

塑性状態にある砂の構成式

CONSTITUTIVE EQUATION OF COHESIONLESS SAND
IN PLASTIC STATE

村山 朔 郎*

By Sakuro MURAYAMA

1. 緒 言

(1) 概 要

砂は同じであっても外力の種類や大きさが変われば、砂の応答は種々に変化するので、外力によって異なった構成特性 (constitutive characteristics) があらわれる。偏差応力を砂に加える場合、その大きさが小さい間は砂は弾性的挙動をするが、大きくなると塑性的となり、さらに大きくなると破壊が生じる。このような砂の応力・ひずみ特性の相違は砂粒子の外力による挙動の相違によって決定される。ゆえに砂を不規則な形・大きさの摩擦性粒子の random assembly であるとの前提のもとに摩擦法則を唯一の力学条件に用いて粒子の挙動から、筆者はさきに弾性状態にある砂の偏差応力に対する構成式を求め本誌に報告した¹⁾ (以下これを第 1 報と記す)。ここでは塑性状態にある砂の偏差応力に対する構成式を理論的に求めようとするものである。

(2) 解の条件と方針

砂の条件は第 1 報の場合と同様に、「形、大きさ、配列の不規則な摩擦法則に従う固体粒子の集合体すなわち不規則な摩擦性粒子の random assembly」とする。この条件には粒子の材質についての制約がないから砂以外の固体微粒子も解の対象となるが、粒子自身が外圧によって破砕や摩擦する場合はここで扱わない。また砂は、その変形に過剰間隙圧が影響しないことを想定して、排水状態にある飽和砂または乾燥砂を対象とする。

平均主応力に対する砂の力学特性はかなり知られているので、ここでは砂が偏差応力をうけたときの応力・ひずみ特性を理論的に求めることを目的とする。そこでこの解に対する力学条件は、水平両軸の側圧が等しい三軸

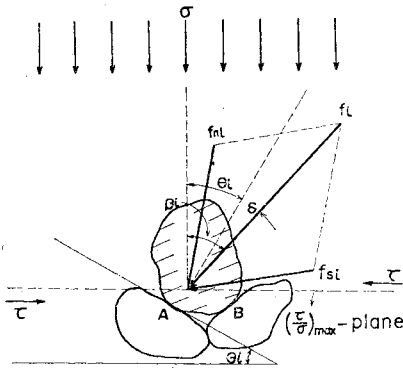
圧縮を想定するが、偏差応力に対するひずみ特性の中に平均有効主応力 σ_m の変動の影響が入らないように、 σ_m は偏差応力の載荷時のみならず除荷時にもつねに一定に保っているものとする。

この解析の方針としては、砂粒子の微視的特性を解析し、その累積として砂の巨視的特性を誘導するものである。微視的特性の解析には、粒子の状態や挙動に不規則性が入るので、統計力学的な手法を導入することにした。その取り扱いのため重要であり、最も考慮を要した事項は次の 2 つが挙げられる。第一の事項は、粒子状態を評価するために用いる基準面とその評価を表示する確率変量の選定であった。これに対しては第 1 報と同様に 1964 年の前報²⁾ に定義した内部摩擦の最大稼働面 (plane of maximum mobilization) を基準面に採用し、この面に対してはかかった粒子間力の方向角と接点方向角を確率変量に選ぶことにした。

粒子の最大稼働面は、砂に作用する有効主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (ここでは $\sigma_2 = \sigma_3, \sigma_m = \text{一定}$, 応力は圧力の場合を正とする) に変動が生じたとき、砂中のせん断応力の変動によって粒子の稼働 (相対移動, mobilization) が最も活発化する方向の面である。この面は、その面への有効垂直応力 σ とその面のせん断応力 τ とが $\tan^{-1}(\tau/\sigma)$ を、したがって (τ/σ) を最大にする方向の面であるから、この面を以下には $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面と略記する。この面にそって砂の内部摩擦角の稼働も最大となり、このとき稼働された内部摩擦角を稼働内部摩擦角 (mobilized internal frictional angle) と称し、角 ϕ で記す³⁾。

$(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって集結している粒子個々に作用する粒子間力の大きさ、方向および粒子が滑動する方向は粒子ごとに区々である。図-1 のようにある粒子に作用する粒子間力 f_i の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に対する角 β_i (添字 i は individual particle の意) を粒子間力の方向角といい、粒子が粒子間力によって隣接粒子表面を滑動する場合に摩擦斜面となる面 (図中の滑動接点 A が接する面)

* 正会員 工博 京都大学名誉教授



図一 粒子の接触状況と粒子間力

の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面となす角 θ_i を接点方向角と称している。 β_i, θ_i は粒子ごとで異なり一定ではない。また粒子間摩擦角も粒子ごとに異なり、これを δ_i とすると、 $(\theta_i + \delta_i)$ は粒子の滑動に対する抵抗角となるから、粒子の滑動抵抗角ということにする。なお δ_i の粒子ごとの不同を留意して $(\theta_i + \delta_i)$ を確率変量とする扱いもできるが、 δ_i の不同はさほど大きくないから、ここでは便宜上各粒子間の δ_i は全粒子の δ_i の平均値 δ に等しいと近似して扱う。

いま $\beta_i = x_1, \theta_i + \delta = x_2$ と書きかえ、 x_1, x_2 を新たな確率変量にしてそれらの確率密度 a 分布例を示せば、それぞれ 図-2 の曲線-1, 2 となる。 x_1 -群と x_2 -群はそれぞれ $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に作用する外力 (τ/σ) とこれに対する滑動抵抗に相当する。

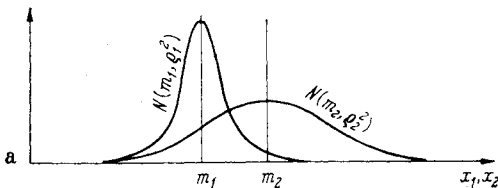


図-2 粒子の滑動接点に作用する粒子間力の方向角と滑動抵抗角の分布

$(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の粒子に滑動が生起する条件は、
 $x_2 - x_1 = y \leq 0$ (1)

であるから、上記の2曲線を1組とする図は、単に砂の粒子状態を示すだけでなく、図中の両曲線の形状や相対位置を変化させることによって、その応答として粒子の滑動やひいては砂の変形特性を誘導することができる。ゆえにこの図は粒子の滑動に対する砂の統計力学モデルといってもよいであろう。

ついでこの解析において考慮を要した第二の事項は、これらの確率変量の推移を粒子挙動に結びつける際に、微視的現象の解析の背景となる粒子構造の物性論的な概念の設定である。このような粒子構造の構想の設定にあたっては、その内容がすべての変形・強度現象に共通に

適用され、また力学的にも正当性があり、それに基づく解析が実情と合致するようなものであることが必要である。ここではこの設定には新たな要素や機構の概念を用いたところもあるが、それらに関する従来の知見はなく、またその設定の参考となる微視的現象を観測できるような実験的方法もまだ開発されていない。そのためこの解析では、砂を規定した前記の前提条件から出発して、演繹的な考察によって粒子構造の形態や機構を設定することとした。なおここでは微視的現象の解明に微視的レベルの実験を用いなかったが、それは所要な微視的現象を十分に測定できるような実験方法が現在みられないためであって、微視的レベルの実験が不用であるという意味ではない。むしろそのための新しい実験方法を今後開発していかなければならないと考えているものである。

2. 粒子構造に関する考察

(1) 粒子間力

砂の粒径分布や粒子配列が均質・等方であり、また粒子が硬く、粒子間力によって粒子に生じる変形が粒子間力の分布に影響しなければ、多数粒子からなる集団においては粒子間力 f_i の大きさ、方向はそれら粒子間力の合力の左右に均等な分布をしていると考えるのが自然である。個々の f_i の方向角を β_i とし、 β_i の平均値を β とすれば、第1報にのべたように、 β の示す方向は粒子間力の合力の方向すなわち外力の方向と一致するから、

$$\beta = \tan^{-1}(\tau/\sigma)_{\max} = \phi \dots\dots\dots(2)$$

f_i の方向角 β_i の確率分布には種々の分布関数が考えられるが、ここでは計算の便宜上、第1報と同様に両側有限ではないが、近似的に次式の正規確率関数で示されると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho_1} \exp\left\{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\rho_1^2}\right\} \\ &\equiv N(m_1, \rho_1^2) \end{aligned} \right\} \dots(3)$$

ここに、 $x_1 = \beta_i, m_1 = \beta$
 なお $N(m_1, \rho_1^2)$ は正規確率関数を示し、 ρ_1 は x_1 の標準偏差である。また $f(x_1)$ は 図-2 の曲線-1 に相当する。

標準偏差 ρ_1 はこの研究で導入した新しい量であるが、その特性についてはなお未知の点が少なくない。 ρ_1 は、砂が一定であっても粒子配列、したがって平均有効主応力 σ_m や弾性限界などによって変化することが懸念されたので、 σ_m =一定、偏差応力=一定の繰り返し載荷によって弾性状態にした砂について、加圧時の弾性係数を通して σ_m や弾性限界の大きさが ρ_1 に及ぼす影響を調べた。その結果 σ_m が一定であればこの実験の範囲では弾

性限界による著しい影響はみとめられなかった³⁾。ゆえにここではとりえず暫定的に、 ρ_1 は砂の材料とそれを拘束する σ_m が一定であれば、その砂の弾性限界の大きさには影響されず一定であるとしておく。すなわち

$$\rho_1 = \text{const. (if } \sigma_m = \text{const.)} \dots\dots\dots (4)$$

m_1 は 図—2 の 曲線-1 の 中央値であり、外圧の大きさを代表するものである。 m_1 の代りに $\tan m_1$ を z と記すと、 z と外圧 σ_1, σ_3 との関係は、 $\sigma_1 > \sigma_3$ の場合に対しては、第 1 報の式 (38) のように

$$z \equiv \tan m_1 (= \tan \beta) = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \right) \dots\dots\dots (5)$$

