

長方形水路における流れの一近似解析

AN APPROXIMATE ANALYSIS OF FLOW THROUGH
RECTANGULAR CHANNEL

木村 喜代 治*

By Kiyoji KIMURA

1. ま え が き

円管内における乱流の流速分布や水理抵抗は、Prandtl と Kármán とによる理論的研究と Nikuradse の実験的研究とによって合理的に導かれている。しかしながら長方形水路の流れは、乱れの三次元的解析が困難なため理論的に厳密に解かれていない。流水抵抗や流砂問題などに関連した問題の解析は工学上必須の研究課題であり、通常その理論的解析は二次元問題として取り扱われている。しかしながら、この問題に関する実験はほとんど長方形水路によってなされている。したがって、この結果を二次元問題として解析するには、水路側壁の影響評価が必要となる。また水工学上の基礎的問題として、長方形水路内の流速分布、潤边上の摩擦速度分布および抵抗式を探索することも必要である。これらは相互に関連した一貫性のあることが望ましい。いまのところ厳密な乱流としての解析は困難であるが、できるだけ首肯し得る近似によって解析されなければならない。

従来、側壁の影響をどのように考慮するかの方法は、二次元流れの水深を直観的に径深に置き換える法のほか主として流水断面積分割法によっている。この方法は Keulegan¹⁾、Einstein²⁾、Powell³⁾、Haywood²⁾、足立⁴⁾などによって提案されている。Einstein は平均流速式を直接用いており、その他の研究でも主眼を抵抗式および平均流としての取り扱いに置いているため、その誘導過程において Prandtl-Kármán の対数法則を用いて流速分布を算入しているが、終局的には流速分布を問題としていない。Prandtl-Kármán の対数法則では摩擦速度が重要項になるが、これらの研究では、底面、側壁面ごとに一定の値として取り扱われている。摩擦速度は Ghosh⁵⁾ らの実験的研究によれば隅角ではほぼ零（または最小）の分布をしていることがわかる。現在のところ、

断面内各部の流速分布および潤边上の摩擦速度分布の系統的算定式は見当らない。

本論は理論的な厳密解ではなく、また理論の飛躍もないけれども実用的な目的に対しできるだけ近似度の高い解析を試みたものである。流速分布、摩擦速度分布および抵抗式の論理の展開に一貫性を持たしめ、また考慮すべき壁面粗滑状態は全辺均一のものから三辺とも相違するものまで取り扱われている。またこれをもとに摩擦係数などの諸係数が推算された。なお、三辺あるいは側壁面と底面の粗度が異なる水路の流れは、この不均一性が流れにおよぼす影響が考えられるが、この取り扱いによって大きな間違いはないと考えている。二次流および水面の影響は考えていない。さらに、Powell³⁾、岩垣^{6),7)}、本間⁸⁾の研究によれば Froude 数のかなり大きい部分については抵抗則が異なるということであり、このような場合は別途の考慮を要するものと思われる。

2. 理論的取扱い

Keulegan¹⁾ や足立⁴⁾の研究に見られるような流水断面面積分割法は、流水断面積を数個の部分に分割し、その分割内において流れを二次元乱流と見立て、Prandtl-Kármán の対数法則を適用する。この分割したものを総計して抵抗式を求めている。

本報は流水断面積分割法でなく、長方形水路内の流れを水平、鉛直の二方向の二次元流れの組み合わせとして取り扱われている。流速分布に Prandtl-Kármán の対数法則を用い、断面内のどの部分においても二方向を考え、両方向から計算した流速はすべて同一値をもつこと、およびこの計算によって求められた潤边上のせん断力の総計が wIA (w : 水の単位重量, I : 勾配, A : 流積) になることが考慮されている。これによって流速は断面内の場所の関数となり、摩擦速度は底面、および側壁面においてそれぞれ一定でなく、位置の関数とな

* 正会員 工博 日本大学教授 工学部土木工学科

る。

二次元流れにおける Prandtl-Kármán の対数法則は

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{x}{x'}\right) \dots\dots\dots (1)$$

で表わされる。u：任意点流速，u_{*}：摩擦速度，x：潤辺からの距離，x'：u=0における潤辺からの距離，k：Kármán 定数。水理的に滑面であるか，粗面であるかの判定は，良く知られているように壁面上に存在する粘性底層の厚み δ と壁表面の粗度要素の高さ k_x との相対的大きさによって決まる。一般に，δ/k_x > 3~4：滑面，δ/k_x < 1/6~1/10：粗面といわれている。その間が遷移領域である。式(1)の k および x' を Nikuradse の円管流の実験結果から決定すると k=0.4，また滑面のとき x'=0.111ν/u_{*}，粗面のとき x'=k_x/30 となる。本文では壁面粗滑状態は滑面と粗面とを考え，遷移領域は考えない。滑面と粗面の境界は，それぞれの x' が相等しい場合とする。したがって，k_x·u_{*}/ν=3.33 が境界となる。なお，ここでは摩擦速度が同一面内において位置の関数と考えるので，k_x の大きさによって u_{*} の大きい部分で粗面となり，また小さい部分で滑面と考えなければならないような場合も起こり得る。そのように考えると，いたずらに複雑になるから，滑面としての x' の計算に用いる摩擦速度は，その壁面の平均値を壁面全体に一定と考える。すなわち，x'=0.111ν/ū_{*} (ū_{*}：同一壁面内における平均摩擦速度) とする。よって，x' が滑面の x'=0.111ν/ū_{*} と粗面の x'=k_x/30 とで大きい方をもって，その面の値とし，粗滑も決める。

(1) 平行壁間の流れ

左右壁面粗滑状態の異なる平行壁間の流れを考える。Schlichting⁹⁾ が一方滑面，他方粗面の場合に実験的に確かめているよう

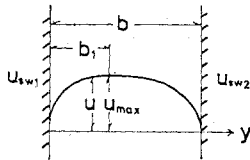


Fig. 1 Flow between two parallel planes

に，平行壁間の流れを二つの領域に分け，互いに分離した流れのように取り扱う。Fig. 1 に示すように 0 ≤ y ≤ b₁ では左壁のみが影響し，b₁ ≤ y ≤ b では右壁のみが影響するものとするれば

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq y \leq b_1 \quad \frac{u}{u_{*w1}} &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y}{y_1'}\right) \\ b_1 \leq y \leq b \quad \frac{u}{u_{*w2}} &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{b-y}{y_2'}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

ここに，y_{1'}，y_{2'} は前の説明の x' に相当するものであり，y_{2'} は右壁から計るものとする。また u_{*w1}，u_{*w2} はそれぞれ左右壁面の摩擦速度である。なお，後述の長方形水路の流れにおいて摩擦速度は壁面および底面上で変数として取り扱われるが，ここでは平行壁間の流れであ

るために同一の記号で表わしているが一方の壁面上で一定である。y=b₁ で式(2)の二式の流速を等しく置くと

$$\frac{u_{*w2}}{u_{*w1}} = \frac{\ln(b_1/y_1')}{\ln\{(b-b_1)/y_2'\}}$$

この流れの分割は Ismail¹⁰⁾ が Schlichting の実験結果⁹⁾ を参照して決めているように壁面の境界せん断力に比例するものと考えると

$$u_{*w2}/u_{*w1} = \sqrt{(b-b_1)/b_1}$$

である。よって

$$\frac{\ln(b_1/y_1')}{\ln\{(b-b_1)/y_2'\}} = \sqrt{\frac{b-b_1}{b_1}} \dots\dots (3)$$

この式を満足する b₁ によって二つの領域に分割される。境界せん断力の両壁面の平均を τ とすると

$$u_{*w1} = \sqrt{\frac{2b_1}{b}} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad u_{*w2} = \sqrt{\frac{2(b-b_1)}{b}} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \dots\dots (4)$$

