測される音速 (群速度) であって \dot{T}_{1z} および \dot{T}_{2z} は位相速度と筆者は考える。

4. 結 語

筆者は 1971 年弾性論とは異なる理論を提起し、さらに円柱体の上部に全質量 M の剛体を載荷した場合を取

り扱い, 新しく提示した理論が実際的な問題をどのように処理するか一端を示した. 一つの思考実験である. 境界条件の取り扱いに異論もあることとは思うが, この点は将来訂正すればよいのであって, 本稿についても同じである. 筆者が問題とするのは筆者の考え方がまったく Crazy なのであろうかということである.

昔筆者が考えたことは2つの質量 $m_1 m_2$ の間に働く力

$$F = \frac{m_1 m_2}{\epsilon_0 r^3} r$$

に含まれるいわゆる重力定数 $1/\epsilon_0$ は空間を満たす媒質によって変化するのではないのかということである. 物理学をよくしなかったので筆者は気にもしなかったが, このことは大変な問題であるからしい⁴⁾. したがって $1/\epsilon_0$ を円柱体の物質定数の一つなどと考えるなどは Crazy もはなはだしいとお考えになるのはもっともと思う. しかし筆者はいまでもその立場をとっているのであって, この小論の式 (3.20) が示唆するごとく ϵ と ϵ' は異なって差支えないと思う.

電気力学は力学からヒントを得て組み立てられたといわれるので, 何となく力学が先輩であるかのようにわれわれは思い込んでいるらしい. それで電気力学を力学に帰着させようと多くの人々が努力したのかも知れない. しかし電磁理論を組立てた人々のやり方を注意深くたど

ってみると, 彼らは力学を手本としたといわれながら, 単に空間に歯車や小車を想像しただけで, 驚いたことには弾性論そのものを直接的に取り入れはしなかった. このことはわれわれの対象物と異なり, 電磁気分野では電場と磁場ははっきりと色分けされており Faraday や Maxwell の登場を待っていたということが幸いしたのである. それで歯車や小車だけにとどまり, A. Cauchy (1789~1857) 型の考え方が流入しなかったのであろう.

筆者が行ったことは逆に力学を電気力学流に考えることで, このことがまた大変な意味を持っているらしいので驚いている⁵⁾. しかし筆者が試みようとしていることは百余年前に Cauchy のたどった道とは別な道がありはしないかということ, まず古典的分野での修正が先行すべきものとするのである. 筆者が円柱体を中心にして取り扱った問題を弾性論ではどのように処理されているのか, この機会にご教示をいただきたい. 本稿で円柱対の外気が大気の場合に一寸触れたが, 音波の世界でも縦波の他に横波の存在を仮定せざるを得なくなり, Bulkmodulus 型の思考との間に板ばさみになる羽目に到っている. 騒音問題が目下わが国を騒がせているが, 案外筆者流の考え方が新しい解決策を産み出すのではなからうかとも考えている. 終りに臨み本稿を丁寧読んで助言をいただいた正会員平井 頭 (Mr. Akira HIRAI, 三崎船舶工業(株)) に深く感謝する.

(1975.8.4・受付)

4) アーサー・クライン, 竹内均訳: 新しい重力理論 (講談社) p. 198

5) ボルン, 林一訳: アインシュタインの相対性理論 (東京図書) p. 184