(2) 粒子構造の機構と外圧下の粒子挙動

砂に一定の σ_m のもとで偏差応力を載荷すると、式 (1) の条件にある滑動接点をもつ粒子はそれぞれ独立に隣接粒子表面を摩擦斜面として滑動 (slide) するが、この条件以外の粒子は原位置にとどまり不動である。滑動した粒子の滑動後の挙動には次の 2 つの型が発生することが考えられる。

第 1 の型は、滑動粒子が斜面を滑動する途中で周囲にある粒子構造の壁に阻止されて、そこで停止してしまう場合である。この壁を potential 障壁と仮称する。

第 2 の型は、外力の滑動粒子を通して potential 障壁に与える力が potential 障壁の強さより大きくなる結果、滑動粒子が potential 障壁を分解 (disintegrate) して障壁の領域内に押入る場合である。粒子がこのように potential 障壁を越える現象を活性化 (activation) と仮称する。これらの仮称は、他材料の極微粒子の挙動などに用いられる用語であるが、ここではこれと似た砂粒子の挙動を説明する便宜上用いることとした。通例 potential 障壁とは、極微粒子の移動経路にある potential の場の極値をいっているが、砂粒子の場合は、これに相当するような隣接粒子斜面の幾何学的な頂点を指すものとは必ずしも考えていない。砂粒子の場合の potential 障壁は、周囲に拘束圧をもつ粒子群を、粒子自体の性状とそれら粒子の構成状態とを变量とする状態確率をもつ体系とみたとき、その体系すなわちその粒子群が、そのとき保有している粒子構成状態を不可逆な状態に分解せられることに抵抗する体系の構造的強度と考えている。またこの構造的強度はこの体系の粒子配列とその接点方向角の分布に起因するものである。

砂粒子の挙動は砂の変形特性に反映するから、粒子の挙動に応じて次のような種々の巨視的性状を示す砂の状態があらわれる。

a) 弾性状態にある砂

第 1 の型の粒子は外圧を除荷すると、次式の条件にあ

る滑動接点をもつ粒子は、停止位置から原斜面を降下して最初の位置に復帰する。

$$\beta_i + \delta < \theta_i \dots\dots\dots (6)$$

偏差応力の載荷によって隣接斜面を滑動した粒子が、この応力を除荷することによってすべて原斜面を降下して原位置に復帰するような粒子状態にあるとき、すなわち砂が一定の σ_m のもとで偏差応力を加除しても、同一摩擦斜面を往復する粒子のみから構成されている粒子状態にあるとき、この状態を弾性状態 (elastic state) という。弾性状態にある砂では、偏差応力の載荷・除荷によって滑動接点の接点方向角の確率分布は、粒子に破碎や磨耗などの形状変化がない限り、変化しないから、粒子および粒子間力の状態は載荷・除荷によって変化しない。ゆえに砂の統計力学モデルからみた砂の弾性状態は、このモデルにおける x_1 と x_2 の両分布がそれぞれ独立で互いに無相関の場合の状態と定義することができる。

粒子の挙動は砂の巨視的な変形特性にも反映し、第 1 報に詳述したように、弾性状態にある砂では、一定の σ_m のもとで砂に偏差応力の載荷と除荷の往復過程を与えたとき、除荷時に残留ひずみ (永久ひずみ) が発生しない状態となる。ただし砂の弾性は第 1 報にもものべたように、Hooke の法則を満足するような真の弾性ではない。

弾性状態にある砂に、 σ_m をそのまま保持しつつ偏差応力を増大すると、ある応力限度に達すると粒子の活性化が生じる。この限度の偏差応力または応力比 z を弾性限界 (elastic limit) といい、応力比で示した弾性限界の値を s_{el} であらわす。弾性限界が存在することは、potential 障壁が砂の粒子構造の形態をもって砂中に形成されるからであると考え、弾性限界値は、個々の粒子に対する potential 障壁の高さ (強さ) の平均値に対応することとなる。

b) 塑性状態にある砂

外圧が弾性限界を超過すると、粒子の中にはその粒子間力の potential 障壁に与える力が potential 障壁の強さを超過するものが発生するので、活性化する粒子があらわれる。その際活性化しない粒子を準安定粒子または弾性挙動粒子と仮称する。準安定粒子は原斜面を動く限りでは、準安定粒子群中の相互の粒子状態や接点方向角の分布は、当初この砂が弾性状態にあったときのままの状態を保有している。ゆえにそれらの準安定粒子だけを一団とみれば、この一団の粒子の状態は、この砂が弾性状態にあったときの粒子状態として扱うことができる。

活性化現象は粒子構造の局所的な降伏であり、また活性化は全粒子の中から at random に生起するから、活性化した粒子群が支持できる粒子間力の一粒子当りの平均の大きさは、potential 障壁の強さの平均値となる。

ゆえに活性化粒子群が活性化後支持できる外圧は、この粒子群が弾性限界にあったとき支持していた外圧の分担分だけとなり、これ以外の活性化以前に活性化粒子に作用していた粒子間力は、準安定粒子に転稼される。そのため準安定粒子には、上述したようなこの粒子群への外圧転稼前の一次的な滑動につづいて、それら滑動粒子の一部の活性化の結果、粒子間力の転稼が生ずることによる二次的な滑動と活性化が発生する。準安定粒子群が活性化粒子から粒子間力の転稼をうけても、二次的な準安定粒子群の活性化が有限の限度で終息し、準安定粒子群がなお安定状態を保つとき、この状態を塑性状態 (plastic state) という。塑性状態にある砂の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面において、単位面積中にある全粒子数を N 、活性化粒子数を N_p 、準安定粒子数を N_e とすると、

$$N_e + N_p = N \dots\dots\dots (7)$$

活性化発生後における準安定粒子の二次的な滑動の際には、活性化粒子は周囲を準安定粒子で囲まれているから、活性化粒子は準安定粒子の滑動に連れられて potential 障壁を越えてさらに障壁領域内に移動する。一方準安定粒子群の中には滑動しない粒子があり、また滑動する粒子でもその滑動距離は粒子ごとで区々である。ゆえに準安定粒子に連行されて移動する活性化粒子に対しては、この粒子よりも滑動量の少ない準安定粒子が周囲に存在することは、この粒子の移動に対する抵抗となり、活性化粒子は連行の際に小さい抵抗の側の粒子の移動量は、大きい抵抗の側の移動量よりも大きく移動する。その結果、活性化粒子は大きい抵抗の側に向きを変え、移動に対する抵抗が増大する方向に、すなわちより大きい接点方向角を取得する方向に配向 (orientation) をすることとなる。このように粒子が載荷前よりも大きい接点方向角をもつと、砂はそれに応じて弾性的特性や強度が増大する。ゆえに砂に破壊強度以下の偏差応力を加えて塑性変形を生じさせると、砂の弾性や強度が増大する現象が現われる。これが砂のひずみ硬化 (strain hardening) であって、その機構は上述によって解明されたこととなる。なおひずみ硬化の過程では粒子の配向が進展するから、配向が進むにつれて砂にはそれだけ異方性の傾向が高まるはずである。ゆえに砂の力学特性を厳密に扱うには異方性の考慮が必要となるが、ここでは特にその考慮はしないこととする。

一方準安定粒子では、その粒子群中に活性化が発生すると活性化した粒子個所が局部的に降伏するから、活性化粒子の周囲にあるいくつかの準安定粒子はこの降伏部を埋めるように移動して、そこで外力に耐えられる滑動抵抗角に配向する。このような新たな配向をした準安定粒子と前述の新配向をした活性化粒子はともに、原粒子斜面から離れるので、偏差応力を除荷しても原斜面を下

降して原位置に復帰することはできない。そのため砂には除荷時に残留ひずみが発生する。以上のことから、巨視的特性からみた砂の塑性状態は、砂に偏差応力を載荷すると有限のひずみが生じ、この外圧を除荷すると残留ひずみが発生するとき、このような砂の載荷時の状態を指していうことができる。また砂を塑性状態にすることのできる偏差応力または応力比のうち最大のものを破壊強度という。

上述のように、塑性状態においては、載荷によって粒子には活性化後配向が生じ、載荷前の接点方向角は変化を受け、この変化は載荷の偏差応力を除いても復元しない。ゆえに前記した砂の統計力学モデルは、塑性状態の場合には、モデルの構成要素である x_1 , x_2 の両分布は独立でなく、弾性状態の場合のように無相関とする取り扱いができない。

以上は砂に1回限りの載荷を与えた場合であるが、さらに破壊強度以下の一定の偏差応力を一定の平均主応力のもとで繰り返し載荷すれば、ついに全粒子がその応力に耐える方向に配向する。そのため一定応力の繰り返し載荷によってその応力に耐える弾性限界値をもつ砂の弾性状態が得られる。第1報の図—1はこの一実験例であって、既報のように、砂を排水三軸状態におき $\sigma_m = 4.0 \text{ kg/cm}^2$ の一定値のもとで偏差応力を $0 \sim 4.5 \text{ kg/cm}^2$ の範囲に繰り返し載荷して、繰り返し回数が23回に達したとき残留ひずみがほとんど認められなくなり、砂がほぼ弾性状態に達する過程を示したものである。

e) 破壊状態にある砂

外圧が破壊強度に達すると、準安定粒子群に生ずる二次的な活性化が終息せず、その外圧が存在する限り、際限なく続発するようになる。この状態を破壊状態 (failure state) という。砂の巨視的変形からみた破壊状態は、一定偏差応力の作用下ではひずみが際限なく増大しようとする状態であり、この状態を続ければ砂は遂に破壊するにいたる。なお破壊状態における砂の特性についてはつぎの機会にのべることとする。