これより式(2)は

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq y \leq b_1 \quad u &= \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{k} \sqrt{\frac{2b_1}{b}} \ln\left(\frac{y}{y_1'}\right) \\ b_1 \leq y \leq b \quad u &= \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{k} \sqrt{\frac{2(b-b_1)}{b}} \ln\left(\frac{b-y}{y_2'}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

一般的に，滑らかな面と粗い面よりなる平行壁間の流れを考えると，粗い面の方が抵抗が大きいことから境界せん断力が大きいことが想定される。本論によれば粗い面の側に流れの領域が多く分割される。これらのことが式(4)から示される。このとき速度勾配を式(5)から算定すれば粗い壁面の側，すなわち分割領域の大きい方の流れにおいてより大きな値となることがわかり，Schlichting の示した実験結果⁹⁾ にほぼ照合するとみて良いであろう。

(2) 両側壁面および底面粗度の異なる長方形水路の流れ

前節の方法によって，長方形水路を左右2つの領域に区分する。一方の領域内では，その側壁面と底面のみが流れに影響し他方の側壁面は影響しないと考える。

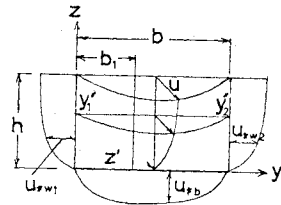


Fig. 2 Flow in rectangular channel with different roughnesses

0 ≤ y ≤ b₁ の範囲

Prandtl-Kármán の対

数法則は水平，鉛直方向について，それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{u_{*w1}} &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y}{y_1'}\right) \\ \frac{u}{u_{*b1}} &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

ここに u_{*b_1} は底面の摩擦速度, また z' は前述の x' に相当する量である (Fig. 2 参照). 水平方向の任意距離を y_c とすると, $y=y_c$ における鉛直線上の流速分布は式 (6) の第 2 式より

$$\frac{u}{[u_{*b_1}]_{y=y_c}} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z'}{y_c}\right) \dots\dots\dots(7)$$

一方, この鉛直線上の任意の z 位置の流速を水平方向から考えると, 式 (6) の第 1 式より

$$\frac{u}{u_{*w_1}} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y_c}{y'}\right) \dots\dots\dots(8)$$

二方向から考えた共通点における流速は相等しいから, 式 (7), (8) より u を消去すると

$$u_{*w_1} = \frac{[u_{*b_1}]_{y=y_c}}{\ln(y_c/y_1')} \cdot \ln\left(\frac{z'}{z}\right) = K_1 \ln\left(\frac{z'}{z}\right) \dots\dots\dots(9)$$

同様に, u_{*b_1} を求めると

$$u_{*b_1} = \frac{[u_{*w_1}]_{z=z_c}}{\ln(z_c/z')} \cdot \ln\left(\frac{y}{y_1'}\right) = K_1 \ln\left(\frac{y}{y_1'}\right) \dots\dots\dots(10)$$

このように摩擦速度は壁面および底面で z と y の関数と考えるので, もしそれらの面が滑面であれば y_1', z' などは z と y の関数となる. しかしこのようにすると問題が複雑になるので, 前に記述した面の粗滑を決めるときと同様に, 滑面では y_1' (後述の y_2' に対しても同様) と z' の計算に用いる摩擦速度はその面の平均値を用いて式 (16) のように表わすことにする. これによって式 (9), (10) の係数 K_1 は一つの流れについて定数となる. この係数 K_1 は式 (10) を式 (9) に (またはその反対に) 代入すると同じ値となるから, 初めから同じ記号 K_1 で表わした. 式 (9), (10) を式 (6) に代入すると, この領域内の流速式は

$$u = \frac{K_1}{k} \ln\left(\frac{y}{y_1'}\right) \ln\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{u_{*w_1}}{k} \ln\left(\frac{y}{y_1'}\right) = \frac{u_{*b_1}}{k} \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \dots\dots\dots(11)$$

となる.

$b_1 \leq y \leq b$ の範囲

同じく, 水平, 鉛直方向に対して Prandtl-Kármán の対数法則は

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{u_{*w_2}} &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{b-y}{y_2'}\right) \\ \frac{u}{u_{*b_2}} &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

u_{*b_2} は, この範囲の底面摩擦速度である. 前と同様な推論によって摩擦速度はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u_{*w_2} &= K_2 \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \\ u_{*b_2} &= K_2 \ln\left(\frac{b-y}{y_2'}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

式 (10) と式 (13) の底面摩擦速度は $y=b_1$ において

等しく置き, 式 (3) を用いて

$$K_2 = K_1 \frac{\ln(b/y_1')}{\ln\{(b-b_1)/y_2'\}} = K_1 \sqrt{\frac{b-b_1}{b_1}} \dots\dots\dots(14)$$

したがって,

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_1}{k} \sqrt{\frac{b-b_1}{b_1}} \cdot \ln\left(\frac{b-y}{y_2'}\right) \cdot \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \\ &= \frac{u_{*w_2}}{k} \ln\left(\frac{b-y}{y_2'}\right) = \frac{u_{*b_2}}{k} \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

なお, 式 (11) と (15) において $y=b_1$ で流速は連続するが, 水平方向速度勾配は不連続となる. Prandtl-Kármán の対数法則はよく知られているように壁の近くの流れに対して導かれた, いわゆる壁法則である. $y=b_1$ で水平方向速度勾配が不連続になるのはこのためである. 流れの内部せん断力は $y=b_1$ で零で両壁面でそれぞれの境界せん断力の大きさとなりその間直線的に変化すると考える. この内部せん断力を考慮し $y=b_1$ における速度勾配零の条件を用いれば不連続性は解消される. しかしこの場合には壁面近くに問題が残ることが予想される. 式の形も単純であり, 本法は実用上の目的から Prandtl-Kármán の対数法則を用いた. 分割線上における水平方向速度勾配の不連続性は近似的な取り扱いとして許されると考える.

ここで y_1', y_2', z' などについては前に説明したが, 再記すれば

$$\left. \begin{aligned} \text{粗面: } y_1' &= k_{w_1}/30, y_2' = k_{w_2}/30, z' = k_b/30 \\ \text{滑面: } y_1' &= 0.111 \nu/\bar{u}_{*w_1}, y_2' = 0.111 \nu/\bar{u}_{*w_2}, \\ & z' = 0.111 \nu/\bar{u}_{*b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

である. 各面の平均摩擦速度は, 式 (9), (10), (13) より

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{*w_1} &= \frac{1}{h} \int_0^h u_{*w_1} dz = K_1 \left\{ \ln\left(\frac{h}{z'}\right) - 1 \right\} \\ \bar{u}_{*w_2} &= \frac{1}{h} \int_0^h u_{*w_2} dz = K_1 \sqrt{\frac{b-b_1}{b_1}} \left\{ \ln\left(\frac{h}{z'}\right) - 1 \right\} \\ \bar{u}_{*b} &= \frac{1}{b} \{ b_1 \bar{u}_{*b_1} + (b-b_1) \bar{u}_{*b_2} \} \\ &= \frac{1}{b} \left(\int_0^{b_1} u_{*b_1} dy + \int_{b_1}^b u_{*b_2} dy \right) \\ &= \frac{K_1}{b} \left[b_1 \left\{ \ln\left(\frac{b_1}{y_1'}\right) - 1 \right\} \right. \\ & \quad \left. + (b-b_1) \sqrt{\frac{b-b_1}{b_1}} \left\{ \ln\left(\frac{b-b_1}{y_2'}\right) - 1 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここに, h : 水深, b : 水路幅である. また, 境界壁面におけるせん断力は $\tau = \rho u_*^2$ であるから, 各面の平均せん断力はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{w_1} &= \frac{1}{h} \int_0^h \rho u_{*w_1}^2 dz = \rho K_1^2 \left[\left\{ \ln\left(\frac{h}{z'}\right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \\ \bar{\tau}_{w_2} &= \frac{1}{h} \int_0^h \rho u_{*w_2}^2 dz \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &= \rho K_1^2 \left(\frac{b-b_1}{b_1} \right) \left[\left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \\ \bar{\tau}_b &= \frac{1}{b} \left[\int_0^{b_1} \rho u_* b_1^2 dy + \int_{b_1}^b \rho u_* b^2 dy \right] \\ &= \rho K_1^2 \left\{ \frac{b_1}{b} \left[\left\{ \ln \left(\frac{b_1}{y_1'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(b-b_1)^2}{bb_1} \left[\left\{ \ln \left(\frac{b-b_1}{y_2'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

係数 K_1 は式 (9), (10), (14), (13) の関連はあるが, これを決めるには一つの条件を与えなければならない. 本論ではこの決定条件として, 各境界壁面のせん断力の総計が流れ全体として取り扱った wAI になることにした. なお, K_1 は速度の次元を有するので, $K_1 = K_{1*} U_{*R}$ ($U_{*R} = \sqrt{gRI}$) とし, 無次元係数 K_{1*} で表わす.

$$K_{1*} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2h}{b}}{\frac{h}{b_1} \left[\left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] + \frac{b_1}{b} \left[\left\{ \ln \left(\frac{b_1}{y_1'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] + \frac{(b-b_1)^2}{bb_1} \left[\left\{ \ln \left(\frac{b-b_1}{y_2'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right]}} \dots\dots\dots(19)$$

(3) 両側壁面粗度の等しい長方形水路の流れ

本節で扱う流れは左右対称になり, 前節の $b_1 = b/2$, $y_1' = y_2'$ などとなる. よって前節で表わした諸量は

$$u_{*w} = K \ln \left(\frac{z}{z'} \right), \quad u_{*b} = K \ln \left(\frac{y}{y'} \right) \dots\dots\dots(20)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{K}{k} \ln \left(\frac{y}{y'} \right) \cdot \ln \left(\frac{z}{z'} \right) = \frac{u_{*w}}{k} \ln \left(\frac{y}{y'} \right) \\ &= \frac{u_{*b}}{k} \ln \left(\frac{z}{z'} \right) \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{粗面: } &y' = k_w/30, \quad z' = k_b/30, \\ \text{滑面: } &y' = 0.111 \nu/\bar{u}_w, \quad z' = 0.111 \nu/\bar{u}_{*b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{*w} &= K \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\}, \\ \bar{u}_{*b} &= K \left\{ \ln \left(\frac{b}{2y'} \right) - 1 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_w &= \rho K^2 \left[\left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \\ \bar{\tau}_b &= \rho K^2 \left[\left\{ \ln \left(\frac{b}{2y'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

$K = K_* U_{*R}$ とすると

$$K_* = \sqrt{\frac{1 + \frac{2h}{b}}{\frac{2h}{b} \left[\left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] + \left[\left\{ \ln \left(\frac{b}{2y'} \right) - 1 \right\}^2 + 1 \right]}} \dots\dots\dots(25)$$

K_* の計算は全辺が粗面でそれぞれの相当粗度が与えら

れている場合は容易に計算される. しかし, 滑面の部分があると式 (22), (23), (25) を連立に逐次近似などによって解かなければならない. このような取り扱い前は節の両側壁面および底面の粗度がそれぞれ異なる水路の流

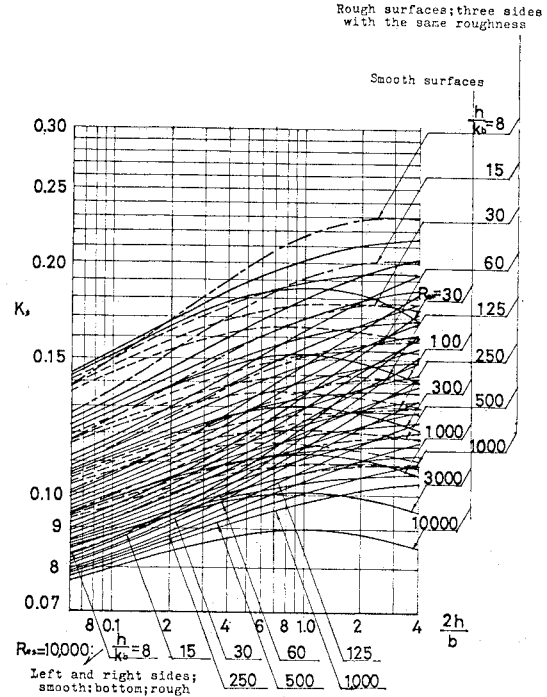


Fig. 3 Non-dimensional coefficient K_* .

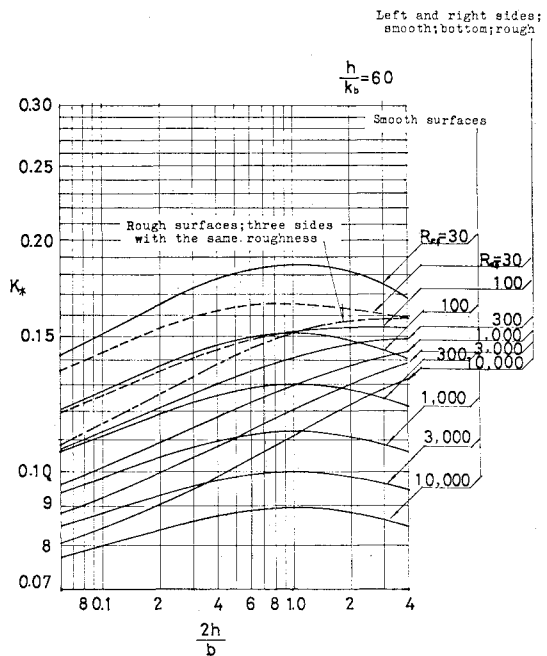


Fig. 4 Non-dimensional coefficient K_* .

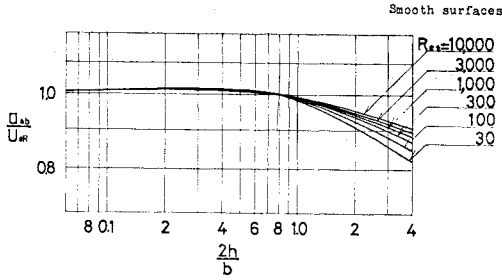


Fig. 5 Mean friction velocity at the bottom.

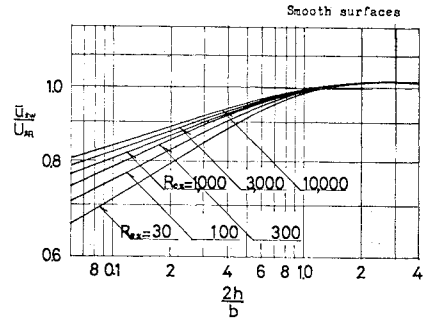


Fig. 7 Mean friction velocity at the sides.

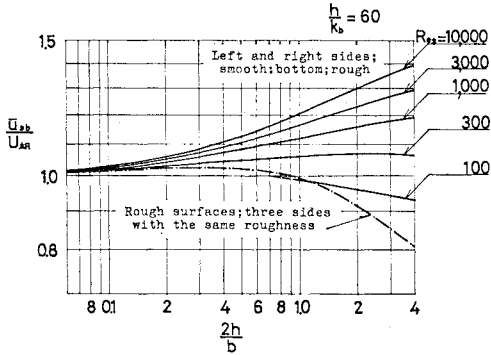


Fig. 6 Mean friction velocity at the bottom.

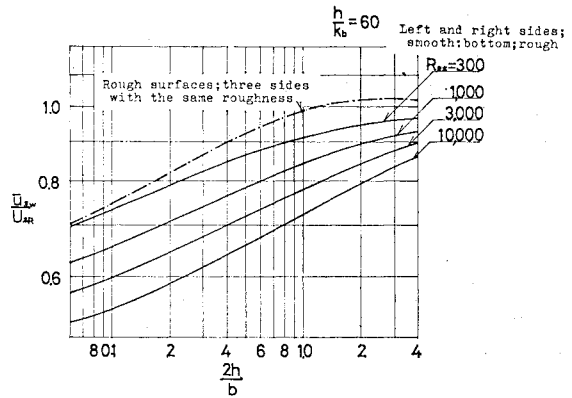


Fig. 8 Mean friction velocity at the sides.