(3) 粒子の接点方向角

砂は粒子材料が一定であっても、各種の締め固めを与えることができるから、粒子の滑動抵抗角はそれぞれの締め固めに応じた分布形態をとることができる。

砂を前述のように、一定の σ_m のもとで、一定の偏差応力 (したがって一定の応力比) の繰り返し載荷によって弾性状態にした砂はその作成過程からも明らかのように、その作成に使われた応力比以下の応力比をもつ外力に対しては安定である。しかしこの繰り返し載荷の最大応力比よりも大きい応力比に対しては弾性状態としての粒子状態を維持することができないから、弾性状態の作

成のために繰り返し先行載荷された最大応力比はその砂の弾性限界 s_{el} となる。またこのようにして新たな弾性状態に移った砂は、前述した弾性状態の生成過程からも分かるように、その粒子構造は最大応力比による粒子間力の方向角につき合う限度の接点方向角で安定したものであるから、この砂の滑動抵抗角 x_2 の分布関数 $\psi(x_2)$ は、このとき与えた最大応力比による粒子間力の方向角の確率分布 $f(x_1)$ に一致すると仮定できよう。その場合 $f(x_1)$ が式 (3) で示されるときは、この砂の $\psi(x_2)$ は、

$$\psi(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho_2} \exp\left\{-\frac{(x_2 - m_2)^2}{2\rho_2^2}\right\} \equiv N(m_2, \rho_2^2) \quad \dots(8)$$

この砂では、

$$m_2 = m_1, \quad \rho_2 = \rho_1, \quad x_2 = \theta_2 + \delta$$

このような繰り返し載荷によって弾性状態にした砂の弾性限界 s_{el} は、載荷した最大偏差応力 (応力比 z) に等しくなることから、

$$s_{el} = \tan m_2 = \tan m_1 \quad \dots(9)$$

$\psi(x_2)$ の分布は実測することが可能であるから、上記の仮定が正しければ $\psi(x_2)$ を測ることによって測定困難な $f(x_1)$ 、したがって ρ_1 の分布特性などを実測することができるであろう。

また上記とは別に、一定の σ_m のもとで一定の応力比の繰り返し載荷を与えて弾性状態にした砂に、その砂の弾性限界 s_{el} 以上の応力比 z を 1 回だけ与えて粒子の一部が新たな接点方向角に配向するときの関係をみよう。弾性限界 s_{el} をもつ砂の滑動抵抗角の分布を $N(\theta_{el} + \delta, \rho_{el}^2)$ 、応力比 z の粒子間力の方向角の分布 $f(x_1)$ を $N(\beta, \rho_1^2)$ で示す。ここでは $s_{el} = \tan(\theta_{el} + \delta)$ 、 $z = \tan \beta$ である。

$z(z > s_{el})$ の載荷後、配向することなく元来の弾性状態時の滑動抵抗角に残留している粒子の数を RN 、 z による粒子間力に抵抗できる粒子構造に配向した粒子の数を $(1-R) \cdot N$ とする。ここに N は砂の単位面積中の粒子数、 $R (< 1)$ は原滑動抵抗角に残留する粒子の比率である。 $(1-R) \cdot N$ 個の配向した粒子が新たに得る滑動抵抗角を x_2 、その分布を $\psi_p(x_2)$ とすると、 $\psi_p(x_2)$ は $N(\beta, \rho_1^2)$ と分布幅、平均値を等しくし、その確率密度は $N(\beta, \rho_1^2)$ のその $(1-R)$ 倍となる。すなわちこの関係は

$$\psi_p(x_2) = (1-R) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho_1} \exp\left[-\frac{(x_2 - \beta)^2}{2\rho_1^2}\right] \quad \dots(10)$$

一方、載荷時に活性化したが配向の進まなかった粒子は、potential 障壁に達したところで停止しているから、これらの粒子は活性化した後も当初の接点方向角に近い接点方向角にあるとみても大差はない。

また準安定粒子のうちで配向しなかった粒子にあっては、それらの粒子のうちで滑動が生起してもこの粒子群の接点方向角分布には変化が生じない。さらに準安定粒子における配向の発生は、活性化粒子の発生位置において at random に生起するから、配向せずに原滑動抵抗角に残留する準安定粒子の滑動抵抗角の分布は、元来の弾性状態のときの滑動抵抗角分布と分布幅、平均値を等しくする。ゆえに配向しなかった活性化粒子および準安定粒子の両粒子群の全体としての滑動抵抗角の確率密度は、弾性状態時の元来の確率密度値の R 倍の値で分布するとしても大差ないであろう。

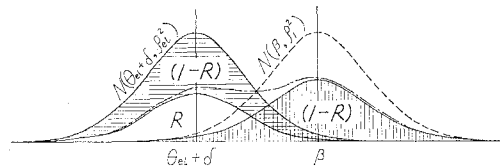


図-3 粒子の配向による接点方向角の変化

上述の関係を図示すれば図-3となる。この図は、左方の滑動抵抗角分布 $N(\theta_{el} + \delta, \rho_{el}^2)$ をもつ弾性状態の砂に z を載荷することによって、この $N(\theta_{el} + \delta, \rho_{el}^2)$ 分布のうち横線をつけた面積が、配向の結果左方の原分布から除かれて右方の縦線をつけた β を平均値とする分布へ移り、この新たな滑動抵抗角の分布が $f(x_1) (= N(\beta, \rho_1^2))$ の確率密度の縦距を $(1-R)$ 倍だけ一定比率縮小したものとなることを示している。ゆえにこの砂の載荷後の滑動抵抗角の分布は、これら二種の分布を合成した図の鎖線で示す分布のように一般には非対称な分布となる。

また過去に種々の大きさの載荷をうけた砂に新たな載荷を与えると、過去の外圧のための配向の履歴はその後の外圧の載荷によって、一部は消滅するものの、なおいくらかは残存する。いま第 k 回目の載荷により配向して得た接点方向角の第 n 回目の載荷後 (ただし $n > k$) になお残存しているものを θ_{ik} と記し、単位面積中の全粒子数 N のうちこの分布に属する粒子数を $N_k (= \alpha_k \cdot N)$ とする。またこの N_k 個の粒子群の滑動抵抗角 ($\theta_{ik} + \delta$) を x_{2k} と記し、 x_{2k} の確率分布関数、平均値および標準偏差をそれぞれ $\psi_k(x_{2k})$ 、 m_{2k} 、 ρ_{2k} とすると、この砂全体の滑動抵抗角の分布 $\psi(x_2)$ は、各回の載荷による滑動抵抗角の第 n 回の載荷後の残存分の総和として次式で示される。

$$\psi(x_2) = \sum_{k=1}^n \{\alpha_k \cdot \psi_k(x_{2k})\} \quad \dots(11)$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \dots + \alpha_n = 1$$

$$\psi_k(x_{2k}) = N(m_{2k}, \rho_{2k}^2)$$

このように $\psi(x_2)$ は先行载荷の応力履歴の影響をうけるものであり、その分布は先行载荷の履歴による多くの分布関数の和として合成される関係上、 $\psi(x_2)$ は一般には粒子間力の方向角分布のような対称分布にはならず、通常非対称である。またもし砂の先行の偏差応力がつねに同一の σ_m のもとで与えられている場合には、式 (4) の関係が成立するとみられるから、先行の外圧による粒子間力の方向角分布は $N(m_{1k}, \rho_1^2)$ で示され、式 (11) の ρ_{2k} はいずれも ρ_1 に等しくなる。

$$\rho_{2k} = \rho_1 \quad (k=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots(12)$$

粘性土では先行载荷の履歴がその物性に影響を与えることがしばしば説明されているが、砂ではほとんど注目されていないようである。しかし先行载荷の履歴は、上述のように明らかに接点方向角の上に残されるから、それに応じた影響が強度や変形特性に発現することとなる。なお砂の载荷履歴の影響については次の機会にのべる。

3. 载荷過程における応力・ひずみ特性

(1) 弾性状態にある砂の応力・ひずみ特性

この内容はすでに第1報に記したが、その成果は塑性状態の砂の解にも適用される部分が多いから、必要事項を概述するとともに、ここで第1報の記述の一部を補正したい。

a) 粒子の滑動確率 P

弾性状態にある砂の滑動接点における粒子間力の方向角 x_1 および滑動抵抗角 x_2 の確率分布は、外圧と砂が与えられれば一義的に決定され、また x_1 の標準偏差 ρ_1 は σ_m が一定であれば偏差応力の大きさに無関係に一定とみられることを前述した。ゆえに x_1 と x_2 は互いに独立で無相関であるから、 x_1, x_2 の確率分布関数がそれぞれ式 (3) の $f(x_1)$ および式 (8) の第1式の $\psi(x_2)$ で示されるときは、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって存在する全粒子のうち滑動粒子が発生する確率すなわち滑動確率 P は、式 (1) の状態が発生する確率として第1報の式 (15) のように次式で示される。

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-m/\rho} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\rho}\right)^2\right\} d\left(\frac{m}{\rho}\right) \\ \equiv F\left(-\frac{m}{\rho}\right)$$

ここに

$$m = m_2 - m_1, \quad \rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} \dots\dots\dots(13)$$