れにおいても同様である。通常現われる流れは本節で取り扱っているものが多いので二、三の計算結果を図化した。全辺滑面、全辺等粗面、および壁滑面・底粗面の場合に、 $R_{*s} = U_{*R}R/\nu$, h/k_b (粗面の部分に対し) をパラメーターとし、 $2h/b$ に対する K_* の値を計算し図化したのが Fig. 3 である。同じものを $h/k_b = 60$ のときに図化したのが Fig. 4 である。全辺滑面の場合に、 R_{*s} をパラメーターとして $2h/b$ に対する \bar{u}_{*b}/U_{*R} を計算し図化したのが Fig. 5 であり、また全辺等粗面および壁滑面・底粗面の場合に同じものを図化したのが Fig. 6 である。同様にして $2h/b$ に対する \bar{u}_{*w}/U_{*R} を図化したのが Fig. 7, 8 である。

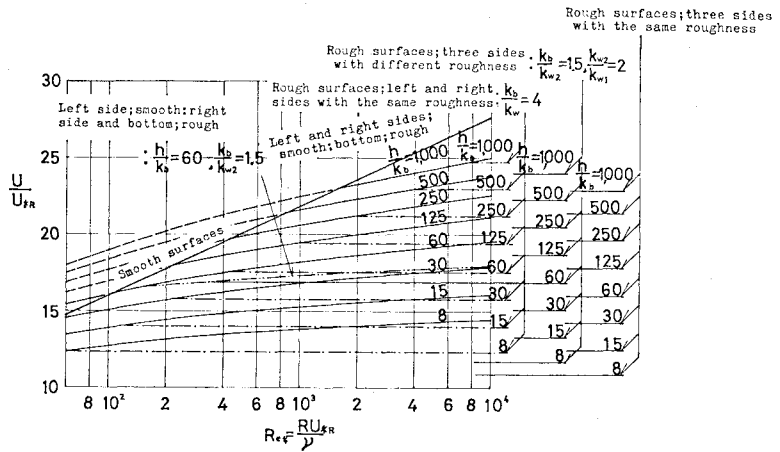


Fig. 9 Relation between $\frac{\bar{U}}{U_{*R}} - R_{*s} \cdot \frac{2h}{b} = 1.0$

3. 平均流速

境界三辺粗度が異なる水路を流れる流量 Q は

$$Q = \int_0^h \int_0^{b_1} u dz dy + \int_0^h \int_{b_1}^b u dz dy \dots \dots \dots (26)$$

であるから、式 (11), (15) より

$$Q = \frac{K_1 b h}{k} \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} \left[\frac{b_1}{b} \left\{ \ln \left(\frac{b_1}{y_1'} \right) - 1 \right\} + \frac{b-b_1}{b} \sqrt{\frac{b-b_1}{b_1}} \left\{ \ln \left(\frac{b-b_1}{y_2'} \right) - 1 \right\} \right]$$

よって平均流速 U は、式 (17) を参照して

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_{*R}} &= \frac{1}{k} \left(\frac{\bar{u}_{*b}}{U_{*R}} \right) \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{\bar{u}_{*w1}}{U_{*R}} \right) \left[\frac{b_1}{b} \left\{ \ln \left(\frac{b_1}{y_1'} \right) - 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b-b_1}{b} \sqrt{\frac{b-b_1}{b_1}} \left\{ \ln \left(\frac{b-b_1}{y_2'} \right) - 1 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

となる。両側壁面粗度の等しい水路の場合は

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_{*R}} &= \frac{1}{k} \left(\frac{\bar{u}_{*b}}{U_{*R}} \right) \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{\bar{u}_{*w}}{U_{*R}} \right) \left\{ \ln \left(\frac{b}{2y'} \right) - 1 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 \bar{u}_{*b} 、 \bar{u}_{*w} などは式 (23) による。

Fig. 9 は $2h/b=1.0$ のときに、全辺異粗面、左壁滑面・右壁および底粗面、全辺等粗面、両壁滑面・底粗面、両壁等粗面・底粗面および全辺滑面などについて、 U/U_{*R} と R_{e*} の関係をこれらの諸式を用いて計算図化したものである。この図において $h/k_b=60$ のとき、 R_{e*} の大きい値から次第に小さくしてみると、 $k_b/k_{w2}=1.5$ 、 $k_{w2}/k_{w1}=2$ の全辺異粗面が $R_{e*} \approx 360$ 付近で初めて左壁が滑面になり、また $R_{e*} \approx 160$ 付近で両壁が滑面になり、さらに $R_{e*} \approx 100$ 付近で全辺滑面に移る過程をよく説明している。

Keulegan¹⁾ が取り扱った境界壁面状態は全辺が均一の場合である。本報による全辺滑面および全辺等粗面がこれにあたる。このとき \bar{u}_{*b}/U_{*R} の値は Fig. 5, 6 に図示されているように、 $2h/b$ が 1.0 より小さい範囲を考えるとほぼ 1.0 に近い値を取ることがわかる。このときこの値の最大は、 $2h/b$ がほぼ 0.3 付近に現われ、 h/k_b が小さいほど大きく、 h/k_b が 8.0 ではほぼ 1.03 である。同じく、 \bar{u}_{*w}/U_{*R} の値は Fig. 7, 8 に図示されているように、 $2h/b$ が 1.0 より大きい範囲を考えると 1.0 に近い値を取っている。この場合この値の最大値は $2h/b$ が 3.0 付近にあり、 h/k_b が 8.0 ではほぼ 1.03 である。よって全辺滑面および全辺等粗面の水路における平均流速式 (28) の近似式は下記のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2h}{b} \leq 1.0 \text{ のとき} \\ \frac{U}{U_{*R}} &= \frac{1}{k} \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} \\ \frac{2h}{b} \geq 1.0 \text{ のとき} \\ \frac{U}{U_{*R}} &= \frac{1}{k} \left\{ \ln \left(\frac{b}{2y'} \right) - 1 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

ここに、滑面のとき y' 、 z' は $0.111\nu/U_{*R}$ とする。

4. 摩擦係数および Manning の粗度係数

Darcy-Weisbach の摩擦係数を λ とすると $U/U_{*R} = \sqrt{8/\lambda}$ である。一方、式 (27) および (17) より

$$\frac{U}{U_{*R}} = \frac{1}{k} \left(\frac{\bar{u}_{*b}}{U_{*R}} \right) \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} = \frac{1}{kK_{1*}} \left(\frac{\bar{u}_{*b}}{U_{*R}} \right) \left(\frac{\bar{u}_{*w1}}{U_{*R}} \right)$$

したがって

$$\lambda = 8 \left\{ \frac{kK_{1*}}{(\bar{u}_{*b}/U_{*R})(\bar{u}_{*w1}/U_{*R})} \right\}^2 \dots\dots\dots(30)$$

なお、両側壁等粗度の場合は $K_{1*}=K_*$ 、 $\bar{u}_{*w1}=\bar{u}_{*w}$ となる。Fig. 10 は Fig. 9 のときと同じ各種条件について、 λ と $R_e=UR/\nu$ の関係を図示したものである。

Fig. 9 の説明に述べたように、この図から、 $k_b/k_{w2}=1.5$ 、 $k_{w2}/k_{w1}=2$ かつ $h/k_b=60$ の全辺異粗面について大きい Reynolds 数から次第に小さい Reynolds 数にとってみると、 $R_e \approx 6100$ 付近で左壁が滑面になり、 $R_e \approx 2650$ 付近で両壁が滑面になり、 $R_e \approx 1600$ 付近で全辺が滑面になる過程がわかる。

本報の平均流速式と Manning の平均流速式とから、各辺の粗度を考慮した Manning の粗度係数 n は

$$\begin{aligned} n &= \frac{R^{1/6}}{\frac{\sqrt{g}}{k} \left(\frac{\bar{u}_{*b}}{U_{*R}} \right) \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\}} \\ &= \frac{R^{1/6}}{\frac{\sqrt{g}}{kK_{1*}} \left(\frac{\bar{u}_{*b}}{U_{*R}} \right) \left(\frac{\bar{u}_{*w1}}{U_{*R}} \right)} \end{aligned} \dots\dots\dots(31)$$

ここで両壁面等粗度のときは $K_{1*}=K_*$ 、 $\bar{u}_{*w1}=\bar{u}_{*w}$ である。

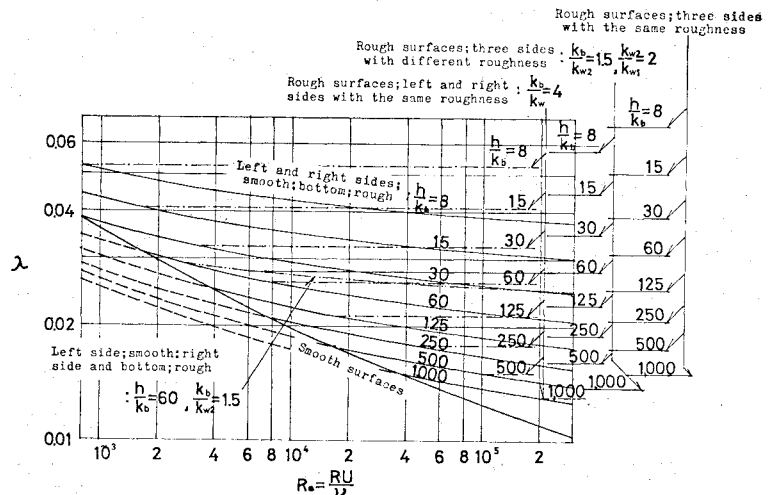


Fig. 10 Friction factor : $\frac{2h}{b} = 1.0$.

$$\beta = \frac{U_{*w1}^2 U_{*b}^2}{\bar{u}_{*w1}^2 \bar{u}_{*b}^2} = \left\{ 1 + K_{1*}^2 \left(\frac{U_{*R}}{\bar{u}_{*w1}} \right)^2 \right\} \left[\frac{b_1}{b} \left\{ \left(\frac{\bar{u}_{*b1}}{\bar{u}_{*b}} \right)^2 + K_{1*}^2 \left(\frac{U_{*R}}{\bar{u}_{*b}} \right)^2 \right\} + \frac{b-b_1}{b} \left\{ \left(\frac{\bar{u}_{*b2}}{\bar{u}_{*b}} \right)^2 + \frac{b-b_1}{b_1} K_{1*}^2 \left(\frac{U_{*R}}{\bar{u}_{*b}} \right)^2 \right\} \right] \dots\dots\dots(37)$$

両側壁面等粗度のときは

$$\beta = \frac{\left[\ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right]^2 + 1}{\left[\ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right]^2} \frac{\left[\ln \left(\frac{b}{2y'} \right) - 1 \right]^2 + 1}{\left[\ln \left(\frac{b}{2y'} \right) - 1 \right]^2} \dots\dots\dots(38)$$

式 (23), (24) より

$$\beta = \frac{U_{*w}^2 U_{*b}^2}{\bar{u}_{*w}^2 \bar{u}_{*b}^2} = \left\{ 1 + K_{*}^2 \left(\frac{U_{*R}}{\bar{u}_{*w}} \right)^2 \right\} \times \left\{ 1 + K_{*}^2 \left(\frac{U_{*R}}{\bar{u}_{*b}} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots(39)$$

ここで $b \gg h$ のときは $K_{*} U_{*R} / \bar{u}_{*b}$ は小さくなり二次元の式¹¹⁾になる。エネルギー係数の Fig. 11, 12 と同様な条件で計算図化したのがそれぞれ Fig. 13, 14 である。

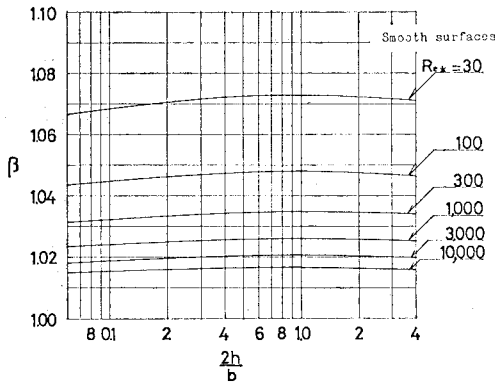


Fig. 13 Momentum coefficient.

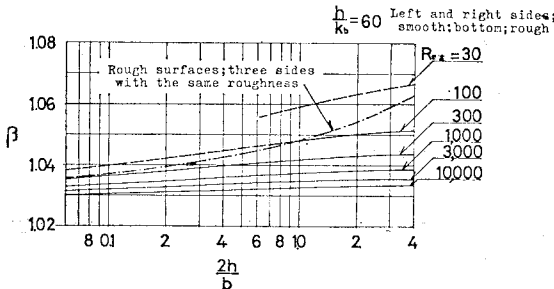


Fig. 14 Momentum coefficient.

7. 実験結果との比較

本報に提案された流速分布式、摩擦速度分布式および

流れの抵抗式が実際の流れにどの程度の適合性があるかを検討するため、いくつかの実験結果を用いた。

流速分布および摩擦速度分布については Bazin の実験データ¹²⁾を用いた。Bazin のデータは Keulegan¹⁾, Powell³⁾ などの研究にも一部使われ、Chow の著書¹¹⁾などにも引用されている。主実験水路は幅 1.99 m, 全長 600 m の木製である。基部は粘土をつき固めた上に底板を敷き、また側壁は地盤と木板の間をセメントモルタルで固定したもので、地表面の中に堀割られた状態で造られている。勾配、粗度、断面形状の違った実験を行うために、この主水路の中に適宜必要部分を設置している。長方形断面水路の実験に用いられた壁面は、平滑木板、棧付木板、セメント仕上げ、レンガ積、砂利張付けの 5 種である。さらに自由水面の影響を調べる目的で、この主水路の中に 2 種の長方形木管を設置し、実験している。流量の調節は取入口の 4 門の水門により行われ、水路直前に 12 個の辺長 0.2 m の銅製正方形オリフィスにより流量が計量される。このオリフィスには門扉が付いており、必要数の開閉をする。流速測定は、今日広く使われている Darcy の開発したピトー管により行われた。実験にあたってオリフィス、ピトー管ともこの水路を使って慎重、正確な検定を行っている。

流れに対して抵抗式の適合性を調べるために用いた実験データは、この Bazin の実験データのほかに、滑面水路に関し Powell の実験³⁾と松尾の実験¹³⁾のものである。さらにこれらのデータによって本報の式と従来からの諸式との比較を行った。Powell の実験に用いられた水路は幅 8 in, 高さ 7 in, 長さ 50 ft で壁面は合成樹脂板、底面は構造用鋼にアルミニウムペンキ塗りである。松尾の水路は幅 0.8 m, 長さ 21.25 m の鋼製水路の中に設置された木製水路で、幅 0.7, 0.35, 0.2 m の 3 種である。この内面はていねいなかん仕上げのうえ、ペンキを 2 回塗ってできるだけ滑らかにしている。

(1) 流速分布および摩擦速度分布

Bazin の実験は側壁面、底面とが等粗度である。したがって本報の対応する式は式 (20), (21) となる。なお、各実験における Nikuradse の相当粗度は未知であるから、まず各実験系列ごとに実験値より粗度を逆算し、これを平均してその水路における相当粗度とした。底面および側壁面の摩擦速度はそれぞれ鉛直および水平流速の実測値から、各測線中の各点ごとに計算しその平均値をその測線上の境界面における摩擦速度の実測値とした。この値を用いて、その測線上の各点流速の実測値との比 (u/u_{*b} および u/u_{*w}) を測定値として取り扱った。Fig. 15~19 は各水平、鉛直測線上における流速分布の測定値と式 (21) (図中実線で表わす) との関係