$F(-m/\rho)$ は $N(0, 1^2)$ の確率積分であってその数値は確率積分表から求められる。

b) 滑動粒子の滑動抵抗角

外圧 m_1 をうけている砂に対して、 m_1 を dm_1 だけ

増加することによって新たに滑動に移る粒子群の各粒子の接点方向角 θ_i の平均値を θ_s (第1報における θ_e を θ_s と記す) とすると、 θ_s は第1報の式 (27) により次式で示される。

$$\theta_s + \delta = (m_1 \rho_2^2 + m_2 \rho_1^2) / (\rho_1^2 + \rho_2^2) \dots\dots\dots(14)$$

c) 応力・ひずみ特性

第1報の p. 131 右欄 12 行目より p. 132 左欄 8 行目まですなわち前報の式 (17) の下から式 (19) までの説明は不正確であるので、下記のように訂正する。

粒子が粒子間力によって当初の静止位置から potential 障壁まで隣接粒子表面にそって図-4 のように滑動するとき、斜面に沿う滑動距離を A_i 、粒子間距離 (粒子の重心間距離) を r_i とし、 A_i, r_i の全粒子に対する平均値をそれぞれ A, r とする。 A_i, r_i はいずれも接し合う粒子の粒径に相応する大きさのものであるから、それらは粒子ごとに大きく異なるが、両者の比 A_i/r_i は A/r のまわりにある分布をすと考えられる。そこで次式のようにおく。

$$A_i/r_i = c_i \cdot A/r, \quad (c_i: \text{分布係数})$$

砂の粒子の形状、寸法および粒子配列が定まっていれば、 A, r は一定であるから、その比 A/r は定数となり、またこのとき係数 c_i の確率分布も一定となる。

一方 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に生ずる巨視的にみた砂のせん断面は、粒子の相対移動の結果生じることを考慮すれば、厚さのない面ではなく、ある厚さをもつせん断層として形成される。このせん断層の砂全体に対しての平均厚さを b とする。 b は $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって存在する各滑動粒子とその被滑動粒子との種々の方向をもつ粒子間距離によって合成されることと、粒子の滑動が全粒子のうちから at random に生起することから、 b はその砂の全粒子の平均粒子間隔 r に比例するとみられる。ゆえに b を次式のようにおく。

$$b = k \cdot r, \quad (k: \text{係数})$$

k は r の b に対する寄与の程度を示す係数で、粒子の形状・寸法と粒子配列によって定まり、またせん断機構からみて、せん断応力の大きさやせん断面の方向には無

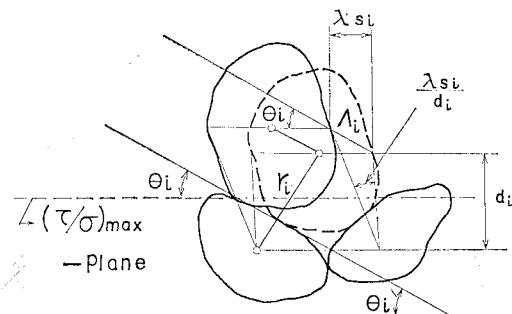


図-4 粒子の滑動状況

関係であると考えられる。

$(\tau/\sigma)_{\max}$ -面における砂の巨視的なせん断ひずみを r_β と記す。各滑動粒子の滑動が一樣に r_β の増分 Δr_β に寄与するとすれば $\Delta r_\beta \cdot b$ は各滑動粒子の滑動距離 A_i の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面方向の成分 $A_i \cdot \cos \theta_i$ の総和となるから、滑動確率の増分 ΔP によって生じる Δr_β は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_\beta &= \frac{1}{b} \frac{(P+\Delta P)N}{\sum_{i=1}^N} A_i \cdot \cos \theta_i \\ &= \frac{A \cdot \cos \theta_s}{k \cdot r} \frac{(P+\Delta P)N}{\sum_{i=1}^N} \left(\frac{c_i \cdot r_i}{r} \cdot \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_s} \right) \\ &= \frac{A \cdot N \cdot \cos \theta_s}{k \cdot r} \Delta P \int_{w_1} \int_{w_2} w_1 \cdot w_2 \\ &\quad \cdot f(w_1, w_2) dw_1 \cdot dw_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{ここに} \\ &w_1 = c_i \cdot r_i / r, \quad w_2 = \cos \theta_i / \cos \theta_s \\ &\dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

上式中 N は砂単位面積中の粒子数、角 θ_s は滑動した粒子群における各粒子の θ_i の平均値である。確率変数 w_1 の分布は、粒子の形状・寸法と粒子配列が一定であれば一定であり、また w_2 は θ_i の余弦の分布であるから、 w_2 の期待値は θ_i の分布域によりいくらか変動するが、実際の弾性状態にある砂を対象にすればほぼ一定とみて大差がない。要するに w_1, w_2 の分布は砂粒子の形状・寸法と粒子配列が一定であれば一定となり、外力 m_1 の大きさに無関係となるから、 w_1, w_2 はそれぞれ独立で無相関であり、それぞれの確率変数の期待値はそれぞれ一定である。また $f(w_1, w_2)$ を w_1, w_2 の同時確率分布を示すものとすれば、 $f(w_1, w_2)$ の分布もまた砂粒子の形状・寸法と粒子配列が一定であれば一定である。ゆえにこの砂の w_1, w_2 の分布に対して、上式の w_1, w_2 域内の二重積分は、互いに独立な w_1 と w_2 の積に対する期待値であるから、各確率変数の期待値の積に等しく一定値となり、これを c_s と記す。上式にこの c_s を入れてかきなおすと、

$$\Delta r_\beta = \{c_s \cdot A \cdot N \cdot \cos \theta_s / (k \cdot r)\} \cdot \Delta P \dots\dots\dots(16)$$

式 (14) から θ_s を求めると、

$$\theta_s = m_1 - \delta + (m_2 - m_1) \cdot \rho_1^2 / (\rho_1^2 + \rho_2^2)$$

これより $\cos \theta_s$ は、

$$\cos \theta_s = \cos \{m_1 - \delta + (m_2 - m_1) \cdot \rho_1^2 / (\rho_1^2 + \rho_2^2)\} \dots\dots\dots(17)$$

m_1 の小さい部分を除けば $(m_2 - m_1) \cdot \rho_1^2 / (\rho_1^2 + \rho_2^2)$ は m_1 に比して小さく、また δ もやや小さい角であるから、上式を次のように近似する。

$$\begin{aligned} \cos \theta_s &\doteq \cos(m_1 - \delta) = \cos m_1 \cdot \cos \delta + \sin m_1 \cdot \sin \delta \\ &\doteq \cos m_1 \cdot \cos \delta \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

上式を式 (16) に代入し、いま対象としている $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面における Δr_β と ΔP の関係を微分形で示すと

$$\left. \begin{aligned} \partial r_\beta / \partial P &= A \cdot \cos m_1 \\ \text{ここに} \\ A &= c \cdot A \cdot N / r, \quad c = c_s \cdot \cos \delta / k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

上式中の A を変位係数といい、 c は砂のせん断ひずみにおよぼす粒子の変位の寄与の程度を示すものであるから c を寄与係数ということとする。さきののべた第1報の一部を以上のように訂正し、上述中の式 (19) を第1報の式 (19) を訂正した式とする。

式 (19) は弾性状態にある砂の応力・ひずみ特性を示す式であるが、滑動確率 P を含んでいる。 P は式 (13) のように、その数値は数表から求められるが簡単に式示できない不便がある。また P の分布範囲は無遠におよんでいるが、これは $f(x_1), \psi(x_2)$ をそれぞれ式 (3), (8) の第1式のような両側無限の正規確率関数によって近似したことに起因するものであって、砂の実状である有限範囲の分布とは分布の両端付近では一致しない。すなわち P の性状は $|m| (m = m_2 - m_1, m_1 \geq 0)$ の大きい部分では実状と合わないことになる。そのため m の比較的小さい領域で P と一致し、しかも以後の計算に都合のよいような P に代わる関数を探すこととした。その結果ここではとりあえず第1報の式 (31) のような正切関数 P_a によって P を近似することとする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} P &\doteq P_a = \frac{1}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2\rho} \right) \\ \text{ここに} \\ m &= m_2 - m_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

砂が等方圧下にあるときの P_a を P_{a0} とすると、 P_{a0} は $m_1 = 0$ を上式に代入すれば求められる。等方圧下の砂に m_1 で示される偏差応力を加えたときの滑動確率の増加分 P_e は、三角関数の展開にいくらかの近似計算を行うと、第1報の式 (32) のように次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} P_e &= P_a - P_{a0} = W_e \cdot z \\ \text{ここに} \\ W_e &= (1/2) \tan \{ (\tan^{-1} s_{el}) / (2\rho) \} / s_{el} \\ s_{el} &= \tan m_2, \quad z = \tan m_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

上式中の W_e は弾性状態にある砂の粒子配列に支配される係数であるから、弾性状態における構造係数と称することとする。 W_e は s_{el}, ρ の関数であるが、 ρ は砂にかかる平均有効主応力 σ_m が一定であれば、一定の粒子からなる砂ではほぼ一定とみられ、また s_{el} の変動範囲は砂ではあまり大きくないから、 W_e は σ_m が一定であればその砂に固有なほぼ一定の定数とみなしても大差ないと推定される。

さらに前述した第1報の訂正にともない、第1報の p. 134 右欄 20 行目より p. 135 左欄 9 行目まで、すなわち前報の式 (32) の下から式 (33) までを次のように訂正する。

式 (19) の r_β が発生しているときの最大せん断ひずみを r とする. 式 (19) が示すように r_β は P と $\cos m_1$ の関数であるが, 一方 r はその性質上 P のみの関数である. なお P を式 (20), (21) のように P_e で置換するときは, P_e は式 (21) が示すように z の関数である. また m_1 は式 (2), (3) より $m_1 = \beta = \phi$ であり, $\cos \phi$ は第 1 報の式 (1), (5) より $\cos \phi = 1/\sqrt{1+z^2}$ であるから, $\phi, \cos \phi$ は z の関数である. 上述をまとめて式示すれば

$$\begin{aligned} r_\beta &= f_n(P_e, \cos \phi) \\ r &= f_n(P_e) \\ P_e &= W_e \cdot z, \quad \cos \phi = 1/\sqrt{1+z^2} \end{aligned}$$