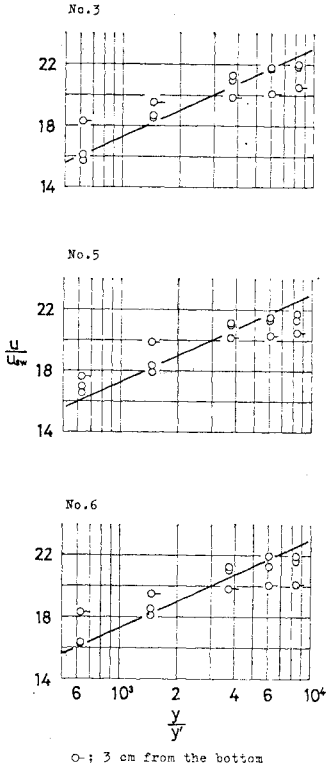


Fig. 15 Velocity distribution for horizontal traverses; Bazin's data, series 51 (rectangular wood pipe).

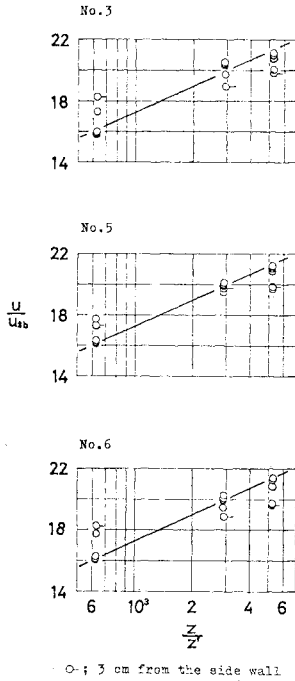


Fig. 16 Velocity distribution for vertical traverses; Bazin's data, series 51 (rectangular wood pipe).

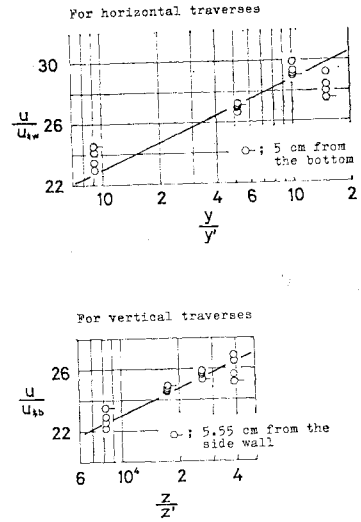


Fig. 17 Velocity distribution; Bazin's data, series 55 (cement).

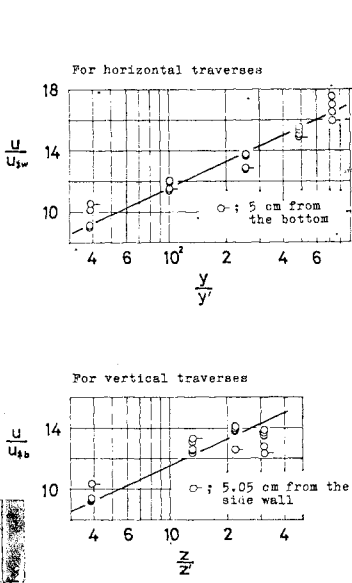


Fig. 18 Velocity distribution; Bazin's data, series 57 (coarse gravel).

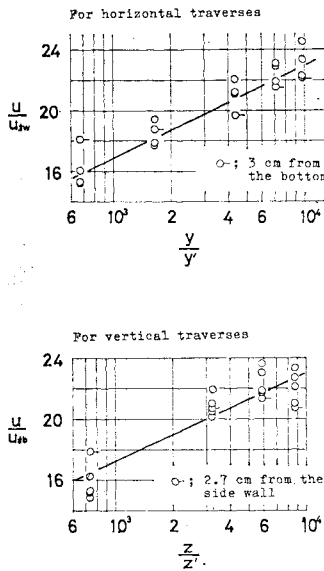


Fig. 19 Velocity distribution; Bazin's data, series 67 - No. 2 (planks).

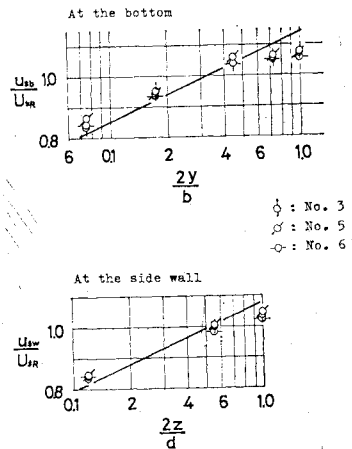


Fig. 20 Distribution of friction velocity, Bazin's data, series 51 (rectangular wood pipe).

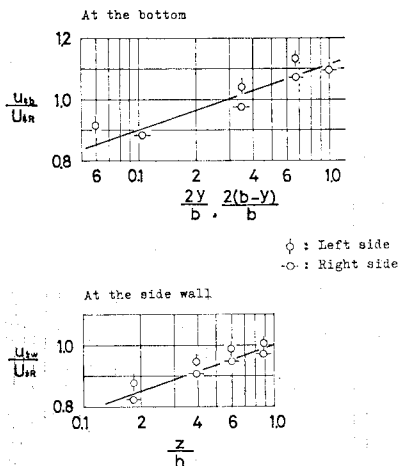


Fig. 21 Distribution of friction velocity, Bazin's data, series 55 (cement).

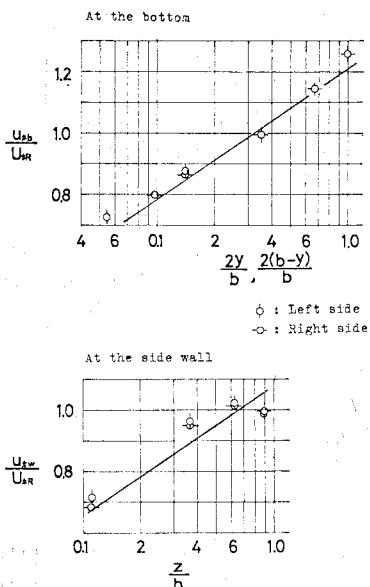


Fig. 22 Distribution of friction velocity, Bazin's data, series 57 (coarse gravel).

を示した図である。また Fig. 20~23 は底面および側壁面上の摩擦速度と式 (20) (図中実線で表わす) との関係を示した図である。Series 51 の長方形木製管路に対しては流速分布および摩擦速度分布とも管路断面の左下4分の1部分についての実験結果のみの解析を行った。また開水路に対しては、流速分布は左側半分のみ、摩擦速度分布は全辺について実験結果の解析を行った。なお、Bazin の実験はかなり多くなされているが、ここに示したものはその一部である。Series 51 は幅 0.8 m, 高さ 0.5 m の木管, Series 55 は幅 1.831 m でセメント仕上面, Series 57 は幅 1.859 m で径 3~4 cm の砂

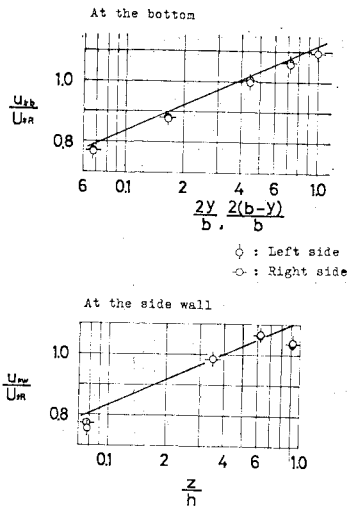


Fig. 23 Distribution of friction velocity, Bazin's data, series 67-No. 2 (planks).

利張付面, Series 67-No. 2 は幅 0.794 m の平滑木板面の水路である。流速分布は底面および側壁面に近い水平および鉛直測線上の実測値が理論値より離れ、一様になる傾向をもっている。また水面付近ではその影響を受け、実測値は理論値より小さくなる傾向が見られる。全体として散らばりはあるが理論が流速をほぼ表わしているとみて良いであろう。摩擦速度分布は管路の水平、鉛直の中心線付近および開水路の水面付近で理論値は実測値より大きい、全体としてほぼ適合しているとみて良いであろう。なお、Keulegan¹⁾ は先きに Bazin のデータを用いて、本報とほぼ同様な方法により、流速の実測値から摩擦速度を算出している。しかし相当粗度の推定に彼の抵抗式を用いているため、本報の値より小さな値となっている。

(2) 平均流速

前述のように、滑面水路では Powell のデータと松尾のデータを、また粗面水路では Bazin のデータを用いて、実験値と本報による式および従来よりの下記式による計算値とを比較した。

Keulegan 式は

$$\frac{U}{U_{*R}} = \frac{1}{k} \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} - \frac{1}{k} \frac{h}{b} \dots\dots\dots(40)$$

足立式は、 $a \geq 2h/b$ のとき

$$\frac{U}{U_{*R}} = \frac{1}{k} \left(\frac{U_{*b}}{U_{*R}} \right) \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} - \frac{1}{k} \left(\frac{U_{*b}}{U_{*R}} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 + 2h/b} \right)$$

$a \leq 2h/b$ のとき上式最終項は

$$-\frac{1}{k} \left(\frac{U_{*b}}{U_{*R}} \right) \left\{ \frac{1}{a} - \frac{2h/b}{a^2 + 2h/b} - \ln \frac{a(a+1)}{a^2 + 2h/b} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

ここに $a = U_{*b}/U_{*w}$, $U_{*b}/U_{*R} = a \sqrt{(1+2h/b)/(a^2+2h/b)}$, また滑面のとき $z' = 0.111 \nu/U_{*b}$, $y' = 0.111 \nu/U_{*w}$.

Gončarov-Komora の式*は

$$\frac{U}{U_{*R}} = \frac{1}{k} \left(\frac{U_{*b}}{U_{*R}} \right) \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} \dots\dots\dots (42)$$

ここに U_{*b}/U_{*R} は足立式と同じ, 一方 a は足立式と相違し

$$a = U_{*b}/U_{*w} = \{ \ln(b/2y') - 1 \} / \{ \ln(h/z') - 1 \}$$

また z' , y' などは足立式と同じである.

二次元の拡張式 (水深を径深に置き換えた式) は

$$\frac{U}{U_{*R}} = \frac{1}{k} \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} + \frac{1}{k} \ln \left(\frac{R}{h} \right) \dots\dots\dots (43)$$

側壁をまったく無視し, 与えられた水深の二次元流とした式は

$$\frac{U}{U_{*R}} = \frac{1}{k} \left(\frac{U_{*h}}{U_{*R}} \right) \left\{ \ln \left(\frac{h}{z'} \right) - 1 \right\} \dots\dots\dots (44)$$

$U_{*h} = \sqrt{ghI}$, 滑面では $z' = 0.111 \nu/U_{*h}$.

a) 滑面水路

Fig. 24 は Powell の滑面水路の tranquil flow に対する実験データと式 (28), (29) および上記諸式による計算値との比較をした図である. この図を見ると本報に

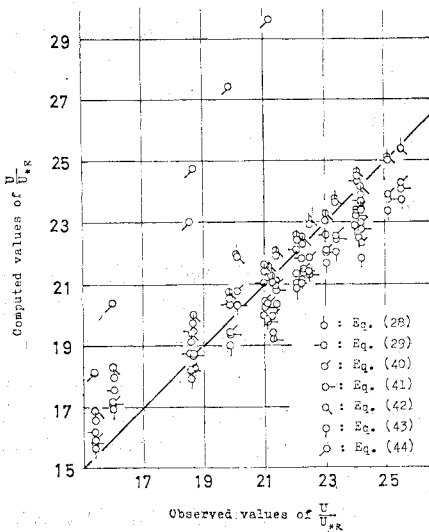


Fig. 24 Relations between Powell's data (a) and various formulas.

* Komora¹⁹⁾ は底面, 壁面の平均せん断力を Gončarov の抵抗式に 潤辺せん断力総計の条件を用いて 計算する方法を提案している. また Gončarov の式は粗度を特定粗度要素に結び付けた特長ある式である. ここでは 著者の解釈によって式を変形し, さらに滑面にも適用されるものとしてこれを Gončarov-Komora の式とした.

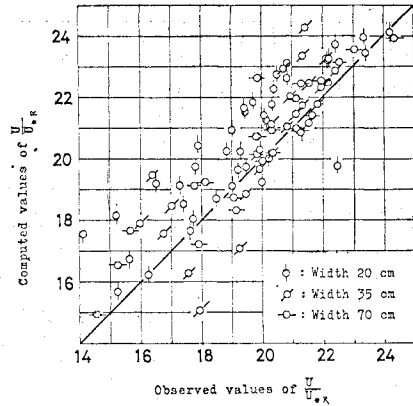


Fig. 25 Relation between Matsuo's data and Eq. (28).

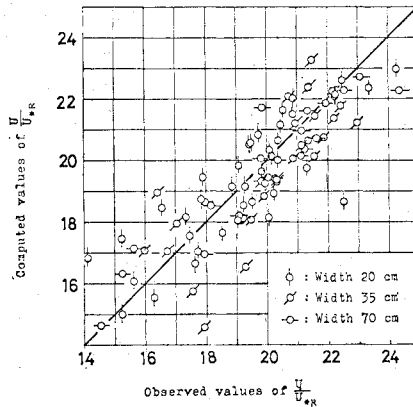


Fig. 26 Relation between Matsuo's data and Eq. (40).

よる式の計算値は U/U_{*R} の小さい部分を除けば, 他の諸式による計算値より実験データに良く適合していることがわかる. Fig. 25 は松尾のデータを用いた式 (28) による計算値と実測値の比較である. また Fig. 26 は同じ松尾のデータを用いた Keulegan の式による計算値と実測値の比較である. これらの計算値は何れも滑面水路として式を適用し算出している. Fig. 25 と Fig. 26 とを比較するとデータの散らばりはあるが Keulegan の式の方が式 (28) よりよく適合しているように見える. ここで Powell の実験水路と松尾の実験水路との粗滑状態を Manning の平均流速式によって比較してみる. もともと Manning の平均流速式は粗面に対するものと考えられるから, 滑面のような場合には流れの状態 (水路幅, 勾配, 水深, 水温) に関係すると思われるので, できるだけ同じ状態のものを選び比較すると Table 1 のようになる. この表より Powell の実験水路は松尾の水路に比べより滑らかであることがわかる. そこでもし松尾の水路が Powell の水路程度の滑らかさであったと

Table 1 Powell, 松尾, 実験水路の比較

| 流れの状態 | | Powellの実験 No. 46-1~9 | 松尾の実験 No. 17~No. 26 |
|--------------------------|----------------|-------------------------|------------------------|
| I | 水路幅 (cm) | 20.32 | 20 |
| | 勾配 | 0.00035~0.00055 | 0.00033~0.00053 |
| | 水深 (cm) | 2.3~14.4 | 2.5~12.5 |
| | 水温 | 21.9°C~22.2°C | 22.0°C~25.3°C |
| | n (平均, m-unit) | 0.00978 | 0.01013 |
| $R^{1/6}/n$ (平均, m-unit) | | 60.0 | 57.9 |
| 流れの状態 | | Powellの実験 No. 24-1~6 | 松尾の実験 No. 32~No. 37 |
| II | 水路幅 (cm) | 20.32 | 20 |
| | 勾配 | 0.0017~0.0020 | 0.00199~0.00205 |
| | 水深 (cm) | 3.3~12.3 | 2.5~12.5 |
| | 水温 | 24.7°C~27.1°C | 21.8°C~25.2°C |
| | n (平均, m-unit) | 0.00867 | 0.00922 |
| $R^{1/6}/n$ (平均, m-unit) | | 67.9 | 63.9 |