ゆえに

$$dr_\beta = \frac{\partial r_\beta}{\partial P_e} dP_e + \frac{\partial r_\beta}{\partial \cos \phi} d \cos \phi$$

また r_β は r と $\cos \phi$ の関数でもあるから

$$dr_\beta = \frac{\partial r_\beta}{\partial r} dr + \frac{\partial r_\beta}{\partial \cos \phi} d \cos \phi$$

ゆえに上記 2 式より

$$\frac{\partial r_\beta}{\partial P_e} dP_e = \frac{\partial r_\beta}{\partial r} dr \quad \dots\dots\dots (22)$$

砂の主ひずみ増分の方向は主応力の方向に一致すると考えられるから

$$\frac{\partial r_\beta}{\partial r} = \cos \phi \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式と式 (19) (ただし $m_1 = \phi$ および $dP = dP_e$) を式 (22) に代入すると

$$\frac{dr}{dP_e} = A$$

初期条件の $P_e = 0, r = 0$ に対して上式を積分すると

$$r = A \cdot P_e = A \cdot W_e \cdot z \quad (\because P_e = W_e \cdot z) \quad \dots\dots (24)$$

また $r = 0$ のもとで $r_\beta = 0$ の条件のもとに式 (23) の偏微分方程式を積分し, さらにこれに上述の関係を用いると

$$r_\beta = r \cdot \cos \phi = A \cdot W_e \cdot z / \sqrt{1+z^2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

第 1 報の式 (32) の下から式 (33) までを以上のように訂正するが, 上式 (25) は, 結果的には第 1 報の式 (33) と同一である.

次に弾性状態にある砂のダイラタンシーについて述べる. これについては第 1 報の 6. に記したが, その記述の一部すなわち第 1 報の p. 132 左欄 10 行目から, 同欄下から 10 行目までを次のように訂正したい.

粒子が隣接粒子の表面を滑動すると, 粒子はその粒子の接点方向角 θ_i だけ $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面から上方にそれるために, 1 個の粒子の滑動によってせん断層厚 b は $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に垂直な方向に $A_i \cdot \cos \theta_i \cdot \tan \theta_i / b$ の割合で拡大する. これを砂のダイラタンシーによる体積膨張とする. 滑動確率が ΔP 増加することによるせん断層厚の体

積膨張を $-d\epsilon_n$ (ϵ_n は圧縮を正とする) と記すと, $d\epsilon_n$ は

$$-d\epsilon_n = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{(P+\Delta P) \cdot N} A_i \cdot \cos \theta_i \cdot \tan \theta_i$$

各滑動粒子の θ_i の平均値を θ_s とすれば, θ_i は比較的小さい角であるから, $\tan \theta_i$ の平均値は $\tan \theta_s$ と近似できる. ゆえに上式は式 (15), (16) と同様にして

$$\begin{aligned} -d\epsilon_n &= \{c_s \cdot A \cdot N \cdot \cos \theta_s / (kr)\} \tan \theta_s \cdot \Delta P \\ &= \tan \theta_s \cdot \Delta r_\beta \end{aligned}$$

上式を微分形で記すと

$$-d\epsilon_n = \tan \theta_s \cdot dr_\beta \quad \dots\dots\dots (26)$$

第 1 報の一部を以上のように訂正し, 上記の式 (26) を第 1 報の式 (20) とする.

次に $\tan(\theta_s + \delta)$ を $\tan \theta_s$ について Maclaurin 展開をし, $\tan^2 \theta_s$ 以上の項は小さいから無視すると, $\tan(\theta_s + \delta)$ は近似的に次式で示される.

$$\begin{aligned} \tan(\theta_s + \delta) &\doteq (1 + \tan^2 \delta) \cdot \tan \theta_s + \tan \delta \\ &= \lambda \cdot \tan \theta_s + \tan \delta, \quad \lambda = 1 + \tan^2 \delta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (27)$$

砂の弾性状態が σ_m 一定のもとで一定偏差応力の繰り返し載荷によって作られた場合では, 式 (8) の第 2 式のように $\rho_1 = \rho_2$ であるから, この関係を式 (14) に入れると同式の右辺は $(m_1 + m_2)/2$ となる. ゆえに $\tan(\theta_s + \delta) = \tan\{(m_1 + m_2)/2\}$ となり, さらに

$$\tan\{(m_1 + m_2)/2\} = (1/2)(\tan m_1 + \tan m_2 - \alpha)$$

とおき, α を補正項とする. α は実際の砂の m_1, m_2 の値の範囲では, m_1 の小さい部分を除けば, 極めて小さいからこれを無視すると (無視しない場合は第 1 報にある)

$$\tan(\theta_s + \delta) \doteq (1/2)(\tan m_1 + \tan m_2) \quad \dots\dots (28)$$

式 (26), (28) を式 (27) に代入し, $\tan m_1 = z, \tan m_2 = s_{el}$ と書きなおせば次式第 1 式が得られ, さらにこの第 1 式に式 (25) を z について微分した関係を代入して積分すれば次式第 2 式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \lambda \left(-\frac{d\epsilon_n}{dr_\beta} \right) + \tan \delta &= \frac{s_{el} + z}{2} \\ \lambda \left(-\frac{\epsilon_n}{r_\beta} \right) + \tan \delta &= \frac{s_{el}}{2} + \frac{z}{4} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

上記の式 (29) はせん断ひずみと体積ひずみの関係式で, 式 (25) とともに弾性状態にある砂の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面におけるせん断ひずみと体積ひずみの構成式である.

(2) 塑性状態にある砂の応力・ひずみ特性

a) 粒子の活性化

砂に一定の σ_m のもとで s_{el} 以上の応力比 z を載荷すると, 2. (2) b) でのべたように, 粒子の一部にはまず potential 障壁までの第一次の滑動が生じる. ついで potential 障壁に達した滑動粒子のうちから活性化が発

生すると、活性化した粒子に作用していた偏差応力の弾性限界値以上の応力が準安定粒子群に転稼される結果、不動であった準安定粒子のうちから第二次に滑動する粒子が発生する。第二次の滑動をした粒子が potential 障壁に達しても活性化すれば、また偏差応力が準安定粒子に転稼されて、新たな活性化発生の素因が高まる。そのため交互に滑動・活性化・滑動の循環が暫時の間繰り返され、活性化粒子の数は増加を続けるが、載荷応力が破壊強度以下であれば、ついには活性化は終息して砂は塑性状態として安定化する。砂に応力比 z を載荷してから塑性状態として安定するまでの間に活性化する粒子の、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の単位面積当たりの粒子数を N_p と記す。

塑性状態の砂では粒子の一部が活性化して不安定になっても、活性化粒子の周囲には弾性挙動粒子が存在しているから、砂全体としては安定である。

応力比 z のもとで、活性化の終息時までに発生する活性化粒子の総数 N_p は、外圧 z が弾性限界 s_{el} に等しいときは 0 であるが、 z が大きくなるほど大きい粒子間力が生ずるから、 z が増すにつれて増大する。 z が破壊強度に達すると砂の粒子構造には分解が始まり粒子状態が一変するが、仮に N_p の z による増加傾向が破壊強度を超えた領域まで同一傾向をもつものとしたとき、全粒子 N が活性化するときの z の値を s_{∞} とする。すなわち活性化粒子数 N_p は、 $z=s_{el}$ においては $N_p=0$ であり、 $z=s_{\infty}$ においては $N_p=N$ であって、 s_{el} と s_{∞} の中間の z に対する N_p の増加は、第一次の滑動粒子数が z により増加する傾向と同様に、 z に正比例するものと仮定する。そうすれば砂の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の単位面積中の全粒子数 N 、活性化粒子数 N_p 、準安定粒子数 N_e と応力比 z との関係は次式で示される。ただし次式は塑性状態の範囲内のみで成立するものである。

$$N_p = \frac{z - s_{el}}{s_{\infty} - s_{el}} \cdot N, \quad N_e = N - N_p = \frac{s_{\infty} - z}{s_{\infty} - s_{el}} \cdot N \quad \dots\dots\dots(30)$$

前述のように粒子の活性化は、砂に弾性限界値以上の偏差応力を与えると発生し、活性化粒子の数は載荷後より活性化が終息するまでの期間、外圧が一定であっても増加を続ける。活性化粒子数の増加は、後述のように砂のせん断ひずみの増加となるから、上述の活性化粒子数の経時増加によって砂のクリープ機構が説明できる。

b) 砂のせん断ひずみ

準安定粒子群を一母集団とみたとき、その滑動抵抗角の分布は、2.(3)に前述したように、この粒子群に配向する粒子が発生するまでの時点においてはこの砂が弾性状態にあったときの滑動抵抗角の分布を保っている。一方準安定粒子群に作用する粒子間力の方向角の分布は、活性化により偏差応力の一部がこの粒子群へ転稼さ

れても、活性化が at random な大きさ・方向の粒子間力のもとで生起することを考えれば、このときの粒子間力の方向角の確率分布は元来の弾性状態時の分布と同じとみて差し支えない。ゆえに配向しなかった準安定粒子群の滑動確率は、準安定粒子を弾性状態にある砂の粒子とみて、式 (21) を用いて算出することができる。

準安定粒子群に活性化発生以前に活性化粒子に作用していた偏差応力の一部が転稼されたとき、準安定粒子群に作用する応力比は、活性化発生以前にこの粒子群に作用していた応力比 z と、活性化粒子に活性化以前作用していた応力比のうち弾性限界以上の応力比の転稼分 $(z - s_{el}) \cdot (N_p/N_e)$ との和となる。この和の応力比を構成する粒子間力の方向角の分布において、分布の中央値を m_{1e} と記すと、 $\tan m_{1e} (=z_e)$ は次式で示される。

$$z_e (= \tan m_{1e}) = z + (z - s_{el}) \cdot (N_p/N_e) \quad \dots(31)$$

上式に式 (30) を代入し、 dz による z_e の増分を求めると

$$\left. \begin{aligned} z_e &= s_{el} + (s_{\infty} - s_{el}) \cdot (z - s_{el}) / (s_{\infty} - z) \\ \therefore dz_e &= \{(s_{\infty} - s_{el}) / (s_{\infty} - z)\}^2 \cdot dz \end{aligned} \right\} \dots(32)$$

応力比 z のもとで安定している塑性状態の砂に dz の増分を載荷して再び安定状態が得られたとする。 dz の載荷前の準安定粒子数は N_e であり、この N_e 粒子群に作用している応力比は z_e である。この N_e 粒子群に $(z_e + dz_e)$ を載荷すると、 $W_e \cdot (z_e + dz_e) \cdot N_e$ 個の粒子が滑動するが、これら滑動粒子は potential 障壁に到達すると、そのうち dN_e 個は活性化して活性化粒子に変わる。ゆえに dz による準安定粒子の新たな滑動と、新たに活性化する粒子の potential 障壁までの滑動とによって生ずる最大せん断ひずみを $d\gamma_1^*$ (*印は塑性状態における値の意) とすると、 $d\gamma_1^*$ は近似的に

$$\begin{aligned} d\gamma_1^* &= (A \cdot W_e/N) \cdot \{(z_e + dz_e) \cdot N_e - z_e \cdot N_e\} \\ &= (A \cdot W_e/N) \cdot (dz_e \cdot N_e) \dots\dots\dots(33.1) \end{aligned}$$

また dz の載荷により粒子が活性化すると、活性化粒子の近傍にある若干数の準安定粒子は、活性化粒子の降伏部を埋めるように移動する。これら移動粒子の移動距離の合計は、 N_e 個の準安定粒子群に dz_e を載荷したときの 1 粒子当りの平均滑動距離の μ 倍になるとして示せば、これら粒子の移動によって生ずる最大せん断ひずみ $d\gamma_2^*$ は

$$d\gamma_2^* = \mu \cdot (A \cdot W_e/N) \cdot (dz_e \cdot N_e) \quad \dots\dots\dots(33.2)$$

上式中の μ は、1 個の活性化粒子の降伏の結果移動する準安定粒子の数と、 dz の載荷により活性化する粒子の数とに比例すると考えられる。ゆえに μ は、砂の粒子状態が一定であれば、一定の定数とみられる。

dz の応力比を載荷するまでにすでに活性化している N_p 個の既活性化粒子は、その周囲を未活性化の準安定粒子またはこれから活性化する粒子に囲まれているか

ら、これらの未活性化粒子が dz の載荷により滑動すると未活性化粒子に連行されて移動する。そのため N_p 個の既活性化粒子の平均移動距離は、未活性化粒子群の1粒子当りの平均移動距離に等しい。また既活性化粒子群の平均的な移動方向は未活性化粒子群の平均的な移動方向と一致するから、既活性化粒子の移動が砂の最大せん断ひずみに寄与する効果は、未活性化粒子の移動が最大せん断ひずみにおよぼす効果と同一とみられる。ゆえに N_p 個の既活性化粒子の移動に起因する最大せん断ひずみ $d\gamma_s^*$ は、

$$d\gamma_s^* = (d\gamma_1^* + d\gamma_2^* + d\gamma_3^*) \cdot (N_p/N_e) \dots\dots\dots(33.3)$$

dz の応力比増分によって砂に生ずる最大せん断ひずみ増分 $d\gamma^*$ は、 $d\gamma_1^*$ 、 $d\gamma_2^*$ 、 $d\gamma_3^*$ の和として式 (33.1) ~ (33.3) より

$$d\gamma^* = d\gamma_1^* + d\gamma_2^* + d\gamma_3^* = A \cdot W_e \cdot (1 + \mu) \cdot dz_e$$

$$dz_e = (dz_e/dz) \cdot dz$$

であるから、上式を微分形で記すと

$$d\gamma^* = A \cdot W_e \cdot (1 + \mu) \cdot (dz_e/dz) \cdot dz \dots\dots\dots(34)$$

ゆえに砂が $z(> s_{el})$ の載荷をうけて塑性状態に移行以後に発生する最大せん断ひずみ γ^* は、式 (32) を上式に代入した後、 s_{el} から z まで積分すれば、 γ^* は

$$\gamma^* = \int_{s_{el}}^z d\gamma^* = A \cdot W_e \cdot (1 + \mu) \int_{s_{el}}^z \left(\frac{s_{\infty} - s_{el}}{s_{\infty} - z} \right)^2 \cdot dz$$

$$\therefore \gamma^* = A \cdot \kappa \cdot W_e \cdot \frac{z - s_{el}}{s_{\infty} - z}$$

$$= A \cdot W_p \cdot (z - s_{el})$$

ここに

$$\kappa = 1 + \mu, \quad W_p = \kappa \cdot W_e \cdot (s_{\infty} - s_{el}) / (s_{\infty} - z) \dots\dots\dots(35)$$

上式は、砂が塑性状態に移行以後に生ずる最大せん断ひずみ γ^* と載荷した応力比 z との関係を示す構成式で、図-5 のようになる。上式中の W_p は、塑性状態にある砂の粒子状態を示す係数であるから、これを塑性状態にある砂の構造係数と仮称し、 z の関数で示される。また砂の最大せん断ひずみの全量を γ 、その弾性限界

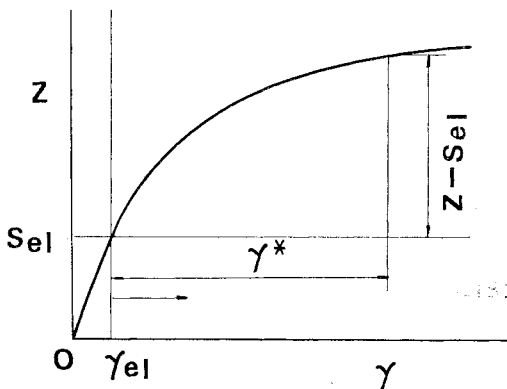


図-5 載荷応力比 z と最大せん断ひずみ γ との関係

のときの値を τ_{el} とし、 τ 、 τ_{el} 、 τ^* に対応する $(\tau/\sigma)_{\max}$ 面上のせん断ひずみをそれぞれ τ_{β} 、 $\tau_{\beta el}$ 、 τ_{β}^* と記すと、主応力方向と主ひずみ増分の方向が一致するとき、これらひずみの間の関係は式 (25) を求めたときと同様にして

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\beta} &= \tau / \sqrt{1 + z^2}, \quad \tau_{\beta el} = \tau_{el} / \sqrt{1 + s_{el}^2} \\ \tau_{\beta}^* &= (\tau - \tau_{el}) / \sqrt{1 + z^2} \\ &= \tau_{\beta} - \tau_{\beta el} \sqrt{1 + s_{el}^2} / \sqrt{1 + z^2} \\ &\doteq \tau_{\beta} - \tau_{\beta el}, \quad (\text{if } \sqrt{1 + s_{el}^2} \doteq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots(36)$$

ここに

$$\tau = \tau_{el} + \tau^*, \quad \tau_{el} = A \cdot W_e \cdot s_{el}$$

いま式 (35) を次のように変形する

$$\frac{z - s_{el}}{\tau^*} = \frac{1}{A \cdot \kappa \cdot W_e \cdot (s_{\infty} - s_{el})} \cdot (s_{\infty} - z) \dots\dots\dots(35.1)$$

上式のような砂の応力・ひずみ関係の双曲線表示は、Kondner らが 1936 年に実験をもとにして提案している。しかし Kondner らの式とここで求めた式 (35.1) とは根本的に次の 3 点で相違している。(1) Kondner らの式は応力・ひずみ関係式の起点を、応力とひずみそれぞれのゼロの点に採っている。一方式 (35.1) ではこの起点を砂に活性化が始まる点においている。(2) Kondner らの式では応力として偏差応力をそのまま用いているのに対し、式 (35.1) では偏差応力をそのまま用いず応力比 $z(=\tau/\sigma)$ を用いている。 τ/σ は後述のように三軸圧縮応力状態ではほぼ τ_{oct}/σ_m に等しいから、式 (35.1) は応力比 z を用いることによって σ_m (平均有効主応力) の影響を包含させていることになる。(3) Kondner らはその式のひずみが無限大になるときの応力をもって破壊強度としているが、筆者の場合は破壊強度は別にのべる考え方から決定し、式 (35.1) は単に塑性状態の特性式として扱っている。なお Kondner らはその提案式が、原点付近の応力・ひずみ関係や破壊強度の大きさにおいて実験結果と一致しないことをのべているが、これは Kondner らは、砂に弾性、塑性および破壊の 3 状態があることを考えていないため、塑性状態にある砂についての実験値を用いて作成された式を、弾性状態や破壊状態における応力・ひずみ特性にまでも適用させようとしたところに不一致の原因があるのではないと思われる。

c) ダイラタンシーによる体積ひずみ

応力比 $z(> s_{el})$ を載荷したとき、準安定粒子群に作用する応力比は式 (31) の $z_e(=\tan m_{1e})$ となる。すなわち

$$\tan m_{1e} = z + (z - s_{el}) \frac{N_p}{N_e} = (z - s_{el}) \frac{N}{N_e} + s_{el}$$