き, U/U_{*R} の値がどの程度増加するかを推定してみる. U/U_{*R} の増加量は平均的にみて比較 I で 0.7 ($R^{1/6}/n$ の値より算定), 比較 II で 1.3 となる. このように考えると松尾の実験水路が Powell の水路程度まで滑らかであるなら実測値が大きくなり, 式 (28) の方が Keulegan の式より適合性が良くなるものと思われる.

b) 粗面水路

Fig. 27 は Bazin の Series 4 (径 1~2 cm の砂利をセメントで張付けた水路) の実測値と諸式の関係を示したものである. 同じように Fig. 28 は Bazin の Series 5 (径 3~4 cm の砂利をセメントで張付けた水路) の実測値と諸式の関係を示したものである. 各式による計算値の算出にあって Nikuradse の相当粗度は未知量であるため, それぞれの式に実測値を当てはめ相当粗度を逆算し, その平均を算出しその式に用いる粗度とした. その結果をまとめると Table 2 のようになる. 実験データに対する諸式の適合性は Fig. 27 ではほぼ同じ程度であるが, Fig. 28 においては式 (28), (29) およ

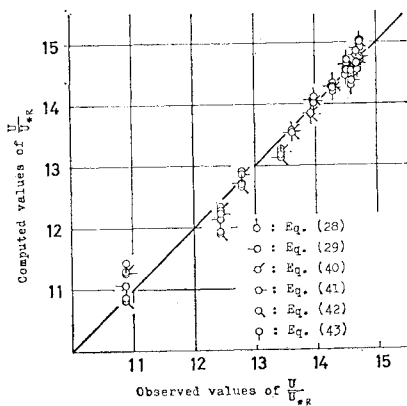


Fig. 27 Relations between Bazin's data, series 4 (fine gravel) and various formulas.

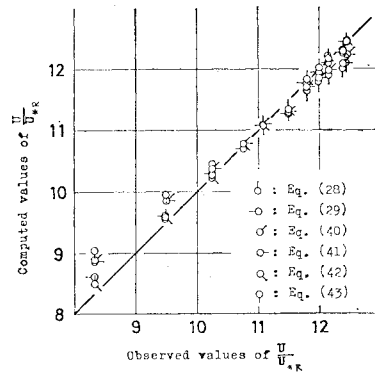


Fig. 28 Relations between Bazin's data, series 5 (coarse gravel) and various formulas.

Table 2 諸式による Nikuradse 相当粗度 (cm)

| Series | 式 (28) | 式 (29) | Keulegan | 足立 | Gončarov-Komora | 二次元拡張 |
|--------|--------|--------|----------|-------|-----------------|-------|
| 4 | 1.26 | 1.10 | 0.956 | 0.970 | 1.34 | 0.864 |
| 5 | 3.82 | 3.41 | 2.92 | 2.97 | 4.13 | 2.63 |

Series 4; 径 1~2 cm 砂利粗面, Series 5; 径 3~4 cm 砂利粗面

び Gončarov-Komora の式が良好な結果を与えることがわかる. また Table 2 に示されているように, 本報による式が Nikuradse の砂粒粗度に相当する粗度の評価も適当であるように思われる. Bazin の Series 2, 3, 6~20 および 28, 29 は水路表面がセメント仕上げ, レンガ積, 平滑木板, 棧付木板 (溝型および棧型) などの実験であるが, これらのデータと式 (28) との適合性を Series 4, 5 にならって調べたところ, Series 4, 5 とほぼ同様な適合度であった.

8. 結 論

長方形水路の流れを水平, 鉛直二方向の二次元流れの組み合わせとして Prandtl-Kármán の対数則を用いて, 流速分布, 摩擦速度分布および抵抗則に関し一貫性ある取り扱いをした. Bazin, Powell, 松尾 などの実験データを用いて提案式の適合性を調べ, また抵抗則に関しては従来よりの諸式と比較した. その結論を列挙すると下記のようなになる.

(1) 水路両側壁および底面の三辺の粗滑状態がすべて異なる場合も考慮した流速分布式および摩擦速度分布式を導き, これによって抵抗式, 摩擦係数, Manning の粗度係数, エネルギー係数および運動量係数の算定式を求めた.

(2) 流れの抵抗関係および摩擦係数は Reynolds 数の変化に応じて, 粗面から滑面への移行 (あるいはその反対) などが説明される.

(3) 全辺滑面, 全辺等粗面のように壁面粗滑状態の均一な場合に適用される抵抗式の近似式を示した.

(4) Bazin のデータを用いて水平, 鉛直測線上の流速分布を提案式式 (21) と比較すると, 底面および側壁面に近い測線, および水面近くでやや離れるが全体としてほぼ適合するとみて良い.

(5) 摩擦速度分布式式 (20) は側壁の水面付近でやや大きな値を与えるが Bazin のデータに良い一致をみた.

(6) 滑面水路で Powell, 松尾, また粗面水路で Bazin のデータを用い抵抗式式 (28) と従来からの諸式と比較すると式 (28) は滑面および粗面とも適合性は良好である. 式 (28) に対する近似式式 (29) もかなり良好な結果を与える.

なお, 二次流, 水面の影響および壁面粗滑状態の遷移領域は考慮されていない. これらの点はさらに検討を要する.

本研究を行うにあたり, 終始懇切なご指導をいただいた日本大学理工学部 栗津清蔵教授, 資料の収集にご尽力いただき激励いただいたフランス国立水理学研究所 M. Ramette 河川水理研究室長 および計算に力いただいた日本大学大学院生 長 林久夫君 などの方々に深く感謝の意を表明いたします.

参 考 文 献

1) Keulegan, G.H. : Laws of turbulent flow in open channels, Research Paper RP 1151, National Bureau of Standards, U.S.A., Vol. 21, December, 1938.

- 2) Einstein, H.A. : Formulas for the transportation of bed load, Trans. A.S.C.E., Vol. 107, 1942.
- 3) Powell, R.W. : Flow in a channel of definite roughness, Trans. A.S.C.E., Vol. 111, 1946.
- 4) 足立昭平 : 長方形断面水路の側壁効果に関する研究, 土木学会論文集第 81 号, 1962.
- 5) Ghosh, S.N. and N. Roy : Boundary shear distribution in open channel flow, Proc. A.S.C.E., April 1970.
- 6) Iwagaki, Y. : On the laws of resistance to turbulent flow in open smooth channels, Proc. of the 2nd Japan National Congress for App. Mech., 1952.
- 7) Iwagaki, Y. : On the laws of resistance to turbulent flow in open rough channels, Proc. of the 4th Japan National Congress for App. Mech., 1954.
- 8) Hom-ma, M. : Fluid resistance in water flow of high Froud number, Proc. of the 2nd Japan National Congress for App. Mech., 1952.
- 9) Schlichting, H. : Experimental investigation of the roughness problem, Proc. A.S.C.E., Nov. 1937.
- 10) Ismail, H.M. : Turbulent transfer mechanism and suspended sediment in closed channels, Trans. A.S.C.E., Vol. 117, 1952.
- 11) Chow, V.T. : Open-Channel Hydraulics, McGraw-Hill, 1959.
- 12) Bazin, H. : Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts, Mémoires présentés par divers savants a l'Académie des Sciences, Paris, Tome 19, 1865.
- 13) 松尾春雄 : 小型水路に於ける流速公式の実験的研究, 土木試験所報告, No. 48, 1938.
- 14) Komora, J. : Hydraulic resistance to flow in channels. Proc. 15th Congress I.A.H.R., Vol. 1, Istanbul, 1973.

(1975. 4. 19・受付)