当初の砂の弾性状態が σ_m 一定のもとで一定偏差応力の繰り返し載荷によって作られた場合には、 m_{1e} の応力載

荷によって滑動する粒子の接点方向角の平均値 θ_s は式 (28) によって求められる。ゆえに上記の $\tan m_{1e}$ と $\tan m_2 (=s_{el})$ を式 (28) に代入すると

$$\tan(\theta_s + \delta) = (z - s_{el}) \frac{N}{2N_e} + s_{el}$$

上式において $z = s_{el}$ のときの $\tan(\theta_s + \delta)$ の値は

$$\tan(\theta_s + \delta) = s_{el}, \quad (z = s_{el} \text{ のとき})$$

また $N/N_e = 2$ のときは式 (30) より $z = (s_{\infty} + s_{el})/2$ であるから、この値に z が達したときの $\tan(\theta_s + \delta)$ は前式に $N/N_e = 2$ を代入して

$$\tan(\theta_s + \delta) = (s_{\infty} + s_{el})/2, \quad (z = (s_{\infty} + s_{el})/2 \text{ のとき})$$

すなわち $\tan(\theta_s + \delta)$ の値は $z = s_{el}$ および $(s_{\infty} + s_{el})/2$ においてそのときの z と等しい。これら両値の中間の z に対しては $\tan(\theta_s + \delta)$ は z と一致しないが、不一致の程度が小さいとしてこれら両値の間を直線的に近似すると

$$\tan(\theta_s + \delta) \doteq z \dots\dots\dots (37)$$

本節 b) においてのべたように、活性化した粒子の活性化後の移動は、これら活性化粒子を囲む準安定粒子に主導されるから、活性化粒子の平均の移動距離や移動方向は準安定粒子の平均の移動距離や移動方向と同一に扱えると考えられる。そうすれば塑性状態においても、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上の砂のせん断ひずみ増分 $d\gamma_{\beta}$ とこの面における砂の体積膨張 $-d\epsilon_n$ (ϵ_n は圧縮を正とする) の関係には弾性状態の場合の式 (26) が適用できる。式 (26) および式 (37) を式 (27) に代入すると、塑性状態にある砂のダイラタンシー特性の近似式として次式が求められる。

$$\lambda \left(-\frac{d\epsilon_n}{d\gamma_{\beta}} \right) + \tan \delta \doteq z \dots\dots\dots (38)$$

r_{β} を式 (35), (36) を用いてかきなおすと

$$r_{\beta} = K_{\beta} \frac{z - s_{el}}{\sqrt{1 + z^2} (s_{\infty} - z)} + r_{\beta el}$$

ここに

$$K_{\beta} = A \cdot n \cdot W_e \cdot (s_{\infty} - s_{el})$$

上式を考慮して式 (38) を ϵ_n について積分し、初期条件には $r_{\beta el}$ に対する ϵ_n として式 (29) 第2式の $\epsilon_n (= \epsilon_{nel})$ を用いると

$$\lambda \left(-\frac{\epsilon_n}{r_{\beta}} \right) = z - s_{el} + \lambda \left(-\frac{\epsilon_{nel}}{r_{\beta el}} \right) + L \dots\dots (38.1)$$

ここに

$$L = \frac{s_{el}(r_{\beta} - r_{\beta el})}{4r_{\beta}} - \frac{K_{\beta}(s_{\infty} - s_{el})}{r_{\beta}} \int_{s_{el}}^z \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2} (s_{\infty} - z)} + \frac{K_{\beta} - r_{el}}{r_{\beta}} \int_{s_{el}}^z \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}$$

砂の塑性状態では一般に $z < 1$ であるから、 $\sqrt{1 + z^2}$ は 1 に近い値となる。ゆえに仮に $\sqrt{1 + z^2}$ を定数とみて L の積分を行って L の近似値を求めると

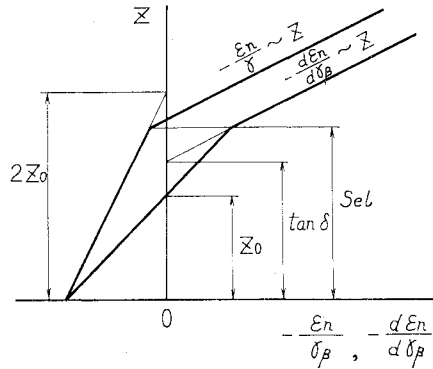


図-6 $d\epsilon_n/d\gamma_{\beta}-z$ および $\epsilon_n/r_{\beta}-z$ 関係

$$L \doteq \frac{r_{\beta el}}{r_{\beta}} \cdot \frac{z - s_{el}}{s_{\infty} - z} \cdot \left(z - \frac{3s_{\infty} + s_{el}}{4} \right)$$

ゆえに L の近似式では L は $z = s_{el}$, $z = (3s_{\infty} + s_{el})/4$ で 0 となるようにきわめて小さく、さらに $r_{\beta el} \ll r_{\beta}$ である。ゆえに式 (38.1) の右辺の L を無視すると

$$\lambda \left(-\frac{\epsilon_n}{r_{\beta}} \right) \doteq z - s_{el} + \lambda \left(-\frac{\epsilon_{nel}}{r_{\beta el}} \right) \dots\dots\dots (39)$$

式 (38), 式 (39) は定数項以外は同形であるから、両式を図-6 のように横軸に $d\epsilon_n/d\gamma_{\beta}$ または ϵ_n/r_{β} をとり、縦軸に同一の z 軸をとって描けば互いに平行な 2 直線となる。また式 (29) の 2 直線を図-6 にかき加えると式 (38), (39) の 2 直線が横軸となす傾きは、式 (29) 第1式の直線の傾きの 1/2 となる。図-6 のように、弾性状態および塑性状態に対する $d\epsilon_n/d\gamma_{\beta}-z$ および $\epsilon_n/r_{\beta}-z$ の両群の直線は図のようにそれぞれ $z = s_{el}$ において交わる。また式 (38) の直線が z 軸を切る縦距は $\tan \delta$ となる。式 (29) 第1式の直線が z 軸を切る点を z_0 とすると、 z_0 の大きさには $\tan \delta = (s_{el} + z_0)/2$ の関係がある。すなわち z 軸上に s_{el} , z_0 , $\tan \delta$ の長さの点をとれば、 $z = \tan \delta$ の点は s_{el} と z_0 の点の midpoint となる。

なお応力比 z は $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上の応力比であるため概念上考えにくい量である。そのため z の概念を得る参考として $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ の三軸圧縮試験の場合について z と τ_{oct}/σ_m などの一般的な応力比との関係を調べてみよう。なお、 τ_{oct} , σ_m はそれぞれ主応力軸を軸とする正八面体に作用するせん断応力と平均有効主応力である。いま $\sigma_3/\sigma_1 = K$ とおくと、

$$\begin{aligned} \sigma_m &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3 = (1 + 2K) \cdot \sigma_1/3 \\ \tau_{oct} &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}/3 \\ &= \sqrt{2} (\sigma_1 - \sigma_3)/3 = (1 - K) \cdot \sigma_1 \cdot (\sqrt{2}/3) \\ \therefore \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m} &= \frac{\sqrt{2}(1-K)}{1+2K}, \quad \left(\text{ここに } K = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right) \end{aligned}$$

一方式 (5) より

$$z = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \right) = \frac{1-K}{2\sqrt{K}}$$

上記両式の両辺の比をとって整理すれば、

$$\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{K}}{1+2K} z \equiv f(K) \cdot z,$$

$$f(K) \equiv \frac{2\sqrt{2}\sqrt{K}}{1+2K}$$

$f(K)$ は、 K が $1 \leq K \leq 0.255$ の範囲にあれば、 $f(K) = 1 \sim 1.059$ ときわめて 1 に近い。ゆえに z と τ_{oct} 、または最大せん断応力 $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ との関係は

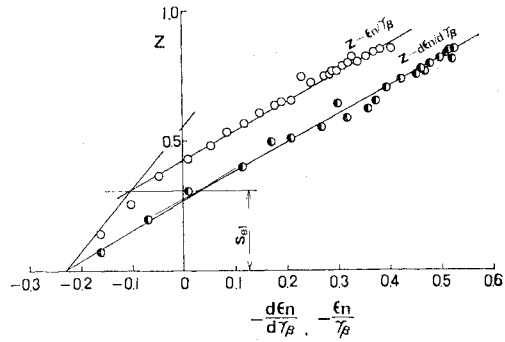
$$z \doteq \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_m} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tau_{max}}{\sigma_m}$$

4. 理論式と実験値の対比

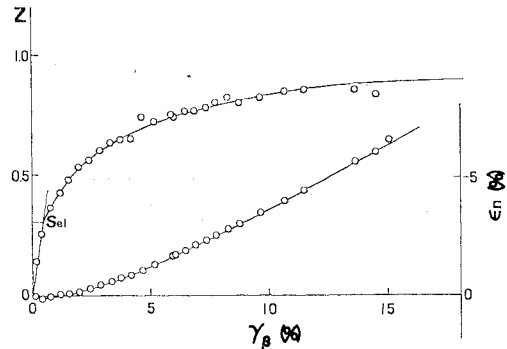
これまでに述べた応力・ひずみ特性式は、砂を摩擦性固体粒子の random assembly とする前提のもとにすべて理論的に誘導したものであるが、その理論構成にはいくつか仮定を導入したところがあったり、また誘導過程には便宜上近似を用いたところがあるから、理論解と実験値を対比させることは、理論の妥当性と誘導の精度を確かめるうえで有意義である。

実験値には松岡 元が行った排水三軸圧縮試験結果⁵、を借用する。この実験の砂試料は、突棒で突固められたと聞いており、その間隙比は 0.899 のややゆるい豊浦砂で、試験時の平均有効主応力 σ_m は一定で $\sigma_m = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ であった。また体積変化の測定には membrane misfit の補正がなされていると聞いており、その試験の結果は松岡の報文では τ/σ_N , ϵ_N , r の関係として発表されている。これらの値はそれぞれこの本文中の z , ϵ_n , r_β にあたる。この砂試料の作成は上述のように棒の突固めによるものであるから、本文でのべたような一定の σ_m のもとで同一の応力比の繰り返し载荷で弾性状態に作られたものではない。したがって前述した式 (29) の関係はこの試料には適合しない。ゆえにここではこの砂試料が完全に塑性状態に移行した部分だけを対象にしてこの理論との比較を行う。なおこの試料は明確な弾性限界がないから、この砂が完全に塑性状態に移行するときの応力比を s_{el} とし、この s_{el} を本文の弾性限界値と同様の取り扱いをすればよい。

z と $d\epsilon_n/dr_\beta$ および ϵ_n/r_β についての実験値をまとめて 1 枚の図にプロットすれば図-7 (a) の○印および●印となり、各群のプロットはそれぞれ 2 直線からなる折線上にほぼ存在することがみとめられる。式 (38), (39) は $z \geq s_{el}$ に対して成立するから、両群のプロットに対してこの式に適合する直線を引くと同図の平行な 2 直線になる。実験値のプロットがこれら直線から外れる点をそれぞれの直線の下限とみて、これらの直線の下限から s_{el} の値を求め、さらに下側の直線の z 軸との交点の値から $\tan \delta$ 、平行 2 直線の傾斜から λ の値を求



(a) ダイラクシシー応力比関係



(b) r_β - z および ϵ_n - z 関係

図-7 砂の構成式(実線)と砂の排水三軸圧縮試験値(点)との関係

めると次のようになる。

$$s_{el} = 0.31, \tan \delta = 0.28, \lambda = 1.08$$

このようにして求めた λ の値は式 (27) のように $\lambda \doteq 1 + \tan^2 \delta$ と一致して、式 (27) の適用の妥当なことを示している。

図-7 (b) の○印は、 z , r_β , ϵ_n の実験値である。この図より $s_{el} = 0.31$ に対応する r_β として $r_{\beta el} = 0.47\%$ を読みとる。式 (35.1) を式 (36) を用いてかきなおすと

$$\frac{z - s_{el}}{(r_\beta - r_{\beta el}) \sqrt{1 + z^2}} = \frac{1}{A \cdot \kappa \cdot W_e \cdot (s_\infty - s_{el})} (s_\infty - z) \dots \dots \dots (35.2)$$

上式の左辺の値は実測値から求められるから、この値を縦軸に、実測値 z を横軸にしてプロットすれば図-8 のように各点は 1 直線上にあることがみとめられ、理論的に求めた上式の特性和きわめてよい一致を示すことが実証された。この直線は上式の右辺を示すものであるから、この直線の値を図から読みとって上式右辺と等置すると、次式のように示される。

$$(s_\infty - z) / \{A \cdot \kappa \cdot W_e (s_\infty - s_{el})\} = 29.3 \{1 - z/0.966\}$$

上式を用いて s_∞ , $A \cdot \kappa \cdot W_e$ の値を求めると、

$$s_\infty = 0.966, A \cdot \kappa \cdot W_e = 0.05$$

次にこれまでに求めた諸要素の値を式 (35), (39) に

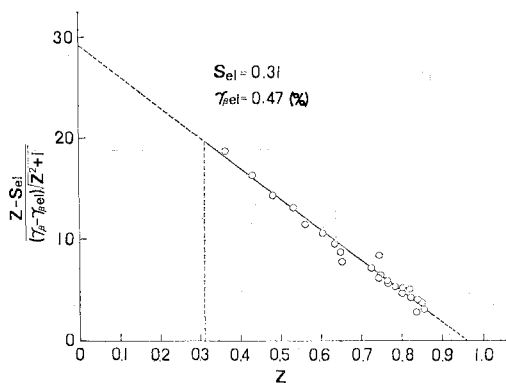


図-8 式 (35.2) と実測値との関係

代入して各 z に対する τ_{β} と ϵ_n の値を求め、図-7 (b) の実測点の上に描くと同図の実線のようになり、実験値とよい一致を示している。ゆえにこれらの式が塑性状態にある砂のせん断ひずみ、ダイラタンシーに対する構成式として十分妥当なものであることが明らかとなった。

5. 結 言

土の構成式として土の普遍的な応力・ひずみ特性式を明らかにすることは、単に土や地盤の実際的な変形問題を解析するうえに必要なだけでなく、土質力学として土の材料力学体系を整えるうえにも重要である。土の平均主応力に対する構成特性は粘土の圧密の例などがありいくらか知られているが、偏差応力に対する特性には未知の点が多い。これは土の内部機構が複雑なためであって、そのため土の構成式を理論的に求めようとする試みはきわめて少ない現状である。また構成特性に関連するような微視的現象を観測できる実験方法もまだ開発されていない。そのため土の構成式を粒子級の微視的立場から理論的に解析しようとするれば、まずその解析の手法自体から新たに案出していかねばならない困難がある。

構成式を微視的立場から解析するには上述の困難があるが、それを乗り切れれば粒子骨格の内部機構により近づくことができる利点があるので、あえてこの立場からの解析を行ってみた。この解析に用いた手法は、砂を摩擦則にしたがう固体粒子の不規則な集団 (random assembly) とする前提のもとに、粒子の挙動を物性論的立場から演繹的に考察して粒子構造に対する概念を設定するとともに、粒子間力と粒子挙動との関係を摩擦性固体粒子に対して新たに作成した統計力学的手法を適用して理論的に構成式を誘導する方法である。なお粒子の偏差

応力に対する挙動は、砂の状態によって機構的にまったく異なることが明らかとなったので、構成式としては、砂を弾性、塑性および破壊の三状態に分けてそれぞれ求めなければならないことを提案した。そのためまず弾性状態にある砂の構成式を前記の手法を用いて求めさきに本誌¹⁾に報告したが、本文は同様の手法によって塑性状態にある砂の構成式を誘導したものである。

これら報文における粒子状態の統計力学的処理にあたっては、粒子状態を示す確率変量として、以前に提案した粒子の最大稼働面 (plane of maximum mobilization)²⁾ に対する次の2つの方向角、すなわち粒子相互が滑動するときの滑動接点における粒子接面の方向角 (接点方向角) と、この点に作用する粒子間力の方向角を使用した。さらに塑性状態における解析上の特徴は、粒子が滑動後 potential 障壁において粒子間力により活性化する機構を解に導入していることである。得られた砂の構成式は、せん断ひずみ特性については本文の式 (35) に、ダイラタンシー特性は式 (38), (39) に記した。これら誘導式は、3式を砂の排水三軸圧縮試験の結果と対比させたところ、よい一致を示し、本文に用いた力学過程や確率過程における考察や解析精度の妥当性が検証されたことと思われる。また本文では、砂の力学特性として挙げられる弾性、弾性限界、塑性、ひずみ硬化、クリープなどの現象を、砂の変形過程に生じる粒子の滑動 (sliding)、活性化 (activation)、配向 (orientation) などの機構から物性論的に説明するとともに、それら現象や機構に関する定量的な関係についても考察した。

本文を結ぶにあたり、本研究に関してご教示をいただいた角屋 陸教授ならびに実験結果を引用させていただいた松岡 元助教授 に対し、ここに深謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 村山朝郎：弾性状態にある砂の構成式，土木学会論文報告集，236号，pp. 125~137，1975年4月。
- 2) Murayama, S. : A Theoretical Consideration on a Behavior of Sand, Proc. IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mech., Grenoble, 1964, Springer-Verlag, 1966, p. 148.
- 3) 村山朝郎・北村良介：くり返し載荷をうける砂の応力・ひずみ関係について，第9回土質工学研究発表会講演集，pp. 203~206，1974年6月。
- 4) Kondner, R. and J. Zelasco : A Hyperbolic Stress-Strain Formulation for Sands, Proc. Second Pan-American Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 1, July 1963, pp. 289~324.
- 5) Matsuoka, H. : Stress-Strain Relationships of Sands Based on the Mobilized Plane, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 2, June 1974, p. 53 and p. 55.

(1975.3.18・受付)

正 誤 表

「弾性状態にある砂の構成式」 著者 村 山 朔 郎
 (土木学会論文報告集 第 236 号, pp. 125~137 1975 年 4 月)

ページ, 欄, 行	誤	正
p. 129, 左欄, 下より 6 行目	図-3 (a)	図-3 (b)
p. 129, 右欄, 下より 5 行目	弾性状態にあ場	弾性状態にある場
p. 130, 右欄, 下より 11 行目	$N(0, 1)$	$N(0, 1^2)$
p. 131, 右欄, 上より 12 行目より	偏差応力によって……	第 2 報*の p. 82 右欄, 上より 10 行目以下 に記す
p. 132, 左欄, 上より 8 行目まで	……式 (19)	
p. 132, 左欄, 上より 10 行目より 同欄, 下より 10 行目まで	粒子が隣接粒子の ……式 (20)	第 2 報*の p. 84 左欄, 下より 6 行目以下 に記す
p. 134, 右欄, 上より 20 行目より	前節で式 (18) を……	第 2 報*の p. 84 左欄, 上より 1 行目以下 に記す
p. 135, 左欄, 上より 9 行目まで	……式 (33)	

(注) 第 2 報*とは本号 (第 251 号) pp. 77~89 の「塑性状態にある砂の構成式」をいう.